ARCHIV FÜR METEOROLOGIE, GEOPHYSIK UND BIOKLIMATOLOGIE

HERAUSGEGEBEN VON

DOZENT DR. W. MÖRIKOFER
PHYSIKALISCH-METEOROLOGISCHES OBSERVATORIUM
DAVOS

PROF. DR. F. STEINHAUSER
ZENTRALANSTALT FÜR METEOROLOGIE UND GEODYNAMIK
WIEN

SERIE A
METEOROLOGIE UND GEOPHYSIK

BAND IV
MIT 150 TEXTABBILDUNGEN
(ABGESCHLOSSEN AM 20. AUGUST 1951)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1951

Arch. Met. Geoph.
Biokl. A.

Serie A, Band IV Inhaltsverzeichnis

Seite

Rossby, C. G. Über die Vertikalverteilung von Windgeschwindigkeit und Schwerestabilität in Freistrahlbewegungen der oberen Troposphäre. (Mit 6 Textabbildungen) 3

McIntyre, D. P. The Philosophy of the Chicago School of Meteorology 24

Mieghem, Jacques Van. La turbulence isentropique latérale dans le tourbillon circulaire 33

Raethjen, P. Über den planetarischen Austausch der Vorticity und des Rotationsmoments 41

Kleinschmidt jun., **E.** Grundlagen einer Theorie der tropischen Zyklonen. (Mit 3 Textabbildungen) 53

Haurwitz, B. The Motion of Binary Tropical Cyclones. (With 3 Figures) 73

Schumann, T. E. W. and **M. P. van Rooy.** Frequency of Fronts in the Northern Hemisphere. (With 5 Figures) 87

Pollak, L. W. and **P. G. Tedde.** On the Frequency of Cyclones over the North Atlantic Related to the Sunspot Cycle. (With 7 Figures) 98

Wippermann, F. Zur Frage des Einflusses der Land- und Meerverteilung auf die Lage der quasistationären Tröge in einer atmosphärischen Zonalzirkulation. (Mit 3 Textabbildungen) 112

Reuter, H. Zur numerischen Methode der Vorhersage von Änderungen der 500-mb-Fläche nach Charney und Eliassen. (Mit 4 Textabbildungen) 122

Hesselberg, Th. Mean Transport in the Atmosphere 128

Möller, F. und **E. de Bary.** Der Wärme- und Wasserdampfhaushalt der freien Atmosphäre. (Mit 2 Textabbildungen) 142

Defant, F. Die Änderungen des meridionalen Windprofils durch Kondensationswärme und Turbulenzvorgänge. (Mit 8 Textabbildungen) 156

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

Das

„Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie“

erscheint in zwangloser Folge in zwei parallelen Serien:

Serie A Meteorologie und Geophysik: Allgemeine, theoretische und synoptische Meteorologie, Geophysik der Atmosphäre, des Meeres und des festen Erdbodens.

Serie B Allgemeine und biologische Klimatologie: Allgemeine und medizinische Klimatologie, Agrar- und Mikroklimatologie, Meteorobiologie, Strahlungsforschung

Die beiden Serien können unabhängig voneinander bezogen werden. Die Hefte werden einzeln berechnet und zu Bänden von 25—30 Bogen vereinigt.

Das Archiv soll wissenschaftlich einwandfreie Arbeiten von allgemein fachlichem Interesse veröffentlichen. Es werden deshalb nur Originalarbeiten aufgenommen, die neue Erkenntnisse bringen, und zwar Aufsätze größeren Umfanges wie auch kleine Mitteilungen. Gelegentlich wird auch durch Sammelreferate über die neuesten Ergebnisse einzelner Spezialgebiete ein Überblick über den jeweiligen Stand eines bestimmten Problems gegeben werden, wobei besonders durch Hervorheben der noch ungelösten Fragen der weiteren Forschung Anreiz geboten werden soll. Schließlich werden auch kritische Buchbesprechungen auf bedeutende Neuerscheinungen aus unserem Wissensgebiet hinweisen.

Die Verfasser werden gebeten, den Text möglichst knapp zu fassen und historische Einleitungen tunlichst zu vermeiden. In den beigegebenen Tabellen ist die Wiedergabe unverarbeiteten, umfangreichen Beobachtungsmaterials zu vermeiden; auch sollen die Resultate im allgemeinen nicht durch Tabellen und Kurven gleichzeitig wiedergegeben werden. Die Tabellen sollen eine Überschrift tragen.

Die Arbeiten können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung in mindestens zwei Sprachen vorangestellt werden. Eine Zusammenfassung ist auf jeden Fall vom Verfasser mitzuliefern, ihre Übersetzungen werden nötigenfalls vom Verlag besorgt. Die Literaturhinweise erfolgen durch im laufenden Text in Klammern eingefügte Nummern, die genaue Zitate bezeichnen, die in einem Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit zusammenzustellen sind.

Die Manuskripte sind gewöhnlich in Maschinenschrift auf einseitig beschriebenen, fortlaufend paginierten Blättern abzufassen. Abbildungsvorlagen sind in so sauberer Wiedergabe einzusenden, daß sie entweder unverändert verwendet oder durch Zeichner des Verlages einwandfrei neu gezeichnet

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

Dieser Band des „Archivs für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie" ist der

Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik in Wien

zur Feier ihres hundertjährigen Bestehens gewidmet. Die Wiener Zentralanstalt hat als eines der ältesten meteorologischen Institute durch ihre systematische Forschungstätigkeit Entscheidendes zur Entwicklung der neuzeitlichen Meteorologie und Klimatologie beigetragen. Die Herausgeber des Archivs und die Mitarbeiter an dem Festband möchten durch ihre Gabe die hohe Wertschätzung für die Arbeit dieses ehrwürdigen Instituts im ersten Jahrhundert seines Bestehens zum Ausdruck bringen. Die Herkunft der Beiträge aus allen Erdteilen dürfte ein deutliches Zeichen für die breite Basis sein, auf der die Anerkennung und die Dankbarkeit der Fachwelt ruhen.

Im Jubiläumsjahr der Zentralanstalt feiern auch zwei hervorragende Forscher dieses Instituts ihren 75. bzw. 70. Geburtstag, und zwar

Herr Professor Dr. V. Conrad, geb. am 25. August 1876,
Herr Professor Dr. H. Ficker, geb. am 22. November 1881.

Herausgeber und Mitarbeiter vereinigen sich in der Bitte, daß die Genannten in diesem Festband auch eine Ehrung und einen Ausdruck des Dankes für ihr wissenschaftliches Lebenswerk erblicken mögen.

W. Mörikofer *F. Steinhauser*

Springer-Verlag
O. Lange

551 . 513 . 1 : 551 . 557

(Institute for Advanced Study, Princeton.)

Über die Vertikalverteilung von Windgeschwindigkeit und Schwerestabilität in Freistrahlbewegungen der oberen Troposphäre.

Von

C. G. Rossby.

Mit 6 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Aerologische Beobachtungen aus Nordamerika zeigen, daß die Luftströmung in der oberen Troposphäre öfters aus mehreren Stromfäden besteht, die der Windrichtung parallel und durch Gürtel schwächerer Luftbewegung voneinander getrennt sind und sich langsam in der Stromrichtung verschieben. Besonders in der wärmeren Jahreszeit scheint diese faserige Struktur der horizontalen Windverteilung nicht selten von einer auffallenden *vertikalen* Verstärkung der Bewegungsgröße in einer verhältnismäßig dünnen Schicht im Niveau von 200 mb bis 300 mb begleitet zu sein, während unterhalb 400 bis 500 mb und oberhalb 150 mb schwache Winde vorherrschen.

Um diese Verteilung zu erklären, wurde angenommen, daß jede stabil geschichtete Strömung von gegebenem Massentransport unter dem Einfluß von Reibungskräften zwar Änderungen in der vertikalen Verteilung von Windgeschwindigkeit und Schwerestabilität erfahren muß, aber asymptotisch einem Zustand zustrebt, der dadurch gekennzeichnet ist, daß der mit dem vorgegebenen, konstanten Massentransport verbundene Transport von Bewegungsgröße, bezogen auf die Zeiteinheit und den Strömungsquerschnitt, einen Minimalwert annimmt. Die zugehörige vertikale Struktur der Strömung läßt sich ziemlich einfach berechnen, wenn man die Annahme macht, daß die Bewegungsgrößen der geschichteten Strömung auch dann ausgetauscht werden können, wenn die einzelnen Schichten ungemischt bleiben und mithin ihre potentielle Temperatur beibehalten. Diese Annahme kann auch so ausgedrückt werden, daß in einer stabil geschichteten Strömung die Austauschgröße für Bewegungsgröße jedenfalls eine ganze Größenordnung höher sein muß als die betreffende, auf Wärme bezogene Größe. Bei der Berechnung des oben definierten asymptotischen Endzustandes wurde weiterhin angenommen, daß die Trägheitsstabilität der umgebenden Atmosphäre eine seitliche Ausbreitung des Stromes verhindert.

Geschichtete Strömungen, die sich diesem asymptotischen Zustand anpassen, erfahren normalerweise eine vertikale Schrumpfung und mithin auch eine Zunahme der Windgeschwindigkeit in der Mitte des Stromes. Diese

Beschleunigung muß offenbar mit einem Druckgefälle in der Bewegungsrichtung verbunden sein; in dieser Weise ausgebildete Ströme müssen somit wahrscheinlich nicht-stationär sein und nur begrenzte Ausdehnung haben. Die während der hier beschriebenen Entwicklung abgegebenen Bewegungsgrößen müssen in der Umgebung des Stromes zur Ausbildung von Mitführströmen („Entrainment Currents") Anlaß geben; es müssen mithin die angrenzenden Luftmassen mitgerissen werden.

Summary. North American aerological data indicate that the wind distribution at the 200 and 300 mb levels often is characterized by the presence of elongated, slowly progressive and nearly parallel streaks of high wind separated from each other by belts of much weaker air motion. Particularly during the warmer part of the year this horizontal concentration of the momentum into a streaky pattern appears to be accompanied by an equally striking vertical concentration of momentum to the 200 or 300 mb level, with feeble winds prevailing above 150 mb and below 400 or 500 mb.

As a tentative explanation for this behavior of the winds near the tropopause level it is suggested that stratified currents of prescribed volume transport, through frictional losses to the environment, seek to assume that particular distribution of wind velocity with height which corresponds to a minimum value of the momentum transfer per unit time across a vertical section through the current. On the assumption that momentum can be given off without destruction of the identity of the individual strata within the current it is possible to derive a basic relationship between the vertical gradient of wind velocity and of potential temperature in a current satisfying this minimum requirement.

Stratified currents approaching this limiting state will normally pick up speed in the center and shrink in depth. This increase of wind speed in the center of the jet requires a pressure drop in the direction of the motion, indicating that local jets formed by this process must be of limited geographic extent and presumably also of a transient character.

The downstream decrease in the momentum transfer must be accompanied by the establishment of entrainment currents in the environment.

Résumé. Des observations aérologiques en Amérique du Nord montrent que les courants aériens de la haute troposphère s'arrangent souvent en longs filets ou tubes distincts, parallèles, séparés par des espaces de moindre mouvement et qui se déplacent lentement dans le sens du courant général. Dans la saison chaude en particulier cette concentration de la quantité de mouvement en bandes horizontales relativement étroites semble être accompagnée d'une concentration analogue de la quantité de mouvement dans la verticale, au niveau de 200 à 300 mb, alors qu'au-dessus de 150 mb et au-dessous de 400 à 500 mb les vents sont faibles. Pour l'explication du phénomène on a admis que chaque courant de débit donné présentant une stratification stable doit tendre par frottement vers un état particulier de la distribution du vent selon l'altitude qui correspond à une valeur minimum de la quantité de mouvement par unité de temps dans une section verticale du dit courant. On peut calculer assez facilement une telle structure verticale en admettant que les quantités de mouvement du courant stratifié peuvent être échangées même lorsque les couches individuelles ne se mélangent pas et conservent par conséquent leur température potentielle. On peut encore exprimer cette condition en disant que dans un courant à stratification stable l'ordre de grandeur de l'échange turbulent des quantités de mouvement est plus élevé d'une dimension que celui qui se rapporte aux échanges de chaleur. Pour

le calcul de l'état final asymptotique vers lequel tend le courant, on a en outre admis que l'inertie de l'atmosphère environnante s'oppose à une extension latérale du courant. Des flux stratifiés qui tendent vers cet état asymptotique subissent normalement un affaissement vertical et par conséquent une augmentation de vitesse en leur centre. Cette accélération centrale doit être évidemment liée à un gradient de pression dans la direction du mouvement, de sorte que de tels courants ne peuvent être stationnaires et n'interessent qu'un domaine limité. Pendant l'évolution décrite, les quantités de mouvement cédées doivent provoquer dans le milieu environnant des courants d'entraînement par lesquels les masses voisines sont entraînées.

Aerologische Erfahrungen, die während der letzten Jahre gesammelt worden sind, haben zu der Feststellung geführt, daß die oberen Westwindströmungen in den mittleren Breiten in vielen oder sogar in den meisten Fällen streifenmäßig verteilt sind, so daß zur selben Zeit mehrere, der Windrichtung parallele Streifen von begrenzter Länge und von maximaler Windgeschwindigkeit auftreten, die durch Gebiete schwächerer Luftbewegung voneinander getrennt sind. Ein Beispiel von einer solchen

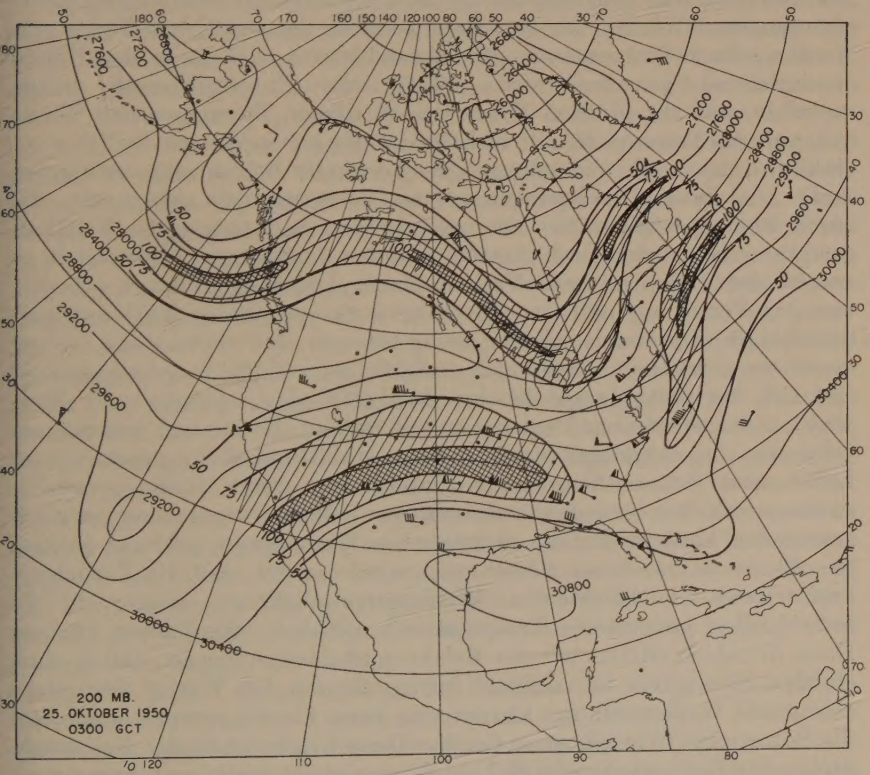


Abb. 1. Synoptisches Beispiel einer faserigen Windverteilung in der 200-mb-Fläche. Die Linien gleicher Windgeschwindigkeit sind dick, die Linien gleicher Höhe (in Fuß angegeben) sind dünn ausgezogen. Alle Windgeschwindigkeiten sind in Knoten (= 0,515 m/s) ausgedrückt. Analyse von B. Bolin.

Windverteilung in der 200 mb-Höhe ist in Abb. 1 gegeben. Es ist offenbar eine wichtige Aufgabe der theoretischen und synoptischen Aerologie, diese faserige Struktur der oberen Strömungen zu erklären. Ähnliche Erscheinungen treten auch bei gewissen Meeresströmungen auf und sind vom Verfasser behandelt worden (Craya 1951 [*1*], Rossby 1951 [*4*]).

Wenn man nun synoptisch die vertikale Verteilung der Windstärke in einer solchen schmalen und gutentwickelten oberen Westwindströmung untersucht, findet man nicht selten, und besonders im Sommer, daß fast die ganze Bewegung auf eine enge Schicht etwa zwischen 300 mb und 100 mb beschränkt ist. Obgleich es noch gar nicht als völlig bewiesen angesehen werden kann, hat es doch den Anschein, daß diese Einschnürung der Strömung zwischen waagrechten Flächen in Nordamerika meistens östlich von den großen Gebirgsketten stattfindet und in dieser Gegend mit einer markierten Zunahme der Windgeschwindigkeit im Zentrum des Stromes verbunden ist.

Diese Eindrücke, die natürlich noch durch genaue synoptisch-statistische Untersuchungen bestätigt werden müssen, deuten darauf hin, daß die innere Struktur der aus dem Stillen Ozean kommenden Luftströmungen durch die von den Gebirgsketten des westlichen Teiles von Nordamerika hervorgerufenen Widerstandskräfte auch in großen Höhen durchgreifend geändert wird. Statistische Untersuchungen zeigen weiterhin, daß die größten Werte des vertikalen Zuwachses der Winde in der oberen Troposphäre mit verhältnismäßig hohen Werten der Schwerestabilität, das heißt mit ausgeprägter vertikaler Schichtung, verbunden sind. Aus diesen Überlegungen ist der Verfasser dazu gekommen, die durch Reibungswiderstände hervorgebrachten Änderungen der Vertikalstruktur eines stabil geschichteten, geraden Luftstromes theoretisch zu untersuchen. Der zeitliche Verlauf dieser Änderungen hängt offenbar von der Verteilung und von der Stärke des vertikalen Turbulenzaustausches ab. Darüber ist aber so wenig bekannt, daß man auf die Lösung dieser an sich schon schwierigen Aufgabe zu verzichten gezwungen ist und sich vorläufig darauf beschränken muß, das asymptotische Endstadium der erwähnten Prozesse zu behandeln. Es ist von besonderem Interesse, die endgültige Struktur eines stabil und stetig geschichteten Luftstromes festzustellen, dessen Impulsstrom durch Reibungsverluste zu einem mit dem für jede dünne isentrope Schicht vorgegebenen, zeitlich konstanten Massentransport verträglichen Minimalwert gebracht worden ist. Es wurde bei dieser Berechnung vorausgesetzt, daß die Turbulenzkräfte zwar die individuellen Windgeschwindigkeiten, aber nicht die individuellen potentiellen Temperaturen merklich beeinflussen können. Diese Annahme stimmt mit der Erfahrungstatsache überein, daß in einer stabilen Flüssigkeit die vertikale Austauschgröße für Wärme wenigstens eine ganze Größenordnung kleiner sein kann als die entsprechende, auf die Bewegungsgröße bezogene Größe. Diese Ungleichheit der Austauschgrößen für Bewegungsgröße und für Wärme hängt wohl damit zusammen, daß Bewegungsgröße auch dann ausgetauscht werden kann, wenn keine vollständige Vermischung stattfindet, wenn somit die Bewegungen zum

Teil geordnet sind. Solche geordneten inneren Bewegungen können aber in scherenden, geschichteten Strömungen etwa als instabile interne Wellen spontan auftreten. Weitere Erläuterungen dieser Frage findet man z. B. bei GOLDSTEIN [3].

In der unten gegebenen vorläufigen Berechnung werden wir von der Erddrehung völlig absehen. Es wird später und an einem anderen Ort gezeigt werden, daß durch die in der seitlichen Umgebung des betrachteten Stromes von der Rotation der Erde hervorgerufene Trägheitsstabilität gewisse Widerstandskräfte geschaffen werden, wodurch horizontale Querschnittsänderungen erschwert werden, und es läßt sich sogar zeigen, daß diese Trägheitsstabilität der Umgebung dazu führt, daß jede seitlich begrenzte Strömung eine von der vertikalen Konzentration abhängige, bevorzugte Weite besitzt, die sich unter dem Einfluß von Impulsverlusten allmählich einzustellen versucht. Es ist nur wegen dieser lateralen Stabilität, daß es überhaupt einen Sinn hat, von vertikalen Umlagerungen in geschichteten und geraden Strömen zu sprechen; sonst würden sich ja diese Strömungen einfach nach allen Seiten ausbreiten.

Es ist klar, daß die Bewegungsgröße, die dem betrachteten Luftstrom entzogen wird, nicht zerstört wird, sondern etwa in der Umgebung aufgespeichert werden muß. Die dabei mitgerissenen Luftmassen müssen als ein „*Entrainment Current*" (Mitführstrom) in dem Sinne auftreten, wie z. B. STOMMEL [5] dieses Wort benutzt hat. Es ist ohne weiteres einzusehen, daß unter diesen Umständen die Massenverfrachtung des ganzen Stromes in der Stromrichtung zunehmen muß, so daß, wie es schon TOLLMIEN [6] 1920 in seinen Freistrahlstudien gezeigt hat, transversale Bewegungen auftreten müssen. Es ist weiterhin verständlich, daß ein Druckgefälle in der Stromrichtung vorhanden sein muß, um überhaupt die Geschwindigkeitszunahme hervorzubringen. Aus diesen Gründen müssen offenbar diese konzentrierten Ströme von begrenzter Länge sein. Wenn die Strömung, abgesehen von den mitgerissenen Luftmassen, schließlich einen Minimalwert des Impulstransportes erreicht hat, können weitere Verluste von Bewegungsgröße nur dadurch kompensiert werden, daß eine Änderung des Massentransportes stattfindet, und es müssen dann nicht-stationäre Erscheinungen auftreten.

Um nun die mit dem variablen „Entrainment Current" verbundenen Schwierigkeiten zu vermeiden, werden wir annehmen, daß die begrenzte geschichtete Strömung oben wie unten von adiabatischen Luftmassen umgeben ist. Unter diesen Umständen darf man vielleicht annehmen, daß die abgegebene Bewegungsgröße sich so schnell und so weit verbreitet, daß die Geschwindigkeiten an den Grenzen des geschichteten Stromes fast ungeändert bleiben.

In Abb. 2 sind einige aerologische Beispiele für die vertikale Windverteilung in besonders ausgeprägten und eng begrenzten Freistrahlströmungen gegeben. Im allgemeinen scheinen diese Ströme unterhalb der eigentlichen Stratosphäre zu liegen. Während der Sommermonate kommen solche Strömungen häufig vor, ohne mit irgendwelchen Frontalzonen in der unteren Troposphäre verbunden zu sein. Aus diesen be-

grenzten Freistrahlströmungen entwickeln sich unter gewissen Umständen außerordentlich weit ausgezogene Mäanderschleifen, die als scharfe Troglinien in den Höhenkarten zu erkennen sind. Ein Beispiel einer solchen Schleifzone in der 200-mb-Höhe ist in Abb. 3 wiedergegeben, und ein dazu gehörender west-östlicher senkrechter Schnitt ist in Abb. 4

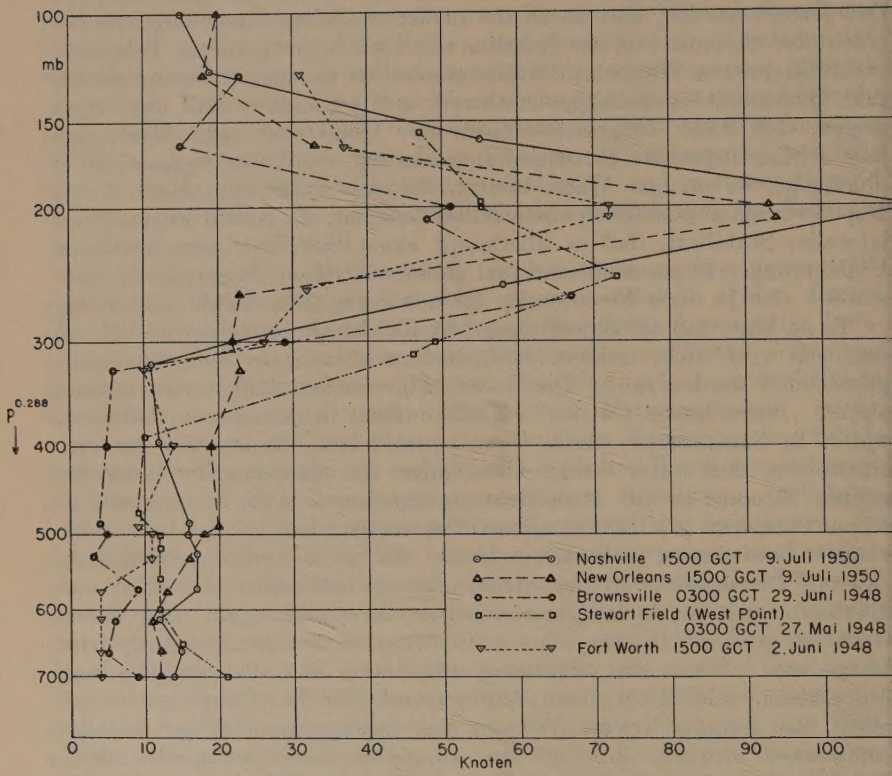


Abb. 2. Beispiele für die vertikale Windverteilung in ausgeprägten Freistrahlströmungen. Die Windgeschwindigkeiten sind in Knoten angegeben.

abgebildet. Man sieht, daß die zwei Strahlströme in dieser Abbildung rein troposphärische Erscheinungen sind, die aber von den Vorgängen in der unteren Hälfte der Troposphäre ziemlich unabhängig sind.

Um jetzt die mit einem Minimalwert des Impulsstromes verbundene Geschwindigkeitsverteilung zu berechnen, geht man am besten von den in Impulsform gegebenen Bewegungsgleichungen aus (Ertel [2]). Man findet dann für den totalen Wert des Impulsstromes J in der Stromrichtung x den Ausdruck

$$J = \int_{z_1}^{z_2} (\varrho\, u^2 + p)\, dz. \qquad (1$$

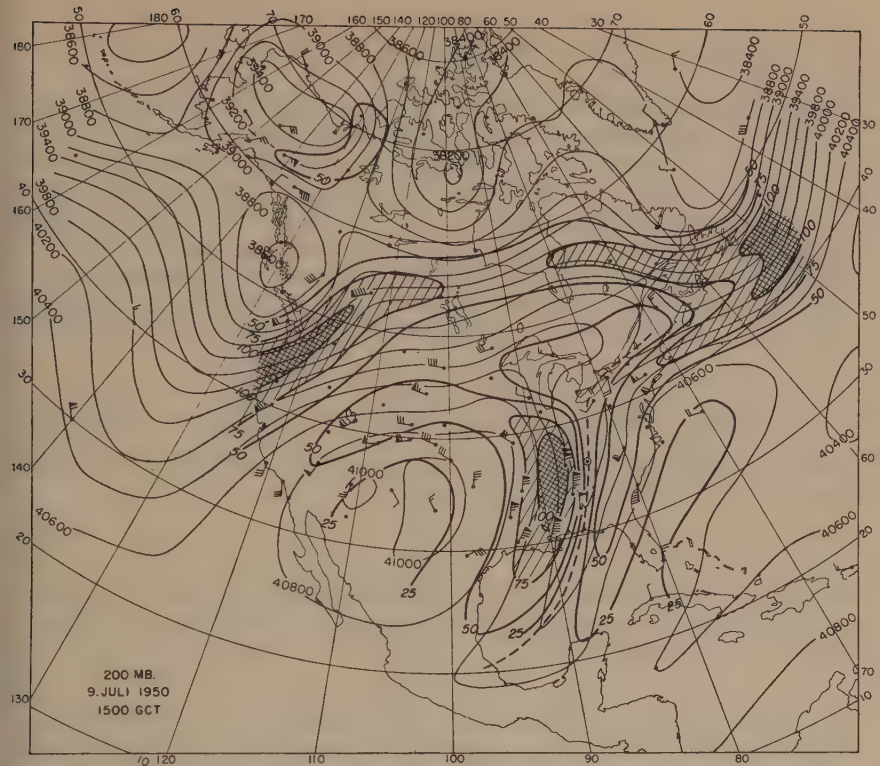


Abb. 3. Ausgeprägte Schleifzone in der 200-mb-Fläche, durch Linien gleicher Windgeschwindigkeit und gleicher Höhe dargestellt. Analyse von C. W. NEWTON.

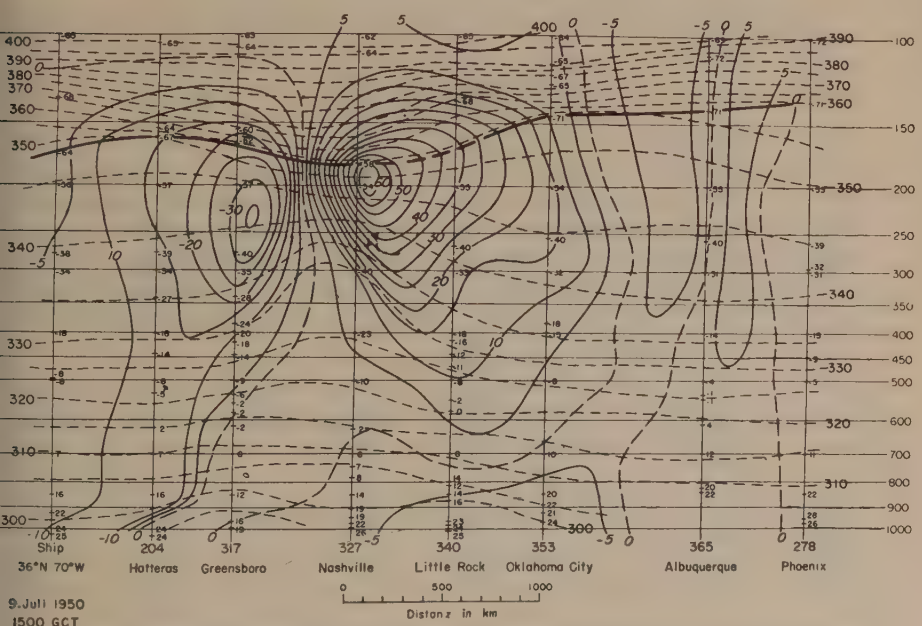


Abb. 4. West-östlicher Querschnitt durch die in Abb. 3 dargestellte Schleifzone. Die Isentropen sind strichliert, die Linien gleicher Windgeschwindigkeit senkrecht zum Querschnitt voll gezogen. Man bemerke die fast völlige Barotropie der Atmosphäre unterhalb 500 mb. Analyse von C. W. NEWTON.

Dabei ist ϱ die Dichte, u die horizontale Windgeschwindigkeit und p der Druck. Die Integrationsgrenzen werden unten diskutiert.

Wir nehmen zuerst an, daß die ganze Strömung zwischen zwei adiabatischen Schichten mit den potentiellen Temperaturen Θ_1 und Θ_2 ($> \Theta_1$) vor sich geht. In diesen umgebenden Schichten soll der Massentransport verschwinden. Wir führen jetzt die potentielle Temperatur als unabhängige Vertikalkoordinate ein und erstrecken unsere Integration von einem z_1 innerhalb der unteren adiabatischen und ruhenden Luftmasse bis zu einem z_2 innerhalb der oberen ruhenden Luftmasse. Man findet

$$J = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} (\varrho u^2 + p)\, \dot{z}\, d\Theta + \int_{z_1}^{z_b} p\, dz + \int_{z_a}^{z_2} p\, dz. \tag{2}$$

Oberhalb z_2 und unterhalb z_1 finden keine Änderungen statt. In diesem Ausdruck haben wir die Schreibweise

$$\dot{z} \equiv \frac{dz}{d\Theta} \tag{3}$$

eingeführt. Die Größen z_b und z_a sind die unteren und oberen Grenzen der strömenden und geschichteten Luftmasse. Mit Hilfe der hydrostatischen Gleichung

$$\dot{p} = -g\, \varrho\, \dot{z} \tag{4}$$

kann man jetzt $\dot{z}$ aus (2) eliminieren. Schließlich führen wir den invarianten Massentransport v einer isentropen Einheitsschicht ein und finden

$$\varrho\, u\, \dot{z} = -\frac{\dot{p}}{g}\, u = v\,(\Theta). \tag{5}$$

Mit Hilfe von (4) und (5) läßt sich (2) jetzt umformen und man erhält

$$J = -\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \left(\frac{g\, v^2}{\dot{p}} + \frac{p\, \dot{p}}{g\, \varrho} \right) d\Theta + \int_{z_1}^{z_b} p\, dz + \int_{z_a}^{z_2} p\, dz. \tag{6}$$

Es ist jetzt unsere Aufgabe, diejenige Funktion p von Θ zu bestimmen, für die J zu einem Minimalwert wird. Wenn man jetzt das erste Glied von J variiert, muß beachtet werden, daß die Variation δp nicht an den Grenzen verschwindet. Wegen der verschwindenden Bewegung in den umgebenden Schichten kann man aber sagen, daß die Variation der zwei letzten Glieder der rechten Seite von (6) einfach durch die Variation von z_a und z_b gegeben ist. Mithin

$$\delta J = -\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \left[\frac{\dot{p}}{g\, \varrho}\, \delta p + \left(\frac{p}{g\, \varrho} - \frac{g\, v^2}{\dot{p}^2} \right) \delta \dot{p} - \frac{p\, \dot{p}}{g\, \varrho^2}\, \delta \varrho \right] d\Theta + p_b\, \delta z_b - p_a\, \delta z_a \tag{7}$$

Es wird jetzt angenommen, daß alle Variationen adiabatisch sind. Deshalb muß

$$\frac{\delta \varrho}{\varrho} = \frac{c_v}{c_p} \frac{\delta p}{p} \tag{8}$$

sein, wo c_v und c_p die spezifischen Wärmen der atmosphärischen Luft sind. Mit Hilfe von (8) läßt sich (7) umformen und man erhält

$$\delta J = -\int_{\Theta_1}^{\Theta_2}\left[\frac{\dot{p}}{g\varrho}\left(1-\frac{c_v}{c_p}\right)\delta p+\left(\frac{p}{g\varrho}-\frac{g v^2}{\dot{p}^2}\right)\delta\dot{p}\right]d\Theta+p_b\,\delta z_b-p_a\,\delta z_a. \quad (9)$$

In dem obigen Ausdrucke kann man jetzt die Gaskonstante $\frac{R}{m}$ für Luft einführen, die mit c_v und c_p durch die Gleichungen

$$\frac{R}{m}=c_p-c_v,\quad \frac{R}{m\,c_p}=0{,}288=\varkappa \quad (10)$$

verbunden ist. Durch partielle Integration erhält man schließlich

$$\delta J=-\int_{\Theta_1}^{\Theta_2}\left[\frac{\varkappa\dot{p}}{g\varrho}-\frac{d}{d\Theta}\left(\frac{p}{g\varrho}-\frac{g v^2}{\dot{p}^2}\right)\right]\delta p\,d\Theta$$

$$-\left[\left(\frac{p}{g\varrho}-\frac{g v^2}{\dot{p}^2}\right)\delta p\right]_{z_b}^{z_a}+p_b\,\delta z_b-p_a\,\delta z_a. \quad (11)$$

Wegen des Fehlens von Bewegung in der Umgebung gelten aber die zwei Bedingungen

$$\delta p_b=-g\,\varrho_b\,\delta z_b,\quad \delta p_a=-g\,\varrho_a\,\delta z_a. \quad (12)$$

Daraus folgt nach einfacher Umrechnung und nach Wiedereinführung der Windgeschwindigkeit

$$\delta J=-\int_{\Theta_1}^{\Theta_2}\left[(\varkappa-1)\frac{\dot{p}}{g\varrho}+\frac{p\,\dot{\varrho}}{g\varrho^2}+\frac{1}{g}\frac{du^2}{d\Theta}\right]\delta p\,d\Theta+$$

$$+\frac{u_a^2}{g}\delta p_a-\frac{u_b^2}{g}\delta p_b. \quad (13)$$

Diese Gleichung besagt, daß ein Extremwert von J nur dann eintritt, wenn u_a und u_b verschwinden, das heißt wenn die Geschwindigkeitsverteilung stetig ist.

Wir müssen jetzt eine Nebenbedingung betrachten, die durch das Fehlen von Bewegung in der Umgebung bedingt ist. In diesen stationären Schichten kann kein Energieverbrauch stattfinden. Die Energie pro Masseneinheit ist durch

$$E=g\,z+\int\frac{dp}{\varrho}=g\,z+c_p\,T=g\,z+c_p\,\Theta\,\pi \quad (14)$$

gegeben und muß daher in diesen Schichten zeitlich konstant bleiben; T ist die absolute Temperatur. In (14) ist die Größe π durch

$$\pi=\frac{T}{\Theta}=\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\varkappa} \quad (15)$$

definiert, wo p_0 ein konstanter Druck (1000 mb) ist. Wegen der adiabatischen Schichtung in den umgebenden Schichten sind die dortigen

spezifischen Energien auch räumlich konstant und haben die Werte

$$E_2 = g\,z + c_p\,T = g\,z_2 + c_p\,T_{z_2}, \tag{16}$$

$$E_1 = g\,z + c_p\,T = g\,z_1 + c_p\,T_{z_1}. \tag{17}$$

Die Energie pro Masseneinheit ist ganz allgemein durch

$$E = g\,z + c_p\,T + \frac{u^2}{2} = g\,z + c_p\,\Theta\pi + \frac{u^2}{2} \tag{18}$$

gegeben, oder wenn wir die Enthalpie pro Masseneinheit ψ einführen,

$$E = \psi + \frac{u^2}{2}. \tag{19}$$

Die Änderung der Enthalpie mit der Höhe in der strömenden Luft kann auch als eine Änderung mit der potentiellen Temperatur ausgedrückt werden. Man findet dann

$$\dot{\psi} = g\,\dot{z} + c_p\,\Theta\,\dot{\pi} + c_p\,\pi, \tag{20}$$

oder, wegen der hydrostatischen Gleichung, die wie bekannt in der Form

$$g\,\dot{z} + c_p\,\Theta\,\dot{\pi} = 0 \tag{21}$$

geschrieben werden kann,

$$\dot{\psi} = c_p\,\pi. \tag{22}$$

Daraus folgt

$$\psi_2 - \psi_1 = c_p \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \pi\,d\Theta. \tag{23}$$

Um die Unveränderlichkeit von $\psi_2 - \psi_1$ zu berücksichtigen, brauchen wir einfach diese Größe, mit einem unbestimmten Faktor λ multipliziert, zu dem Ausdruck für J zu addieren und dann die Variation der Summe zu berechnen. Weil nun

$$\delta\pi = \varkappa\,\frac{p^{\varkappa-1}}{p_0{}^{\varkappa}}\,\delta p = \varkappa\cdot\frac{\pi}{p}\cdot\delta p, \tag{24}$$

sieht man sofort, daß

$$\delta\,[J + \lambda\,(\psi_2 - \psi_1)] = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \Big[c_p\,\varkappa\,\lambda\,\frac{\pi}{p} - (\varkappa - 1)\,\frac{\dot{p}}{g\,\varrho} - \\ - \frac{p\,\dot{\varrho}}{g\,\varrho^2} - \frac{1}{g}\,\frac{du^2}{d\Theta}\Big]\,\delta p\,d\Theta. \tag{25}$$

In diesem Ausdruck haben wir schon das Verschwinden von u_a und u_b berücksichtigt.

Wenn man jetzt die Definition von Θ mit der Zustandsgleichung kombiniert, findet man

$$p = \frac{R}{m}\,\varrho\,\Theta\cdot\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\varkappa} \tag{26}$$

und mithin

$$\frac{p\,\dot{\varrho}}{g\,\varrho^2} = \frac{p}{g\,\varrho}\left[(1-\varkappa)\,\frac{\dot{p}}{p} - \frac{1}{\Theta}\right]. \tag{27}$$

Daraus folgt

$$\delta\,[J + \lambda\,(\psi_2 - \psi_1)] = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2}\left[c_p \varkappa \lambda \frac{\pi}{p} - \frac{p}{g\varrho\Theta} - \frac{1}{g}\frac{du^2}{d\Theta}\right]\delta p\, d\Theta. \quad (28)$$

Damit ein Extremwert auftritt, muß mithin

$$\frac{du^2}{d\Theta} = \frac{p}{\varrho\,\Theta} - c_p\, g\, \varkappa\, \lambda \frac{\pi}{p}, \quad (29)$$

oder

$$\frac{du^2}{d\Theta} = \frac{R}{m}\pi\left(1 - \frac{g\lambda}{p}\right) = \frac{R}{m}\pi\left(1 - \frac{p_m}{p}\right) \quad (30)$$

sein. In dieser Gleichung ist $g\,\lambda$ durch eine neue Konstante p_m ausgedrückt. Diese Konstante p_m muß dazu benutzt werden, der Größe $c_p \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \pi\, d\Theta$ den richtigen Wert $\psi_2 - \psi_1$ zu geben. Es ist klar, daß p_m die Druckhöhe der besonderen Schicht angibt, in welcher die Windgeschwindigkeit ihren Maximalwert besitzt. In dem Falle, daß die Windstärke mit der Höhe konstant bleibt oder immer noch anwächst, wie es z. B. in einer nach oben begrenzten Atmosphäre möglich wäre, muß p_m verschwinden oder jedenfalls außerhalb der geschichteten Strömung fallen. Es ist dann sehr leicht, unser Hauptergebnis, den in (30) gegebenen Zusammenhang zwischen Temperatur- und Windverteilung, mit schon längst bekannten Resultaten in Verbindung zu bringen. Wenn wir z. B. annehmen, daß die ganze Atmosphäre aus zwei adiabatischen Luftmassen mit den potentiellen Temperaturen Θ_1 und Θ_2 besteht, von denen die untere ruht, die obere dagegen die Windgeschwindigkeit U besitzt, so kann der Zusammenhang zwischen Temperatur- und Windsprung an der Grenzfläche aus

$$du^2 = \frac{R}{m}\pi\, d\Theta \quad (31)$$

berechnet werden. Die Größe π ist an der Grenzfläche stetig; $d\Theta$ ist nur in dieser Fläche von Null verschieden. Es folgt mithin, daß

$$u^2 = \frac{R}{m}\pi\,(\Theta_2 - \Theta_1), \quad (32)$$

oder, wenn man beachtet, daß

$$\pi = \frac{\Theta_2}{T_2} = \frac{\Theta_1}{T_1}, \quad (33)$$

$$u^2 = \frac{R}{m}\,(T_2 - T_1). \quad (34)$$

Man kann sogar (30) oder (31) dazu benutzen, um die kritische Geschwindigkeit einer einfachen adiabatischen Atmosphäre zu berechnen, wenn nur die Vereinbarung getroffen wird, daß der Erdboden durch eine Luftmasse von unendlich großer Dichte, und deshalb sehr niedriger potentieller Temperatur ($\Theta \to 0$) ersetzt wird. Die so erhaltene kritische Geschwindigkeit ist mit der Newtonschen Schallgeschwindigkeit, d. h. mit der Geschwindigkeit von langen Schwerewellen, identisch. Wir können mithin sagen, daß das oben erhaltene Hauptergebnis als eine auf

stetig geschichtete Strömungen bezogene Erweiterung des Begriffs der kritischen Geschwindigkeit zu betrachten ist.

Um jetzt den Zusammenhang zwischen unseren theoretischen Ableitungen und der am Anfang dieser Arbeit erwähnten Frage zu erläutern, werden wir die Annahme machen, daß die zwei adiabatischen Schichten, die die Strömung begrenzen, nicht mehr bewegungslos sind, sondern daß sie sich anfänglich mit derselben Geschwindigkeit u_0 wie die dazwischenliegende stabile Schicht bewegen. Vom Boden stammende Reibungsverluste werden dann die Bewegung der untersten Luftmasse verzögern, aber mit Ausnahme einer dünnen Reibungsschicht wird sich die Geschwindigkeit in diesem homogenen Medium ziemlich schnell ausgleichen. Die obere Begrenzung dieser unteren homogenen Luftmasse muß dann ein wenig nach oben verschoben werden. Wenn aber nicht nur diese untere, sondern auch die obere adiabatische Schicht sehr tief liegt, kann man annehmen, daß ihre Geschwindigkeiten in erster Annäherung konstant bleiben. Unsere Aufgabe besteht nun darin, die kritische Wind- und Temperaturverteilung sowie die schließliche Dicke einer begrenzten, stabil geschichteten Strömung zu berechnen, die ursprünglich dieselbe Geschwindigkeit besitzt wie die umgebenden adiabatischen Schichten von zeitlich konstanter Bewegung.

Um diesen Endzustand zu berechnen, nehmen wir an, daß der Massentransport v von Θ unabhängig ist, so daß

$$\varrho\, u\, \dot{z} = -\frac{u\,\dot{p}}{g} = v = \text{Konstante.} \tag{35}$$

Im Anfangszustand soll die Strömung auf die Schicht $p_{b0} \geq p \geq p_{a0}$ begrenzt sein und die dazu gehörige potentielle Temperaturverteilung mag von p linear abhängen. Wegen der ursprünglich konstanten Windgeschwindigkeit u_0 erhält man somit

$$v = \frac{u_0}{g}\,\frac{p_{b0} - p_{a0}}{\Theta_2 - \Theta_1}. \tag{36}$$

Wenn man jetzt die zwei Gl. (30) und (35) miteinander kombiniert, kann nun z noch einmal als Vertikalkoordinate eingeführt werden und man findet nach einfachen Umrechnungen

$$\frac{du}{\varrho\, dz} = \frac{1}{2}\,\frac{R}{m\,v}\,\pi\left(1 - \frac{p_m}{p}\right), \tag{37}$$

oder, wenn z durch den Druck p ersetzt wird,

$$\frac{du}{dp} = -\frac{1}{2}\,\frac{R}{m\,g}\,\frac{\pi}{v}\left(1 - \frac{p_m}{p}\right). \tag{38}$$

An den neuen Grenzen der Strömung p_b und p_a müssen die Windgeschwindigkeiten den konstanten Wert u_0 erreichen. Daraus folgt zur Bestimmung von p_m

$$\int_{p_b}^{p_a}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\varkappa} dp = \frac{p_m}{p_0}\int_{p_b}^{p_a}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\varkappa - 1} dp. \tag{39}$$

Weiter hat man, nach (35), zur Berechnung der Temperaturverteilung,

$$\frac{d\Theta}{dp} = -\frac{u}{g\,v} \tag{40}$$

und speziell,

$$\Theta_2 - \Theta_1 = -\frac{1}{g\,v}\int_{p_b}^{p_a} u\,dp. \tag{41}$$

Um den Endzustand zu bestimmen, müssen wir die Konstanten p_b, p_a und p_m kennen, haben aber nur die zwei Gl. (39) und (41) zu unserer Verfügung. Diese Unbestimmtheit hängt damit zusammen, daß jeder der zwei angrenzenden Teile der Atmosphäre adiabatisch geschichtet und mithin vollständig homogen ist, so daß jede Luftmasse mit einer zwischen Θ_2 und Θ_1 gelegenen potentiellen Temperatur in allen Höhen im Gleichgewicht sein kann. Nun ist es aber aus der Kontinuitätsbedingung ohne weiteres ersichtlich, daß unsere Voraussetzung, daß u in den umgebenden Schichten konstant sein muß, nur dann richtig sein kann, wenn keine größeren vertikalen Verlagerungen des geschichteten Stromes stattfinden. Wir werden deshalb annehmen, daß die Höhe des Zentrums dieser Strömung unverändert bleibt. Um die Rechnungen so einfach wie möglich zu halten, werden wir jetzt eine neue Variable ε einführen, die durch

$$p = p_m\,(1 + \varepsilon) \tag{42}$$

definiert wird. Wir nehmen an, daß die von uns betrachtete Schicht so dünn ist, daß

$$\pi = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\varkappa} = \left(\frac{p_m}{p_0}\right)^{\varkappa}(1 + \varkappa\,\varepsilon). \tag{43}$$

Unter diesen Umständen kann mit Hilfe von (39) gezeigt werden, daß

$$p_m = \frac{p_b + p_a}{2} = \frac{p_{b0} + p_{a0}}{2}. \tag{44}$$

Daraus folgt, daß die Grenzen von ε ursprünglich durch $\pm\,\alpha_0$ und im Endstadium durch $\pm\,\alpha$ ausgedrückt werden können, wo

$$p_{b0} = p_m\,(1 + \alpha_0),\ p_{a0} = p_m\,(1 - \alpha_0) \tag{45}$$

und

$$p_b = p_m\,(1 + \alpha),\ p_a = p_m\,(1 - \alpha). \tag{46}$$

Mit diesen Bezeichnungen läßt sich die in (36) gegebene Größe v folgendermaßen schreiben:

$$v = \frac{2}{g}\,u_0\,\frac{p_m\,\alpha_0}{\Theta_2 - \Theta_1}. \tag{47}$$

Aus (38) folgt nun, wenn die Glieder höherer Ordnung in ε vernachlässigt werden,

$$\frac{du}{d\varepsilon} = -\frac{1}{2}\,\frac{R}{m\,g}\,\frac{p_m}{v}\left(\frac{p_m}{p_0}\right)^{\varkappa}\cdot\varepsilon \tag{48}$$

und mithin

$$u = u_0 + \frac{1}{4}\frac{R}{m\,g}\frac{p_m}{v}\left(\frac{p_m}{p_0}\right)^{\varkappa}(\alpha^2 - \varepsilon^2), \tag{49}$$

oder, mit Hilfe von (47),

$$u = u_0 + \frac{1}{8}\frac{R}{m}\frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\alpha_0\,u_0}\left(\frac{p_m}{p_0}\right)^{\varkappa}(\alpha^2 - \varepsilon^2). \tag{50}$$

Die Verteilung der potentiellen Temperatur folgt aus (40) und man findet

$$\Theta = \Theta_1 - \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{2\,\alpha_0}(\varepsilon - \alpha) - \frac{1}{16}\frac{R}{m}\left(\frac{p_m}{p_0}\right)^{\varkappa}\frac{(\Theta_2 - \Theta_1)^2}{{\alpha_0}^2\,{u_0}^2}\left[\alpha^2(\varepsilon - \alpha) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3}(\varepsilon^3 - \alpha^3)\right]. \tag{51}$$

An der oberen Grenze ($\varepsilon = -\alpha$) muß Θ den Wert Θ_2 erreichen. Mithin muß

$$1 = \frac{\alpha}{\alpha_0} + \frac{1}{24}\frac{R}{m}\left(\frac{p_m}{p_0}\right)^{\varkappa}\cdot\frac{2\,\alpha_0(\Theta_2 - \Theta_1)}{{u_0}^2}\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^3 \tag{52}$$

sein. Es ist aus dieser Gleichung sofort ersichtlich, daß $\frac{\alpha}{\alpha_0}$ immer kleiner als 1 sein muß. *Die geschichtete Strömung muß also im Schlußzustand immer schmäler sein als im Anfangsstadium und ein Vorauseilen dieser Schicht muß daher immer auftreten.* Die Anpassung an das Endstadium muß somit gewissermaßen zur Ausbildung eines *Freistrahls* (*Jet Stream*) führen.

Wir müssen nun die dimensionslose Größe

$$\frac{1}{F} = \frac{R}{m}\left(\frac{p_m}{p_0}\right)^{\varkappa}\cdot\frac{2\,\alpha_0(\Theta_2 - \Theta_1)}{{u_0}^2} \tag{53}$$

näher untersuchen. Wenn wir systematisch die Werte der Zustandsgrößen in der Druckhöhe p_m mit einem m kennzeichnen, kann man F in der folgenden Form umschreiben:

$$\frac{1}{F} = \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\Theta_m}\frac{2\,\alpha_0\,p_m}{\varrho_m}\frac{1}{{u_0}^2}. \tag{54}$$

Nun ist aber $2\,\alpha_0\,p_m$ der ursprüngliche Druckunterschied zwischen den Begrenzungsflächen des geschichteten Stromes. Wenn diese Größe durch die mittlere Dichte ϱ_m dividiert wird, erhält man offenbar einen mit g multiplizierten Annäherungswert D_0 der anfänglichen geometrischen Tiefe des geschichteten Stromes, also $g\,D_0$. Mithin läßt sich F auch in der Form

$$\frac{1}{F} = \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\Theta_2}\frac{g\,D_0}{{u_0}^2} = \frac{\gamma\,D_0}{{u_0}^2} \tag{55}$$

schreiben, wo

$$\gamma = g\frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\Theta_m}. \tag{56}$$

F ist somit die charakteristische Froudezahl des Anfangszustandes.

Wenn wir jetzt F in unsere Gleichungen systematisch einführen, finden wir aus (52)

$$1 = \frac{\alpha}{\alpha_0} + \frac{1}{24\,F}\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^3, \tag{57}$$

aus (50)

$$\frac{u - u_0}{u_0} = \frac{1}{16\,F}\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2}\right] = \frac{3}{2}\,\frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2}\right), \tag{58}$$

und aus (51)

$$\frac{\Theta - \Theta_1}{\Theta_2 - \Theta_1} = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{\alpha_0}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}\right) + \frac{1}{32\,F}\,\frac{\alpha^3}{{\alpha_0}^3}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\,\frac{\varepsilon}{\alpha} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3}\,\frac{\varepsilon^3}{\alpha^3}\right], \tag{59}$$

oder

$$\frac{\Theta - \Theta_1}{\Theta_2 - \Theta_1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\left[\frac{\alpha}{\alpha_0} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_0}\right)\left(2 - \frac{\varepsilon}{\alpha} - \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2}\right)\right]. \tag{60}$$

Das maximale Vorauseilen läßt sich mit Hilfe von (58) ausrechnen, und man findet

$$\frac{u_m - u_0}{u_0} = \frac{3}{2}\,\frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha}. \tag{61}$$

Um eine Vorstellung von der Größe dieses Vorauseilens zu gewinnen, können wir jetzt einige passend gewählte zusammengehörende Zahlenwerte einsetzen. Man sieht aus (57), daß mit einer Froudezahl von 9/128 die Größe $\frac{\alpha}{\alpha_0}$ den Wert 3/4 annimmt. Daraus erhält man sofort

$$u_m = 1{,}5\,u_0.$$

Den oben angenommenen Wert von F würde man erhalten, wenn man eine stabile Strömung betrachtet, in welcher die folgenden anfänglichen Zahlenwerte gelten:

$$D_0 = 8{,}064\text{ km},\quad u_0 = 27\ m\ p\ s,$$
$$\Theta_2 - \Theta_1 = 45°,\quad \Theta_m = 350°.$$

Diese Strömung wird sich nach dem, was oben gesagt worden ist, unter dem Einfluß von Reibungsverlusten so entwickeln, daß allmählich eine maximale Windgeschwindigkeit von 44 m/s auftritt; gleichzeitig erfährt die Strömung eine vertikale Schrumpfung bis zu einer Tiefe von 6 km. Diese Resultate sind in Abb. 5 graphisch dargestellt. Die aerologischen Beobachtungen zeigen, daß in der oberen Atmosphäre das Vorauseilen eines Freistrahles tatsächlich noch bedeutend stärker sein kann, als oben berechnet wurde.

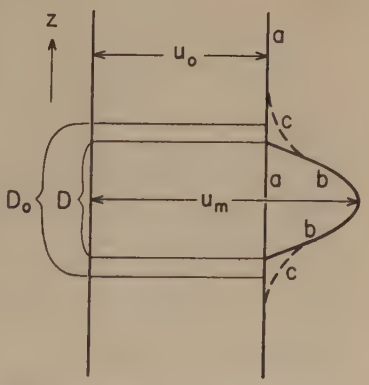


Abb. 5. Ausbildung eines Freistrahls aus einer anfänglich gleichmäßigen Strömung. Die ursprüngliche Geschwindigkeitsverteilung ist durch *a* gegeben, der Endzustand dagegen durch *b*. Die mitgerissene Strömung ist durch *c* angedeutet. Die stabile Schicht schrumpft während der Entwicklung des Freistrahles von der Dicke D_0 zur Dicke D.

Diese zusätzliche Vergrößerung der Windstärke ist wahrscheinlich auf ein horizontales Zusammenfließen der Strömung zurückzuführen und kann hier nicht erörtert werden.

Um die Windgeschwindigkeit in der Stromrichtung in der oben entwickelten Weise zu erhöhen, muß in der Mitte des Stromes ein Druckgefälle in der Stromrichtung vorhanden sein, und es muß mithin der dadurch geschaffene Freistrahl eine begrenzte Länge besitzen. Einen Kleinstwert dieses Druckgefälles kann man ohne weiteres aus der Bernoullischen Gleichung berechnen. In der Atmosphäre müssen weiterhin solche Freistrahlen wegen der mit der Geschwindigkeitszunahme verbundenen vertikalen Schrumpfung und horizontalen Ausdehnung der strömenden Luftmasse auch eine markierte antizyklonale Umbiegungstendenz aufweisen. Auf diese können wir jedoch an dieser Stelle nicht näher eingehen.

Wenn nun die oben berechnete Geschwindigkeitskurve mit typischen Beispielen von Freistrahlen in der oberen Troposphäre (Abb. 2) verglichen wird, fällt es sofort auf, daß die letzteren viel schärfer sind als die von uns abgeleitete Verteilung; in extremen Fällen scheint die vertikale Zunahme der Windgeschwindigkeit im Zentrum des Freistrahles fast sprunghaft von seinem größten positiven Wert zu seinem größten negativen Wert abzufallen. Dabei ist natürlich zu beachten, daß die beobachtete Vertikalverteilung wegen der großen Höhenabstände zwischen den gemessenen Windgeschwindigkeiten nicht genügend genau bestimmt ist, um die Details festzulegen. Weiterhin muß die theoretisch abgeleitete Windverteilung in einem völlig ausgebildeten Freistrahl in hohem Grade von der anfänglichen Verteilung des Massentransportes abhängen. Durch eine passende Abänderung des Massentransportes wäre es zweifellos möglich, einen schärferen Freistrahl abzuleiten. Anderseits folgt aus den theoretischen Ausführungen, daß ein stetiger Anfangszustand immer zu einem stetigen Endzustand führt.

Um nun die von der oben gegebenen Theorie anscheinend abweichenden Beobachtungen zu erklären, kann man vielleicht die von L. F. RICHARDSON zuerst eingeführten, auf turbulente Bewegungen in geschichteten Strömungen bezogenen Gesichtspunkte benutzen. Danach besitzt die dimensionslose Zahl

$$R^* = \frac{g}{\Theta}\frac{d\Theta}{dz}\Big/\left(\frac{du}{dz}\right)^2 \qquad (62$$

einen bestimmten kritischen Wert R_k^* von der Art, daß Strömungen deren R^*-Werte kleiner als R_k^* sind, mit zunehmenden Turbulenzbewegungen verbunden sein müssen. Solche Strömungen werden mithin eine allmähliche Vernichtung ihrer Schichtung erfahren. Der numerische Wert von R_k^* wird verschieden hoch geschätzt, scheint aber etwa zwischen $^1/_4$ und 1 zu liegen.

Wir haben früher festgestellt, daß die in (30) gegebene Verbindung zwischen Temperatur- und Windgeschwindigkeitsverteilung die Eigenschaft besitzt, daß in jeder diese Bedingung erfüllenden Strömung de

Impulsstrom seinen kleinsten Wert erreicht hat. Daraus folgt aber, daß solche Strömungen eine spezielle Stabilität besitzen müssen und mithin bevorzugt sind, da jede mit invariantem Massentransport verbundene Änderung der Geschwindigkeitsverteilung notwendig zusätzliche Kräfte in der Bewegungsrichtung erfordert und daher vermieden wird.

Wir fragen jetzt nach der mit dieser Stabilitätsbedingung verträglichen größten Scherbewegung, die die Schichtung ungestört läßt. Um diese Frage zu beantworten, müssen wir die Richardsonsche Bedingung

$$\frac{g}{\Theta}\frac{d\Theta}{dz} = R_k^* \left(\frac{du}{dz}\right)^2 \tag{63}$$

mit der von uns abgeleiteten Gl. (30) verbinden. Wir nehmen an, daß in einer bestimmten Höhe H, wo der Druck den Wert p_H besitzt, eine bestimmte maximale Windgeschwindigkeit u_H herrscht und fragen nach der mit maximaler Scherbewegung verträglichen Geschwindigkeitsverteilung, die in unserem oben angedeuteten Sinne stabil ist, also ein Minimum des Impulstransportes besitzt. Es müssen dann simultan die zwei Bedingungen (30) und (63) erfüllt sein. Aus (63) erhält man

$$\frac{g}{\Theta}\frac{d\Theta}{dp} = -g\varrho R_k^* \left(\frac{du}{dp}\right)^2 \tag{64}$$

oder

$$\frac{R}{m}\pi\, d\Theta = -R_k^*\, p \left(\frac{du}{dp}\right)^2 dp, \tag{65}$$

und aus (30),

$$p\, du^2 = \frac{R}{m}\pi\,(p - p_m)\, d\Theta. \tag{66}$$

Wir betrachten zuerst die Verhältnisse unterhalb p_H. Der Druck p_m kann nicht ohne weiteres gleich p_H gesetzt werden, denn wir müssen jetzt die Möglichkeit offenhalten, daß in der Höhe H die Scherbewegung in einer unstetigen Weise von einem positiven zu einem negativen Wert übergeht. Aus (65) und (66) erhält man sofort

$$\frac{du}{u} = -\frac{2}{R_k^*}\frac{dp}{p - p_m} \tag{67}$$

und nach Integration

$$u = \frac{u_H\,(p_H - p_m)^{2/R_k^*}}{(p - p_m)^{2/R_k^*}}. \tag{68}$$

Es muß mithin die Windgeschwindigkeit schnell nach unten abnehmen, um so schneller, je kleiner die kritische Richardsonsche Zahl R_k^* ist. Es folgt aus (68), daß auch die Scherbewegung mit zunehmendem Druck abnimmt. Die potentielle Temperatur muß mithin in genügend großem Abstande abwärts von H allmählich einen konstanten Wert Θ_0 erreichen.

Um nun p_m zu bestimmen, werden wir folgendermaßen verfahren. Wir wissen, daß die Enthalpie in der Höhe H durch

$$\psi_H = c_p T_H + gH \tag{69}$$

gegeben ist und daß sie unten, in großen Abständen von H, den Wert

$$\psi_0 = c_p T_0 \tag{70}$$

besitzt, wo T_0 die Lufttemperatur ist, die die untere adiabatische Schicht am Boden haben würde. Mithin muß nach (23) und (65)

$$c_p \int_{\Theta_U}^{\Theta_H} \pi \, d\Theta = -\frac{m c_p}{R} R_k^* \int_{p_{\text{Boden}}}^{p_H} p \left(\frac{du}{dp}\right)^2 dp = \psi_H - \psi_0 \tag{71}$$

sein. Wegen des schnellen Verschwindens der Windgeschwindigkeit nach unten kann die untere Integrationsgrenze p_{Boden} als unendlich groß genommen werden und man erhält dann nach einfachen Rechnungen

$$\psi_H - \psi_0 = \frac{m c_p}{R} u_H^2 \frac{p_H}{p_H - p_m} \tag{72}$$

oder

$$g H - c_p (T_0 - T_H) = \frac{m c_p}{R} u_H^2 \frac{p_H}{p_H - p_m}. \tag{73}$$

Wenn wir jetzt dem Bodendruck den Wert p_0 geben, können wir T_0 durch die potentielle Temperatur Θ_0 der unteren adiabatischen Schicht ersetzen. Die Größe $g H + c_p T_H$ ist mit guter Annäherung gleich $c_p \Theta_H$ der potentiellen Temperatur im Zentrum des Freistrahles. Mithin erhält man aus (73)

$$\frac{R}{m} (\Theta_H - \Theta_0) = u_H^2 \frac{p_H}{p_H - p_m}. \tag{74}$$

Wegen des schnellen Abfalles der Windgeschwindigkeit nach unten brauchen wir natürlich nicht anzunehmen, daß die untere adiabatische Schicht sich tatsächlich über die ganze Strecke bis zum Erdboden erstreckt.

Um die Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung weiterzuführen, nehmen wir jetzt an, daß im Mittelpunkt des Freistrahles (H) die Stabilität stetig bleibt, daß aber die Scherbewegung von einem positiven zu einem negativen Wert springt. Aus (63) findet man nach einigen Umformungen

$$-\frac{R}{m c_p} R_k^{*-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\sigma_H}{\sigma_0}\right)^{\frac{1}{2}} (c_p T_H)^{\frac{1}{2}} = -\left(p \frac{du}{dp}\right)_H \tag{75}$$

und mit Hilfe von (68)

$$u_H \frac{p_H}{p_H - p_m} = \frac{1}{2} \frac{R}{m c_p} R_k^{*\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\sigma_H}{\sigma_0}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (c_p T_H)^{\frac{1}{2}}. \tag{76}$$

In (75) und (76) haben wir das adiabatische Temperaturgefälle $\frac{g}{c_p}$ mit σ_0 und das in der Höhe H herrschende mit σ_H bezeichnet. Mit Hilfe von (74) und (76) können zwei von den unbekannten Konstanten bestimmt

werden. Um p_m zu bestimmen, kombinieren wir die zwei Gleichungen und erhalten nach einigen Umrechnungen

$$\frac{\Theta_H - \Theta_0}{p_H - p_m} = \frac{1}{4}\frac{R}{m c_p} R_k^* \frac{T_H}{p_H}\left(1 - \frac{\sigma_H}{\sigma_0}\right) \tag{77}$$

oder, wenn wir die numerischen Werte

$$T_H = 220° K,\ p_H = 200 \text{ mb}$$

einführen,

$$\frac{\Theta_H - \Theta_0}{p_H - p_m} = 0{,}079\ R_k^*\left(1 - \frac{\sigma_H}{\sigma_0}\right). \tag{78}$$

Um numerisch rechnen zu können, werden wir jetzt für R_k^* den Wert 1 einführen und werden weiterhin annehmen, daß die Schwerestabilität im Zentrum H durch vertikale Isothermie gekennzeichnet ist, so daß σ_H gleich Null gesetzt werden kann. Man findet dann

$$\Theta_h - \Theta_0 = 0{,}079\ (p_H - p_m).$$

Daraus folgt, daß wenn $\Theta_H - \Theta_0$ den Wert 15,8° K besitzt, die Konstante p_m gleich Null sein muß.

Um nun die Geschwindigkeitsverteilung an der oberen Seite des Freistrahles zu berechnen, werden wir von der früher erwähnten Annahme, daß die Schwerestabilität im Zentrum des Stromes stetig ist, Gebrauch machen. Mithin muß in dieser Höhe $-\frac{du}{dp}$ von einem positiven zu einem negativen Wert von derselben absoluten Größe gehen. Die Konstante p_m muß oberhalb H durch eine andere p_r ersetzt werden, und man sieht sofort, daß $p_r > p_H$ sein muß. Wenn wir jetzt die Integration von (63) und (66) durchführen, erhalten wir

$$u = \frac{u_H\,(p_r - p_H)^{2/R_k^*}}{(p_r - p)^{2/R_k^*}}, \tag{79}$$

und aus der Bedingung, daß $\frac{du}{dp}$ in der Höhe H ohne Änderung der absoluten Größe sein Vorzeichen wechseln muß,

$$\frac{1}{2}(p_r + p_m) = p_H. \tag{80}$$

Wenn wir, wie oben, der Einfachheit halber

$$p_m = 0,\ R_k^* = 1$$

setzen, folgt daraus, daß

$$p_r = 2\,p_H$$

sein muß, und mithin

$$u = \frac{u_H \cdot p_H^2}{(2\,p_H - p)^2}.$$

Nach diesem Ausdruck fällt die Windgeschwindigkeit in großen Höhen allmählich auf den Wert $\frac{u_H}{4}$. Die potentielle Temperaturverteilung

läßt sich mit Hilfe von (65) berechnen. Man findet in derselben Weise wie früher

$$c_p \int_{\Theta_H}^{\Theta_\infty} \pi \, d\Theta = R_K^* \cdot \frac{m c_p}{R} \int_U^{p_H} p \left(\frac{du}{dp}\right)^2 dp = \psi_\infty - \psi_H \approx c_p (\Theta_\infty - \Theta_H),$$

wo jetzt Θ_∞ die asymptotische potentielle Temperatur in großem Ab-

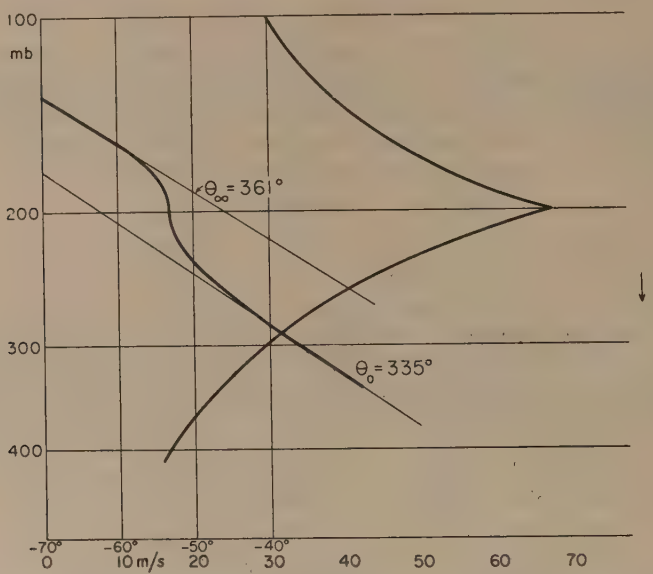


Abb. 6. Theoretische Vertikalverteilung der Windgeschwindigkeit und der potentiellen Temperatur in einem Freistrahl von maximaler Scherbewegung.

stande oberhalb des Freistrahles bezeichnet. Mit den oben eingeführten Werten von R_k^* und p_r erhält man aus dieser Gleichung

$$u_H^2 = 0{,}45 \, c_p \, (\Theta_\infty - \Theta_H).$$

Um nun ein numerisches Beispiel graphisch darstellen zu können greifen wir auf (76) zurück und finden dann nach Einführung der verschiedenen, oben gemachten Zahlenannahmen

$$u_H = \frac{1}{2} \frac{R}{m c_p} \sqrt{c_p T_H} = 67{,}4 \, m/s.$$

Daraus läßt sich der numerische Wert von $\Theta_\infty - \Theta_H$ zu 10,1° K berechnen.

In Abb. 6 ist die oben abgeleitete theoretische Windverteilung graphisch dargestellt und die dazugehörige Temperaturverteilung angedeutet. Eine genaue Prüfung dieser Ergebnisse kann nur unter der Bedingung vorgenommen werden, daß zuverlässige gleichzeitige Messungen der Stabilitäts-

verteilung und der Scherbewegungen in Freistrahlen zu unserer Verfügung stehen.

Literaturverzeichnis.

1. Craya, A.: Critical Regimes of Flows with Density Stratification. Tellus, **3**, 28 (1951).
2. Ertel, H.: Methoden und Probleme der dynamischen Meteorologie. Berlin, J. Springer, 1938.
3. Goldstein, S.: Modern developments in fluid mechanics. Oxford University Press, 2 vols. (1938).
4. Rossby, C. G.: On the vertical and horizontal concentration of momentum in air and ocean currents. Part I. Introductory comments and basic principles, with particular reference to the vertical concentration of momentum in ocean currents. Tellus, **3**, 15 (1951).
5. Stommel, H.: Entrainment of air into a cumulus cloud. J. Meteor., **4**, 91 (1947).
6. Tollmien, W.: Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge. Z. f. Angewandte Math. u. Mech., **6**, 468 (1926).

551.511

(Meteorological Service of Canada, Toronto.)

The Philosophy of the Chicago School of Meteorology*

By

D. P. McIntyre.

Summary. The effect of philosophical thought on scientific achievement is briefly discussed. Through a study of the types of problems investigated and the methods employed by the Chicago School of meteorology an attempt is made to isolate its philosophy. In the light of these results certain concepts favoured by the Chicago School such as energy transmission, horizontal mixing, and indirect circulations, are discussed.

Zusammenfassung. Die Auswirkung einer auf die Grundvorstellungen zurückgehenden Denkweise auf den wissenschaftlichen Fortschritt wird kurz diskutiert. Durch eine Untersuchung über die von der Chicagoer Meteorologen-schule in Angriff genommenen Problemstellungen und über die von ihr angewandten Methoden wird der Versuch gemacht, ihre Grundanschauungen herauszuschälen. Im Lichte dieser Ergebnisse werden bestimmte, von der Chicago-Schule bevorzugt behandelte Begriffe wie Energieübertragung, horizontaler Austausch und indirekte Zirkulation diskutiert.

Résumé. Brève discussion d'une philosophie des notions fondamentales et de son influence sur le progrès scientifique. Par une étude de la problématique à laquelle s'applique l'école météorologique de Chicago et de ses méthodes, on tente de dégager ses fondements. A la lumière de ces résultats certaines notions adoptées par l'école de Chicago telles que la transmission de l'énergie, l'échange turbulent horizontal et la circulation indirecte sont soumises à une discussion.

1. Introduction.

All great achievements in human history have been associated with some basic belief or philosophy. In particular, scientific development appears to follow a pattern in which successive philosophies arise and are exploited in both theory and practice. Under the impact of a new philosophy problems may yield with ease which had previously resisted all efforts. Solutions were impossible only because of the fetters placed on thought

* Published by the permission of the Controller, Meteorological Service of Canada.

by old philosophies. One such philosophy has been the motivating force behind the great work of the *Department of Meteorology of the University of Chicago.*

New philosophies are often bitterly opposed in some quarters because they imply concepts which are at variance with certain previously accepted ideas. Controversial ideas are always contained in new philosophies. Otherwise they would differ but little from previous schools of thought and hence would fail to explain any phenomena not already adequately accounted for. It is therefore valuable to understand the motivation for newer schools of thought.

Meteorology is a new science. Yet it has already felt the impact of a number of philosophies. The famous *Vienna School* ushered in the modern development of meteorological science. The *Norwegian School* philosophy was responsible for a great development in meteorology in the second quarter of this century. The philosophy of the *Chicago School* of thought in meteorology is behind a new wave of exploitation which is just now at its crest.

Since each philosophy presents a scheme of logic for the explanation of certain physical truths each is recognizable by the type of problem it attacks and by the methods it utilizes. Thus through a study of the problems and methods of the Chicago School an attempt will be made to clarify the nature of its philosophy. While this paper will make no attempt at a comprehensive discussion of the Chicago researches, it is hoped that it will aid other meteorologists in understanding the motives which underlie the Chicago School theories.

2. Nature of the Problem.

A scientific philosophy may be recognized, in part, by the nature of the problems it attacks. A perusal of the published researches of the Chicago School reveals that it deals mainly with large scale features of the atmosphere which are, for the most part, important aspects of the general circulation [*9*].

While the basic problem of heat exchange between low and high latitudes is certainly considered, it is not in this field that major advances have been registered. Rather it is in the handling of large scale flow of air that its power is revealed. Problems on the motion, structure, cause, and dynamics of such major currents as the westerlies of middle latitudes and the deep easterlies of the tropics provide the bulk of the grist for the Chicago School mills. To state the matter in different words it is the treatment of hydrodynamical problems and the transfer of kinetic energy which appeals to the Chicago School. Noticeably lacking in its literature are studies of pressure systems and motions which are the direct result of differential heating.

To gain a further insight into the philosophy of the school it is necessary for us now to study its method of attack on these problems and to determine in what way this differs from the approaches previously employed.

3. Method of Attack.

In the dynamics of the atmosphere the elements which are mos important to the meteorologist are *wind* and *pressure*. Although th fields of wind and pressure are closely related it is problematical whic of the two is of primary dynamic importance, since if one is altered the will be a corresponding change in the other. Over many years our systen of synoptic analysis have placed great emphasis on pressure. Low pressu systems are associated with frontal waves and certain weather pattern High pressure systems are associated with other phenomena. When w forecast we think first of what is going to happen to the pressure fiel Pressure pattern philosophy has permeated our thought processes to surprising extent and governs not only our practical work but most our theoretical thinking as well. This type of reasoning has become well established in meteorology that many meteorologists believe th no other approach is valid.

According to Rossby, founder of the Chicago School, problem involving large scale air motion in the atmosphere are fundamentall *hydrodynamical* in nature. Thus one should focus one's attention on a motion and leave the pressure to adjust itself to the air trajectorie He argues that study of pressure development is essentially hydrostat thinking and too confined in scope. This is the basis of the Chicag School approach to atmospheric dynamics in which we first determi the development of air movement and the pressure distribution is obtain as a by-product. This concept led Rossby to publish his famous pap on the mutual adjustment of pressure and velocity distributions certain current systems [*5*].

The tendency for investigation of wind behaviour rather than pressu change is manifested in nearly all Chicago School papers. Very oft the concept of *vorticity* is introduced because it is a function of the wi field. Consideration of the motion of air has freed the Chicago Scho researchers from bonds which seriously restricted earlier workers in th field. It has also led to certain misunderstandings of the Chicago metho Take, for example, the concept of divergence. One cannot conceive of pressure system moving in a field in which convergence and divergen are absent in all layers. Lack of convergence and divergence does n however, so seriously restrict the motion of wind fields.

A good example of the two methods of attack, the pressure syste approach vs. the wind field approach, has been afforded in the ca of long waves. About a decade ago Rossby [*6*] introduced the conce of Long Waves in the Westerlies into meteorological thought and practi The long waves to which we refer here are those which are often fou in the westerly current at high altitudes with wave lengths from 6 to 120° of longitude. In particular, he developed a theory for the moti of such systems. It is noteworthy that he made no mention of the pressu field in his discussion of this phenomenon. The type of wave moti postulated by Rossby to explain the observed patterns was that due

inertia motion of parcels of air travelling under conservation of absolute vorticity.

In Rossby's derivation of the phase velocity of the long waves he made certain simplifying assumptions. The two most important and most controversial of these were the assumption of no divergence and the assumption of a barotropic atmosphere. Under the old-style attack on the problem in which the motion of a pressure system was studied such assumptions could not be made since they would be so restrictive that motion of the systems would not be possible. To Rossby, employing the hydrodynamical approach, *divergence* and *baroclinity* were merely complicating factors. Fields of divergence or convergence only serve to distort the field of motion of the air by creating or destroying vorticity. These effects can always be considered as special cases but the ideal wave is found when they are absent. Similarly the existence of a solenoidal field in no way contributes to the type of motion under consideration which is essentially an inertia oscillation. Rossby therefore ignored it and assumed a barotropic atmosphere. By these basic assumptions, therefore, Rossby stripped the problem of its complicating features and derived the simple phase velocity equation in the form

$$C = U - \frac{\beta L^2}{4\pi^2} \qquad (1)$$

where C is the velocity of the wave, U is the velocity of the undisturbed current, L is the wave length, and β is the rate of change of the coriolis parameter with distance, northward.

Rossby has been criticized for being too naïve in his approach to the problem and for studying a wave which cannot move because of the rigorous restrictions imposed on it by the assumptions of non-divergence and barotropy. Such arguments show a lack of appreciation of the advantages of the method. According to Chicago School philosophy the wind system will be propagated according to equation (1). It will, of course, very soon become out of phase with the corresponding pressure system and a re-adjustment must then take place in the latter to conform to the new wind system. During this secondary motion required for re-adjustment there must develop local divergence fields and probably also baroclinity (unless the atmosphere happens to be autobarotropic). Such motions will be superimposed on the general air motion but will be minor in nature and almost undetectable.

Now let us consider the method of attack on a very similar problem as developed by the Norwegian school meteorologists, Bjerknes and Holmboe [*1*]. They began their investigation by defining the pressure pattern for a system of waves in the westerlies. The gradient wind corresponding to the pattern was then used to determine the convergence and divergence. The use of the geostrophic wind would have given too coarse an approximation to permit a computation of the divergence pattern. By consideration of the rates at which air was being removed or added to columns above various portions of the level in question it was

possible for Bjerknes and Holmboe to derive a phase velocity for the waves in the pressure system defined in their problem.

Since Rossby was considering waves in a wind system and Bjerknes and Holmboe were considering waves in a pressure system, and because other fundamentally different assumptions were made in the two approaches, one would not expect the phase velocities derived by these methods to be identical. They are, however, very similar. For the purpose of this discussion the formal results of the studies are unimportant. What is important is that we have in these two papers a perfect illustration of the two methods of attack, the hydrodynamical approach of the Chicago School and the pressure pattern approach of the Norwegian school.

Actually the Chicago type of reasoning may be found in isolated instances throughout the meteorological literature. A classic example of its use is given by Exner [*3*] in his study of the moving vortex. To describe the velocity field in terms of pressure for such a problem would be indeed difficult. Exner was, however, able to derive a solution by assuming a streamline field in which a circular motion is superimposed on a uniform straight motion. On this basis Exner showed that the pressure field corresponding to the postulated motion could be derived in terms of the wind field. The Chicago School of meteorology has adopted this approach and has developed it into a basic method of attack on meteorological problems involving air flow.

In conclusion we summarize the fundamentals of the two methods. In the classical approach a suitable pressure field is first postulated. The corresponding wind field is then determined from the balance of forces. The resulting fields of convergence and divergence are then used to study the motion of the pressure system. It is assumed that the wind field re-adjusts itself to the moving pressure system as it progresses. The Chicago School begins by postulating a suitable wind field. With the help of certain simplifying restrictions such as non-divergence, barotropy, etc., the motion of the wind field is determined. It is then assumed that the pressure field will re-adjust itself to the moving wind field. These approaches have been described in rather general terms only and must be altered to meet the variety of individual problems on which they are brought to bear. If one bears this sequence of events in mind, however, one can readily understand the motivating thought behind the works of either school.

4. Some Concepts Introduced by the Chicago School.

From the preceeding discussion of the nature of the problems investigated by the Chicago School and of the method of attack on these problems it must be expected that the theoretical work of the school will deal largely with wind. A glance at the record proves that this is so and the theories which have been produced are mainly concerned with the means of distributing kinetic energy and with the phenomena which naturally

result from such distributions. A few of the major concepts of this type will be discussed here in an effort to show how they fit into the Chicago line of thought.

a) Group Velocity.

The concept of *group velocity* is one which might be expected to make its appearance into meteorological literature through the agency of the Chicago School. This theory was introduced by ROSSBY [7] as a contribution to long wave theory designed to extend our knowledge of the physics of atmospheric wave motion a step beyond the simple phase velocity of wave propagation. ROSSBY reasoned that, in general, in such wave systems kinetic energy is propagated at a speed which differs from the phase velocity.

On this basis ROSSBY developed a theory which showed that kinetic energy in atmospheric long waves should be propagated at the group velocity. According to his development the group velocity is greater than either the phase velocity or the velocity of the air current. Because of this fact new waves will continually be generated ahead of the initial wave train. Thus ROSSBY has shown that when a re-adjustement of the long wave pattern takes place, as a result of an injection of energy into the system at a certain point, the speed at which the new pattern is set up downstream is much faster than the motion of the waves themselves.

It is difficult to see how a concept such as this could have been derived from a consideration of waves as manifested by the pressure pattern. It is, however, a natural problem for consideration by the Chicago School since wind and kinetic energy are closely related.

b) Horizontal Mixing.

Horizontal mixing is a concept which has considerable prominence in Chicago School literature. Concentrating, as it does, on air motion as a primary consideration, the Chicago School must sometimes look around for means for producing motion in the region under study. Since its sights are fixed on hydrodynamic processes and its problems are hydrodynamical in nature, it seldom looks to solenoidally driven circulations for its energy sources. In the idea of horizontal mixing the Chicago School holds a tool with which energy may be transferred from one locality to another. Study in such problems is generally confined to the locality in which the energy is introduced. Only the Chicago School type of thinking requires the concept of horizontal mixing. Those schools of thought which deal primarily with pressure patterns will naturally look for other factors, such as differential heating, for the alteration of the pattern.

There is no more interesting example of the use of this concept than ROSSBY's Vorticity Mixing Theory [8] for the explanation of the *Jet Stream*. The Jet Stream appears as a sharply defined west-wind maximum at the tropopause level of middle latitudes suggestive of a meandering

river flowing around the earth. The physical explanation of this phenomenon has led to much speculation over the past few years. The theory developed by Rossby depends on the process of horizontal mixing.

In any mixing process some conservative property of the atmosphere is equalized. In this case the conservative property considered is the vertical component of absolute vorticity. This component may be considered to be composed of two parts, the vorticity due to the earth's rotation and the vorticity relative to the earth. The portion due to the earth's rotation increases northward. Therefore if the absolute vorticity is equalized by the mixing process the relative vorticity will have to decrease northward, probably running from positive values in the south to negative values in the north. The positive values, representing cyclonic vorticity, will reach a maximum at the southern edge of the region of mixing. Because of the axial symmetry of the process, the positive relative vorticity must appear in the form of cyclonic wind shear, not as curvature, so that a west wind maximum appears at the southern edge of the mixed region.

This theory incorporates the basic concepts of wind (in the form of vorticity) and of mixing, which are typical of Chicago School thought. In this case there is much a priori justification for the theory since it is apparent that some major dynamical effect is necessary to account for the concentration of so much kinetic energy in so narrow a region. It is difficult to see how any of the conventional mechanisms such as solenoidal circulations can explain this phenomenon. However, our main point is that, regardless of its validity, the *Vorticity Mixing Theory* is a typical Chicago School product.

c) Indirect Circulations.

Throughout the Chicago literature there is an emphasis on *indirect circulations*. Typical examples may be found in the works of Cressman [2] and of Riehl [4]. These are circulations in which solenoids are created at the expense of kinetic energy. Before the appearance of the Chicago School papers of the last decade or so nearly all circulations discussed in the literature were of the solenoidally driven, or direct, type. It is interesting to enquire into the way in which the Chicago philosophy lead to the idea of the indirect type of circulation.

Consider the Bjerknes's circulation theorem in the form

$$\frac{dC}{dt} = -\oint \frac{dp}{\varrho} - 2\omega \frac{d\Sigma}{dt}. \qquad (2$$

The left hand side of this equation represents the rate of change of circulation, the so-called circulation acceleration. The first term on the right gives the number of solenoids enclosed by the curve over which the integration is performed. The second term on the right includes a factor for the angular velocity of the earth's rotation and one for the rate of change of the projection of the same area on the equatorial plane

In general the two terms on the right have opposite signs and the sign of the circulation acceleration is determined by the term which has the greatest absolute value.

In applying this theorem to vertical cross sections of the atmosphere earlier writers have always assumed that differential heating leads to a dominant solenoidal field and hence to a direct circulation. In the Chicago School work emphasis has been laid on the redistribution of wind by various means so that the rotational term of the circulation theorem is the one which comes under scrutiny. For example, in the case of transfer of kinetic energy downstream at the group velocity the old balance of forces is destroyed by the resulting increase in wind speed. If this energy is transferred at tropopause level then the rotational term will increase in absolute value and a circulation controlled by this term will result. A similar situation arises in the creation of the jet stream. On the assumption that ROSSBY's Vorticity Mixing Theory is correct then solenoids must be created above and below the jet stream to balance the vertical wind shear and this is accomplished through the agency of an indirect circulation. The belief in the dominance of indirect circulations in relation to the jet streams has inspired certain synoptic researches on the relationship of rainfall to the jet stream. Those of STARRETT [*10*] and of YEH and collaborators [*11*] seem to indicate a statistical preference for heavier precipitation to the north of the jet. The inference is that air must rise to the north of the jet stream in accordance with the idea of an indirect circulation.

5. Conclusions.

In the opinion of this writer the Chicago School has performed a great service for meteorology, not only through its investigations but also by opening up new avenues of attack for meteorological research through its refreshing philosophy. One may not agree with many of the theories produced by the school but it cannot be denied that the hydrodynamical approach, so long neglected in meteorology, is a valuable and powerful tool which is now being used with great effect and has already been responsible for a considerable advance in meteorological science.

References.

1. BJERKNES, J. and J. HOLMBOE: On the Theory of Cyclones. Journ. Meteor. **1**, 1 (1944).
2. CRESSMAN, G. P.: On the Forecasting of Long waves in the Upper Westerlies. Journ. Meteor. **5**, 44 (1948).
3. EXNER, F. M.: Dynamische Meteorologie. 2d ed. Vienna: Julius Springer. 268 (1925).
4. RIEHL, HERBERT: Jet Stream in Upper Troposphere and Cyclone Formation. Trans. Amer. Geoph. Union **29**, 175 (1948).
5. ROSSBY, C.-G.: On the Mutual Adjustment of Pressure and Velocity Distribution in Certain Simple Current Systems, II. Journ. of Mar. Res. **1**, 239 (1938).

6. Rossby, C.-G. and Collaborators: Relation between Variations in the Intensity of the Zonal Circulation of the Atmosphere and the Displacements of the semi-permanent Centers of Action. Journ. of Mar. Res. **2**, 38 (1939).
7. —: On the Propagation of Frequencies and Energy in Certain Types of Oceanic and Atmospheric Waves. Journ. Meteor. **2**, 187 (1945).
8. —: On the Distribution of Angular Velocity in Gaseous Envelopes Under the Influence of Large-Scale Horizontal Mixing Processes. Bull. Amer. Meteor. Soc. **28**, 53 (1947).
9. Staff Members of the Department of Meteorology of the University of Chicago: On the General Circulation of the Atmosphere in Middle Latitudes. Bull. Amer. Meteor. Soc. **28**, 255 (1947).
10. Starrett, L. G.: The Relation of Precipitation Patterns in North America to Certain Types of Jet Streams at 300 Millibar Level. Journ. Meteor. **6**, 347 (1949).
11. Yeh, T. C., C. C. Wallén, J. E. Carson, J. J. Marciano: A study of Rainfall over Oahu and its Relation to the General Circulation (To be published).

551.511

(Institut Royal Météorologique de Belgique, Uccle.)

La turbulence isentropique latérale dans le tourbillon circulaire.

Par

Jacques Van Mieghem.

Résumé. La turbulence latérale étant considérée comme un mouvement d'agitation à deux dimensions dans les surfaces isentropiques, on établit successivement le tenseur de REYNOLDS et le taux de production de l'énergie cinétique de turbulence.

Zusammenfassung. Auf Grund der Annahme, daß der Gleitaustausch als zweidimensionale Austauschbewegung in isentropen Flächen angesehen werden kann, werden der Tensor von REYNOLDS und der Betrag der kinetischen Turbulenzenergie abgeleitet, die in der Einheit von Volumen und Zeit erzeugt wird.

Summary. Assuming lateral mixing as a two-dimensional eddy motion in isentropic surfaces, the REYNOLDS' tensor and the rate of production of kinetic energy of turbulence are established.

1. Introduction.

La turbulence latérale dans l'atmosphère fut découverte par C. G. ROSSBY (isentropic lateral mixing) et par P. RAETHJEN (Gleitaustausch); elle fut étudiée par ces deux auteurs et par certains de leurs disciples, tant au point de vue synoptique qu'au point de vue dynamique.

De la stabilité statique de l'atmosphère dans le champ de la pesanteur, de la quasi horizontalité des surfaces isentropiques et de la quasi adiabaticité des transformations des particules d'air, il résulte que le mélange turbulent de l'air a lieu en première approximation dans les surfaces isentropiques. Ce mélange s'effectue à la fois perpendiculairement (turbulence transversale) et parallèlement (turbulence longitudinale) au courant atmosphérique moyen.

Cependant, jusqu'ici, seule la *turbulence transversale* a été envisagée. L'objet de cet article est de montrer quelles modifications il convient d'apporter aux équations et formules connues, lorsqu'on tient compte

de la *turbulence longitudinale*. Nous nous proposons: 1° de calculer le composantes du tenseur de REYNOLDS, 2° de déterminer le taux de production de l'énergie cinétique de turbulence et 3° d'établir le critère de la turbulence latérale.

2. Les équations du mouvement.

Assimilons le mouvement moyen de l'air atmosphérique, à l'échelle de la circulation générale, à celui d'un tourbillon circulaire permanent axé sur la droite des pôles. Rapportons ce mouvement à un système de coordonnées cylindriques (λ, R, h), fixe par rapport à la terre, où λ représente la longitude, R le rayon de gyration et h la distance du point O envisagé au plan de l'équateur. Par convention, cette distance est positive ou négative suivant que O est un point de l'hémisphère Nord ou de l'hémisphère Sud. En ce point, considérons le trièdre trirectangle dextrogyre $Oxyz$, dont l'axe Ox est tangent au parallèle de O et orienté de l'W vers l'E, dont l'axe Oy coïncide avec le rayon de gyration et est dirigé vers l'axe de rotation de la terre. On a: $Rd\lambda = dx$, $dR = -dy$ et $dh = dz$. Dans ce système de référence les équations de la dynamique du tourbillon circulaire permanent prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} \frac{U^2}{R} + 2\omega U &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \Theta \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \\ 0 &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \Theta \frac{\partial \Pi}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \qquad (1$$

où U désigne la vitesse zonale du tourbillon, c'est-à-dire la vitesse moyenne de l'air, ω (> 0) la vitesse angulaire de rotation de la terre, Φ le géopotentiel, Π la fonction de pression d'EXNER et Θ la température potentielle de l'air.

Rappelons que les grandeurs U, Φ, Θ et Π, relatives au mouvement moyen de l'air, ne dépendent que des coordonnées transversales ou méridiennes, y et z ou R et h.

Cela étant, soient (v_x, v_y, v_z) les composantes de la vitesse d'agitation et (V_x, V_y, V_z) les composantes de la vitesse $\vec{V}$ de l'air; on a, par définition

$$V_x \equiv U + v_x, \quad V_y \equiv v_y, \quad V_z \equiv v_z. \qquad (2$$

Ensuite, en admettant que le mouvement d'agitation des particules d'air est adiabatique et qu'il ne perturbe pas le champ de la pression (perturbation d'inertie), les équations du mouvement suivant les axes y et z s'écrivent

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV_x}{dt} - \frac{V_x V_y}{R} - 2\omega V_y &= 0, \\ \frac{dV_y}{dt} + \frac{V_x^2}{R} + 2\omega V_x &= -\Theta_0 \frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ \frac{dV_z}{dt} &= -\Theta_0 \frac{\partial \Pi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \qquad (3$$

où Θ_0 est la température potentielle de la particule considérée. Eliminons $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ entre les équations (1) et (3); d'où, en tenant compte de (2),

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dv_x}{dt} + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{U}{R} - 2\omega\right) v_y + \frac{\partial U}{\partial z} v_z = 0, \\ &\frac{dv_y}{dt} + 2\left(\frac{U}{R} + \omega\right) v_x = (\Theta - \Theta_0) \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \\ &\frac{dv_z}{dt} = (\Theta - \Theta_0) \frac{\partial \Pi}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

à condition de négliger les termes quadratiques par rapport aux composantes v_x, v_y, v_z et leurs dérivées.

3. La turbulence isentropique transversale.

Considérons, au point O, la particule animée de la vitesse (U, v_y, v_z). Le mélange transversal s'effectuant à peu près dans les surfaces isentropiques (voir § 1), on a, pour cette particule,

$$\Theta \cong \Theta_0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y} v_y + \frac{\partial \Theta}{\partial z} v_z \cong 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y} r_y + \frac{\partial \Theta}{\partial z} r_z \cong 0, \quad (5)$$

où (r_y, r_z) sont les composantes de son chemin de mélange transversal. Le déplacement transversal du point O (0, 0, 0) au point P $(0, r_y, r_z)$, entraîne une fluctuation v_x de la vitesse zonale U de la particule; en se reportant à la première équation du système (4), on trouve, grâce à (5),

$$v_x \cong \left(2\omega - \frac{\delta U}{\delta y} + \frac{U}{R}\right) r_y, \quad (6)$$

où, à l'expression entre parenthèses, il faut donner la valeur qu'elle prend au point O et où nous avons posé

$$\frac{\delta}{\delta y} \equiv \frac{\partial}{\partial y} - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} : \frac{\partial \Theta}{\partial z}\right) \frac{\partial}{\partial z}. \quad (7)$$

Enfin, en substituant (6) et (5) dans les deux dernières équations du système (4), on obtient les équations du mouvement d'agitation transversal

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dv_y}{dt} = f_y \equiv -2\left(\frac{U}{R} + \omega\right)\left(2\omega - \frac{\delta U}{\delta y} + \frac{U}{R}\right) r_y, \\ &\frac{dv_z}{dt} = f_z \cong 0. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

La force transversale par unité de masse (f_y, f_z) est celle que le milieu ambiant applique à la particule déplacée transversalement de (r_y, r_z). D'après Reynolds, le tenseur de la viscosité apparente, due à la turbulence transversale, est défini par les composantes,

$$\left.\begin{aligned} &\left(R_x^y\right)_{tr} \equiv -\overline{\varrho\, v_x v_y} \cong -\left(2\omega - \frac{\delta U}{\delta y} + \frac{U}{R}\right) \overline{\varrho\, r_y v_y}, \\ &\left(R_x^z\right)_{tr} \equiv -\overline{\varrho\, v_x v_z} \cong -\left(2\omega - \frac{\delta U}{\delta y} + \frac{U}{R}\right) \overline{\varrho\, r_y v_z}, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

où ϱ est la masse spécifique de l'air et où la notation $\overline{A}$ désigne la valeur moyenne de A dans un certain intervalle de temps. La longueur de cet intervalle et la valeur absolue du chemin de mélange sont les deux paramètres fondamentaux qui caractérisent l'échange turbulent de quantité de mouvement.

La fraction D_{tr} de l'énergie cinétique du courant moyen dissipée par viscosité apparante, par unité de temps et de volume, est donnée par la formule de RAYLEIGH

$$D_{tr} \equiv \left(R_x^y\right)_{tr} \frac{\partial U}{\partial y} + \left(R_x^z\right)_{tr} \frac{\partial U}{\partial z} \cong -\left(2\,\omega - \frac{\delta U}{\delta y} + \frac{U}{R}\right) \frac{\delta U}{\delta y}\,\overline{\varrho\, r_y\, v_y}, \quad (9)$$

compte tenu de (5) et (7). Rappelons que D_{tr} représente la quantité d'énergie cinétique du mouvement moyen qui, par unité de temps et de volume, est transformée en énergie cinétique de turbulence.

La valeur moyenne Δ_{tr} du travail, par unité de temps et de volume, effectué au cours du mouvement d'agitation (v_y, v_z), par la force (f_y, f_z) que le milieu ambiant applique aux particules déplacées transversalement, est donnée par

$$\Delta_{tr} \equiv \overline{\varrho\, f_y\, v_y} + \overline{\varrho\, f_z\, v_z} \cong -2\left(\frac{U}{R} + \omega\right)\left(2\,\omega - \frac{\delta U}{\delta y} + \frac{U}{R}\right) K_y, \quad (10)$$

où

$$K_y \equiv \varrho\, r_y\, \overline{v_y} > 0 \quad (11)$$

est le coefficient de turbulence radiale. Lorsque ce travail est positif $(\Delta_{tr} > 0)$, les particules turbulentes animées de la vitesse d'agitation (v_y, v_z) libèrent de l'énergie. Dans ce cas, la turbulence transversale est instable et le travail positif Δ_{tr} représente l'énergie d'instabilité libérée par unité de volume et de temps, au cours du mouvement d'agitation transversal [*6*]. Au contraire, lorsque $\Delta_{tr} < 0$, les particules, animées de la vitesse d'agitation (v_y, v_z), effectuent un travail négatif aux dépens de l'énergie du milieu ambiant: la turbulence transversale est alors stable. Dans ce cas, une fraction seulement de l'énergie D_{tr} sert à accroître l'énergie cinétique de turbulence.

Comme dans l'atmosphère, on a, en général,

$$\omega + \frac{U}{R} > 0, \quad (12)$$

on voit que $\Delta_{tr} <$ ou > 0 suivant que

$$\frac{\delta U}{\delta y} < \text{ ou } > 2\,\omega + \frac{U}{R},$$

c'est-à-dire, suivant que l'équilibre de la force de pression, de la force de Coriolis, de la force centrifuge et de la pesanteur, exprimé par les équations (1) du mouvement moyen, est un équilibre stable ou instable pour un déplacement isentropique transversal du point d'application de ces forces [*1* et *5*]. Ainsi, la *stabilité dynamique* $\left(\frac{\delta U}{\delta y} < 2\,\omega + \frac{U}{R}\right)$ du mouvement moyen U amortit la turbulence transversale; *l'instabilité dynamique* $\left(\frac{\delta U}{\delta y} > 2\,\omega + \frac{U}{R}\right)$, au contraire, la renforce.

Enfin, le taux de production, par unité de volume, de l'énergie cinétique de turbulence transversale est donnée par [6],

$$D_{tr} + \Delta_{tr} \cong K_y \left(\frac{\delta U}{\delta y} - \frac{U}{R} - 2\omega \right) \left(\frac{\delta U}{\delta y} + 2\frac{U}{R} + 2\omega \right). \quad (13)$$

Dès lors, la turbulence transversale ne peut se maintenir que si $D_{tr} + \Delta_{tr} > 0$, c'est-à-dire, lorsque

$$\textit{(Hydrodynamic instability)} \qquad \frac{\delta U}{\delta y} > \frac{U}{R} + 2\omega > 0, \quad (14a)$$

et aussi, lorsque

$$\textit{(Shearing instability)} \qquad \frac{\delta U}{\delta y} < -2\left(\frac{U}{R} + \omega \right) < 0. \quad (14b)$$

Notons que dans les deux cas (14a et b), on a $D_{tr} > 0$, c'est-à-dire que dans les deux cas une fraction de l'énergie cinétique du mouvement moyen se transforme en énergie cinétique de turbulence.

Dans le cas particulier du courant cylindrique plan $\left(v_z \equiv 0, \right.$ $U \equiv U(y) \equiv U(R)$, $\frac{\delta}{\delta y} \equiv \frac{\partial}{\partial y}$ et $\left. \omega \equiv 0 \right)$ les relations (8) et (12) se réduisent aux relations classiques de Prandtl [2]; en particulier, on trouve, pour la tension radiale, l'expression

$$\left(R_x^y \right)_{tr} \equiv K_y \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{U}{R} \right). \quad (15)$$

Remarquons que celle-ci ne s'annule pas lorsque le mouvement moyen U est la rotation d'un corps solide. Aussi préfère-t-on à la tension radiale (15) déduite de la théorie de l'échange radial de moment cinétique de L. Prandtl [2], la tension radiale

$$\left(R_x^y \right)_{tr} \equiv K_y \left(\frac{\delta U}{\delta y} + \frac{U}{R} \right) \quad (16)$$

déduite de la théorie de l'échange radial de rotationnelle de G. I. Taylor [4].

Finalement, notons que la turbulence radiale dans un courant cylindrique plan ne persiste que si $\frac{\partial U}{\partial y} > \frac{U}{R} > 0$ ou bien encore si $\frac{\partial U}{\partial y} < -2\frac{U}{R} < 0$, [2].

4. La turbulence isentropique longitudinale.

Considérons maintenant la particule animée de la vitesse $(U + v_x', 0, 0)$ au point O. Les surfaces isentropiques étant des surfaces de révolution autour de l'axe de rotation de la terre, le chemin de mélange longitudinal r_x' de la particule envisagée est tout entier dans la surface isentropique $\Theta = \Theta_0$ passant par O. La vitesse zonale $U + v_x'$ de cette particule étant différente de la vitesse moyenne U, la particule subit une impulsion radiale. Il en résulte une fluctuation v_y' de la vitesse radiale (nulle en moyenne) de la particule déplacée du point O (0, 0, 0)

au point P' $(r_x', 0, 0)$; en se reportant aux deux dernières équations du système (4), dans lequel il faut poser $\Theta_0 \equiv \Theta$, on trouve

$$\left.\begin{aligned} v_y' &\cong -2\left(\frac{U}{R}+\omega\right) r_x', \\ v_z' &\cong 0. \end{aligned}\right\} \qquad (17$$

En substituant (17) dans la première équation (4), on obtient l'équation du mouvement longitudinal,

$$\frac{d(U+v_x')}{dt} \cong f_x' \equiv -2\left(2\omega+\frac{U}{R}\right)\left(\omega+\frac{U}{R}\right) r_x'. \qquad (18$$

La force longitudinale par unité de masse f_x' est celle que le milieu ambiant applique à la particule déplacée longitudinalement de r_x'. Tout comme au § 3, on trouve successivement

$$\left.\begin{aligned} \left(R_x^y\right)_{lo} &\equiv -\overline{\varrho\, v_x' v_y'} \cong 2\left(\frac{U}{R}+\omega\right)\overline{\varrho\, r_x' v_x'}, \\ \left(R_x^z\right)_{lo} &\equiv -\overline{\varrho\, v_x' v_z'} \cong 0, \end{aligned}\right\} \qquad (8'$$

$$D_{lo} \equiv \left(R_x^y\right)_{lo}\frac{\partial U}{\partial y} + \left(R_x^z\right)_{lo}\frac{\partial U}{\partial z} \cong 2\left(\frac{U}{R}+\omega\right)\frac{\partial U}{\partial y}\overline{\varrho\, r_x' v_x'}, \qquad (9'$$

$$\Delta_{lo} \equiv \overline{\varrho\, f_x' v_x'} \cong -2\left(2\omega+\frac{U}{R}\right)\left(\omega+\frac{U}{R}\right)\overline{\varrho\, r_x' v_x'}, \qquad (10'$$

et

$$D_{lo}+\Delta_{lo} \cong 2\left(\frac{U}{R}+\omega\right)\left(\frac{\partial U}{\partial y}-2\omega-\frac{U}{R}\right)\overline{\varrho\, r_x' v_x'}, \qquad (13'$$

compte tenu des équations (17) et (18) sur lesquelles il faut opérer comme sur les équations (6) et (8) du § 3.

Introduisons le coefficient de turbulence azimutale ou longitudinale

$$K_x \equiv \overline{\varrho\, r'_x v_x'} > 0. \qquad (11'$$

La turbulence longitudinale ne peut se maintenir que si $D_{lo}+\Delta_{lo} > 0$, c'est-à-dire, en se reportant à (12), lorsque

(Inertial instability) $$\frac{\partial U}{\partial y} > 2\omega + \frac{U}{R} > 0. \qquad (14'$$

La condition (14′) est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équilibre de la force de pression, de la force de Coriolis, de la force centrifuge et de la pesanteur, exprimé par les équations (1) du mouvement moyen, soit, en l'absence de contrastes de température potentielle, un équilibre instable pour un déplacement radial du point d'application de ces forces.

Remarquons que (14′) entraîne l'inégalité $D_{lo} > 0$.

5. La turbulence latérale isentropique.

En admettant que la turbulence latérale soit la résultante de la turbulence transversale et de la turbulence longitudinale dans les surfaces isentropiques, on trouve, en groupant les resultats des §§ 3 et 4:

1° les composantes du tenseur de Reynolds,

$$\left.\begin{aligned} R_x^y &\equiv K_y\left(\frac{\delta U}{\delta y}+\frac{U}{R}\right)+2\left(\frac{U}{R}+\omega\right)(K_x-K_y),\\ R_x^z &\equiv K_y\left(2\omega-\frac{\delta U}{\delta y}+\frac{U}{R}\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}:\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right);\end{aligned}\right\} \qquad (8'')$$

2° la fraction d'énergie cinétique du courant moyen U dissipée par unité de volume et de temps,

$$D\equiv K_y\frac{\delta U}{\delta y}\left(\frac{\delta U}{\delta y}-\frac{U}{R}-2\omega\right)+2K_x\left(\frac{U}{R}+\omega\right)\frac{\partial U}{\partial y}; \qquad (9'')$$

3° l'énergie d'instabilité libérée par unité de volume et de temps,

$$\Delta\equiv 2\left(\frac{U}{R}+\omega\right)\left[K_y\left(\frac{\delta U}{\delta y}-\frac{U}{R}-2\omega\right)-K_x\left(\frac{U}{R}+2\omega\right)\right] \qquad (10'')$$

et

4° le taux de production de l'énergie cinétique de turbulence,

$$D+\Delta\equiv K_y\left(\frac{\delta U}{\delta y}-\frac{U}{R}-2\omega\right)\left(\frac{\delta U}{\delta y}+2\frac{U}{R}+2\omega\right)+$$
$$+2K_x\left(\frac{U}{R}+\omega\right)\left(\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{U}{R}-2\omega\right); \qquad (13'')$$

d'où, finalement, le critère de turbulence: $D+\Delta>0$. Remarquons que la tension latérale R_x^y prend une forme du type (16) lorsque la turbulence est *isotrope* ($K_x\equiv K_y$).

6. Application au cas de la turbulence horizontale dans un tourbillon vertical.

Les équations générales du § 5 s'appliquent immédiatement à ce cas; il suffit de considérer l'axe Oz comme étant la parallèle, passant par le point O considéré, à l'axe vertical du tourbillon et de substituer le paramètre de Coriolis f à 2ω. Nous négligerons l'inclinaison de la surface isentropique passant par O sur le plan horizontal Oxy. Nous supposerons donc que $\Theta\equiv\Theta(z)$ et $\frac{\delta}{\delta y}\equiv\frac{\partial}{\partial y}$; d'où,

$$R_x^y\equiv K_y\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{U}{R}\right)+\left(2\frac{U}{R}+f\right)(K_x-K_y),\qquad R_x^z\equiv 0, \qquad (8''\text{a})$$

$$D\equiv K_y\frac{\partial U}{\partial y}\left[\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{U}{R}\left(1-2\frac{K_x}{K_y}\right)-f\left(1-\frac{K_x}{K_y}\right)\right], \qquad (9''\text{a})$$

$$D+\Delta\equiv K_y\left(\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{U}{R}-f\right)\left[\frac{\partial U}{\partial y}+\left(2\frac{U}{R}+f\right)\left(1+\frac{K_x}{K_y}\right)\right]>0. \qquad (13''\text{a})$$

En annulant K_x et f dans ces formules, on retrouve évidemment les résultats de Prandtl [2]. Si, par contre, on introduit la relation *d'isotropie* $K_x\equiv K_y\equiv K$, on retrouve, pour la tension latérale R_x^y, l'expression (16) indépendante de f [4]. Dans ce cas, l'énergie cinétique du courant moyen U, dissipée par turbulence, ne dépend pas du paramètre

de Coriolis et la turbulence latérale persiste lorsque $\frac{\partial U}{\partial y} > \frac{U}{R} + f >$ et aussi, lorsque $\frac{\partial U}{\partial y} < -2\left(\frac{2U}{R} + f\right) < 0$. Si de plus, le courant U est géostrophique ($R = \infty$), la formule (8″a) fournit l'expression $K\frac{\partial U}{\partial y}$ donnée par PRIEBSCH [3] à la tension latérale R_x^y. Dans ce cas particulier, la turbulence persiste lorsque $\frac{\partial U}{\partial y} > f > 0$ et aussi, lorsque $\frac{\partial U}{\partial y} < -2f < 0$, [7].

Bibliographie.

1. KLEINSCHMIDT, E.: Stabilitätstheorie des geostrophischen Windfeldes Ann. Hydr. mar. Meteor. **69**, 305 (1941).
2. PRANDTL, L.: Meteorologische Anwendung der Strömungslehre. Beitr Phys. fr. Atm. **19**, 188 (1932).
3. PRIEBSCH, J.: Eine Bemerkung zur Dynamik turbulenter Strömunge unter dem Einfluß der Erdrotation. Ann. Hydr. mar. Meteor. **71**, 16 (1943).
4. TAYLOR, G. I.: The transport of vorticity and heat through Fluids Turbulent Motion. Proc. Roy. Soc. London, A, **135**, 685 (1932).
5. VAN MIEGHEM, J.: Le principe d'extremum et la stabilité de certains état de mouvement de l'air atmosphérique. Arch. Met. Geoph. Biokl. A, **I**, 34 (1949).
6. — Les équations générales de la mécanique et de l'énergétique des milieu turbulents en vue des applications à la météorologie. Inst. Roy. Mét Belgique, Mém. **XXXIV**, 60 p. (1949).
7. — Zijdelingse turbulentie in de atmosfeer. Med. Kon. Vl. Ac. van België Kl. Wet., **XII**, 14, 16 blz. (1950).

551.513

(Geophysikalisches Institut der Universität Hamburg.)

Über den planetarischen Austausch der Vorticity und des Rotationsmoments.

Von

P. Raethjen.

Zusammenfassung. Die Vorstellungen W. Ferrels (1861) und C. G. Rossbys (1947) über die Wirkung des planetarischen Meridionalaustausches auf das mittlere West-Ost-Windfeld, welche auf den ersten Blick gegensätzlich erscheinen, sind durchaus miteinander vereinbar. Sowohl das „Rotationsmoment" (nach Ferrel) als auch die „absolute Vorticity" (nach Rossby) treten im weiträumig-meridionalen Austausch als „austauschbare" Größen auf; das erstere allerdings nur im „monotropen" Teil dieses Austausches, die letztere nur, soweit keine Massenmischungen vorkommen. Das mittlere planetarische Westwindfeld oberhalb 4 km Höhe kann als Gleichgewichtszustand folgendermaßen erklärt werden: Der polwärts fließende Transport von Westwindimpulsen, den der Austausch des Rotationsmoments (oberhalb 4 km) leistet, ergänzt im Polargebiet den Verlust an Vorticity, welcher dort durch den äquatorwärts fließenden Transport der Vorticity (im Vorticityaustausch) entsteht. Die „planetarische Polarfront" gewinnt hierdurch einen neuen Aspekt.

Summary. The conceptions of W. Ferrel (1861) and C. G. Rossby (1947) concerning the effect of the planetary meridional exchange on the average west-east-wind field, which seem to be contrary at the first glance, are absolutely compatible with each other. Both the angular momentum (according to Ferrel) and the absolute vorticity (according to Rossby) appear as exchangeable values in the world-wide meridional exchange; the first one, however, only in the "monotropic" part of this exchange, and the latter only as far as no mass mixing takes place. The average planetary field of westerlies above 4 km. a.s.l. can be explained as state of equilibrium as follows: The transport of westwind impulses flowing towards the pole, effected by the angular momentum (above 4 km.), supplies the loss of vorticity in the polar area which there is caused by the transport of vorticity flowing towards the equator. Thereby the planetary polar front obtains a new aspect.

Résumé. Les idées de W. Ferrel (1861) et de C. G. Rossby (1947) relatives à l'effet de l'échange turbulent méridien à l'échelle planétaire sur le champ moyen de vent Ouest-Est qui à première vue paraissent opposées sont

pourtant parfaitement conciliables. Le «moment de rotation» (selon FERREL aussi bien que l'«absolute vorticity» (selon ROSSBY) apparaissent comme des grandeurs échangeables dans l'échange turbulent méridien à grande échelle le premier il est vrai seulement dans la partie «monotrope» de cet échange la seconde seulement s'il n'y a pas de mélange de masses. Le champ moyen de vent d'Ouest planétaire au-dessus de 4 km. considéré comme état d'équilibre peut s'expliquer de la manière suivante: le transport vers le pôle d'impulsions de vent d'Ouest que fournit l'échange turbulent du moment de rotation (au-dessus de 4 km.) remplace dans les régions polaires la perte de «vorticity» qui prend naissance dans le transport de celle-ci vers l'équateur (dans l'échange turbulent de vorticity). Le «front polaire planétaire» revêt par là un aspect nouveau.

1. Reibung am Erdboden.

Die Dynamik lehrt, daß der auf die Erdachse bezogene *Drehimpuls* (das „*Rotationsmoment*") einer atmosphärischen Luftmasse erhalten bleibt, wenn nur solche Kräfte an ihr angreifen, welche insgesamt (resultierend) in die Meridianebene fallen. Im „*planetarischen*" *Zirkulationssystem* ist diese Bedingung im Mittel erfüllt, wenn man von der Reibung absieht. Denn die „*Solenoide*" liegen im Mittel westöstlich, die Beschleunigungen also meridional. Deshalb forderte W. FERREL [*1*], daß ohne Reibung das Rotationsmoment so lange meridional ausgetauscht wird, bis in allen Breiten *das gleiche Rotationsmoment* herrscht. Doch hat er sich sogleich [*1*] selbst korrigiert, indem er (am Schluß seiner Untersuchung) die *Reibung* als den stationären Zustand wesentlich bestimmend erwähnt. Demnach ergibt sich das planetarische „Reibungsgleichgewicht" [*4*] durch *die Gegenwirkung des planetarischen Meridionalaustausches und der Reibung*: Der erstere strebt danach, die meridionalen Unterschiede des Rotationsmoments zu vermindern und *erzeugt* dadurch westöstliche Winde, die letztere strebt danach, die Winde zu *schwächen*.

Wenn man, von dieser Vorstellung ausgehend, die *beobachteten Westwinde* ansieht, kommt man zu der Meinung, daß die Reibung in diesem Kampf *übermächtig* sei. Denn die wirklichen Westostwinde der Atmosphäre kommen der Windstille erheblich näher als dem Ferrelschen Idealziel konstanten Rotationsmoments.

Auch die Zirkulationstheorien von OBERBECK [*2*] und PRANDTL [*3*], welche dieses Problem als *stationäre* Meridionalzirkulation (nicht als Austausch) lösen wollen, bewerten naturgemäß die Reibung als entscheidenden Faktor. Denn eine Zirkulation, welche fortwährend durch thermodynamischen Kreisprozeß Energie gewinnt, kann nur durch Reibung stationär werden. Die Reibung an der Erdoberfläche ist also sozusagen das „*beruhigende*", die Bestrahlung der Erdoberfläche das „*antreibende*" Element, gleichgültig, ob man aus der Bestrahlung, wie FERREL, viele kleine nichtstationäre Meridionalzirkulationen (den „Meridionalaustausch") oder, wie OBERBECK und PRANDTL, eine große stationäre Meridionalzirkulation herleitet.

Wenn man sich nun aber die meteorologischen Beobachtungen daraufhin genauer ansieht, so scheint die Reibung doch wieder nur eine *sek*

schwache Wirksamkeit zu entfalten. Denn schon in 1 km Höhe findet man den „Gradientwind", welcher *keine* direkte Reibungswirkung erkennen läßt, und der starke Wechsel des Wetters läßt den sicheren Schluß zu, daß die „beruhigende" Wirkung der Reibung sich insgesamt nicht durchsetzen kann.

Dennoch existiert natürlich ein (mittleres) „*Reibungsgleichgewicht*" im Sinne Ferrels. Dieses hat der Verfasser [*4*] kürzlich nachgewiesen mit einer Rechnung, welche charakteristischerweise fast alle dafür wesentlichen Größen und Vorgänge in der „bodennahen Reibungsschicht" antrifft. Der meridionale Fluß des Rotationsmoments, welcher im planetarischen Reibungsgleichgewicht mitwirkt, findet weit überwiegend (zu mehr als $^9/_{10}$) in der bodennahen Reibungsschicht (d. h. unterhalb 1000 m Höhe) statt. Alle höheren Schichten sind nur mit weniger als $^1/_{10}$ daran beteiligt. Der Grund, richtiger gesagt, das Kennzeichen dieser Passivität ist natürlich der *Gradientwind* der „freien" Atmosphäre.

Demnach ist wohl — cum grano salis — die Vermutung berechtigt, daß auch dieses Zehntel der Mitwirkung in etwa 4 km Höhe nicht mehr vorhanden ist, daß die Schichten oberhalb 4 km am planetarischen Reibungsgleichgewicht fast unbeteiligt sind. Denn nur bis etwa 4 km erstreckt sich meistens die „*Konvektion*". Dann müssen also die oberen Schichten (oberhalb 4 km) ihr eigenes (mittleres) Gleichgewicht nahezu unabhängig von der Reibung am Erdboden finden. Diese Vorstellung würde zwanglos den starken Wechsel des Wetters erklären, denn es leuchtet ohne weiteres ein, daß ohne die Bodenreibung das „beruhigende" Element fehlt. Ebenso, wie ein Pendel ohne Reibung nicht zur Ruhe kommt, kann auch die Atmosphäre oberhalb 4 km Höhe nicht zur Ruhe kommen. Hier wird das Gleichgewicht zwischen Energieerzeugung und Energieverbrauch immer von neuem gestört, weil die Energie der Winde in oberen Schichten nicht direkt durch Reibung verbraucht (in Wärme verwandelt) wird, sondern erst über allerlei Zwischenglieder (Druckfeld) der bodennahen Reibungsschicht zugeführt werden muß, ehe sie dort aus der Atmosphäre ausscheidet.

2. Der beobachtete meridionale Vorticity-Fluß.

Dieser Unterschied der oberen Schichten (oberhalb 4 km) gegenüber den unteren (welch letztere den größten Teil der „Konvektion" enthalten), kommt auch in den Gesetzmäßigkeiten zum Ausdruck, welche C. G. Rossby und seine Mitarbeiter [*5*] neuerdings in höheren Schichten aus aerologischen Beobachtungen Nord- und Mittelamerikas nachgewiesen haben. Diese Beobachtungen erwecken den Eindruck, als ob nicht das Rotationsmoment, sondern die „*absolute Vorticity*" im planetarischen Meridionalaustausch die „austauschbare" Feldgröße sei. Mit C. G. Rossby nennen wir sie ζ:

$$\zeta = l + \lambda; \quad \begin{cases} l = 2\,\omega \sin\varphi; \\ \lambda = \dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y}. \end{cases} \tag{1}$$

Dabei bedeuten: l die absolute Vorticity der Erde, λ die relative Vorticit der atmosphärischen Luft relativ zur Erde, ω die Winkelgeschwindigkei der Erdrotation, φ die geographische Breite, v_x, v_y die Horizontalkompo nenten der Relativströmung (relativ zur Erde gemessen), x, y Horizontal koordinaten, welche wir hier so wählen, daß die x-Achse ostwärts zeigt Die Differentiale ∂x, ∂y sind weiträumig ($\geqq 100$ km) gemeint, des gleichen die Geschwindigkeiten v_x, v_y.

Aus den aerologischen Beobachtungen Nord- und Mittelamerikas er sehen wir nun also mit C. G. ROSSBY [5], daß (im Mittel) die Vorticit (oberer Schichten) auf der Polseite der Halbkugel (polwärts von etw 50° Breite) fast konstant, nur wenig mit der Breite veränderlich ist von dort aber äquatorwärts gegen Null abnimmt. In besondere Fällen, welche C. G. ROSSBY als „*jet stream*" bezeichnet, zeigt sic sogar die *strenge* Konstanz der absoluten Vorticity ζ vom Pol bis etw 40° Breite.

Hierdurch drängt sich dem unbefangenen Beobachter folgende Vor stellung auf: Die Vorticity ζ wird in oberen Schichten meridional aus getauscht, und zwar auf der Polseite von 45° Breite so stark, daß ih meridionales Gefälle $\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}$ dort gering ist, auf der Äquatorseite von 45 dagegen weniger stark, so daß sich hier ein starkes Gefälle $\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}$ ausbildet Dieser Vorticity-Austausch enthält dann also einen meridionalen „Vor ticity-Fluß" in Richtung des Vorticity-Gefälles. Jede Luftmasse, welch sich äquatorwärts bewegt, bringt ihre *große* Vorticity mit, während di polwärts bewegten Massen nur *geringere* Vorticity befördern. Auf beide Halbkugeln fließt so die „Massen-Vorticity" ($\Sigma m \cdot \zeta$) äquatorwärts In den Tropen treffen sich diese beiden Vorticity-Ströme (beider Halb kugeln) und ergänzen sich dort zu Null, denn die Vorticity der Süd halbkugel hat den entgegengesetzten Drehsinn wie diejenige der Nord halbkugel.

Diese Vorstellung des meridionalen Vorticity-Austausches begegne nun aber *theoretischen* Bedenken, wenn man an einen Austausch mi *Massenvermischung* denkt. Wenn die planetarischen Austauschquante sich *wirklich* vermischen würden, so würde dabei die absolute Vorticit verschwinden, denn diese besteht ja gerade aus (absoluten) Geschwindig keits*unterschieden*, welche durch Mischung *beseitigt* werden. Für de Vorticity-Austausch muß also ein anderes Modell gefunden werde Dies hat der Verfasser bereits [4] versucht, ohne allerdings mit diese Versuchsmodell mehr zeigen zu wollen als nur die *Möglichkeit* mischungs freier Austauschvorgänge.

Nachstehend wird nun zunächst ein planetarisches Austauschmode der „Einschubwirbel" gezeigt, welches ohne Vermischung die absolut Vorticity austauscht und sich in den aerologischen Beobachtungen nach weisen läßt. Weiterhin wird gezeigt, daß der Vorticity-Austausch ge meinsam mit dem in [4] untersuchten Impulsaustausch das (mittlere planetarische Windfeld oberer Schichten im Gleichgewicht hält.

3. Austausch der absoluten Vorticity.

Wir betrachten das planetarische Windfeld aller Schichten oberhalb 4 km Höhe, und nennen seine mittlere absolute Vorticity $\bar{\zeta}$. Dann ist also $\bar{\zeta}$ eine Funktion der Breite:

$$\bar{\zeta} = \bar{\bar{\zeta}}(\varphi). \tag{2}$$

$\bar{\bar{\zeta}}$ ist die über den Breitenkreis, über alle Schichten oberhalb 4 km und über einen Monat gemittelte absolute Vorticity und gehört selbstverständlich einem *geostrophischen* Mittelwertfeld an. Zunächst behandeln wir dieses geostrophische Feld so, als ob es nicht ein Rechenergebnis der Mittelbildung, sondern wirklich dauernd vorhanden (d. h. stationär) sei.

Wir greifen nun in diesem Feld $\bar{\bar{\zeta}}(\varphi)$ in irgeneiner Breite φ_1 ein Luftquantum m heraus, welches beispielsweise zwischen 400 und 500 mb gelegen sei und eine Grundfläche $F = r^2 \cdot \pi$ mit dem Radius $r = 500$ km überdecken möge, und befördern dieses Luftquantum im gleichen Niveau (400 bis 500 mb) meridional nach der Breite φ_2. Wenn sich dabei die Grundfläche F dieses Quantums m nicht ändert, so bleibt auch seine Vorticity ζ erhalten [*4*, Gl. (68)], von Solenoideffekten abgesehen. Nur wenn eine horizontale Flächendehnung $\frac{dF}{dt}$ („Horizontaldivergenz") oder -schrumpfung stattfindet, ändert sich die absolute Vorticity.

Wir nehmen nun an, das Quantum m erleide auf seinem „freien" Weg $\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$ *keine* horizontale „Flächendehnung" (bzw. Schrumpfung), sondern diese ergebe sich erst *nachher* in der Breite φ_2, während das Austauschquantum sich dort aufhält. Diese Annahme bedeutet, wenn $\varphi_2 - \varphi_1$ hinreichend klein (ein Differential) ist, nichts anderes als eine partielle Differenzierung nach der Zeit, bei welcher man ja stets zwei partielle Änderungen, welche in Wirklichkeit gleichzeitig erfolgen, als nacheinander stattfindend behandelt. Sie beruht also lediglich auf der Differenzierbarkeit des Vorganges.

Unser Quantum m erreicht nun also die Breite φ_2 mit seiner Ausgangsvorticity $\bar{\zeta}_1$. Es hat dort (in φ_2) eine *andere* Vorticity als sie dem dortigen Druckfeld *geostrophisch* entspricht. Die Differenz nennen wir den „*Störwirbel*" σ_v,

$$\bar{\zeta}_1 - \bar{\zeta}_2 = -\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \varphi} \cdot \Delta\varphi = \sigma_v, \tag{3}$$

denn diese σ_v-Größe *stört* jetzt in φ_2 das bislang dort vorhandene geostrophische Feld. Diese Störung betrifft den Flächenbereich F des Einschubwirbels *in allen Schichten*, nicht nur in der Schicht 400 bis 500 mb, in welcher das Quantum eingeschoben ist.

In diesem Gebiet F ergeben sich nun (infolge Störung des geostrophischen Gleichgewichts) die *spontanen* Feldänderungen, welche der Verfasser kürzlich untersucht und „Adaptation" genannt hat [*6*]. Wenn σ_v positiv ist, bedeutet σ_v einen *zyklonalen* Störwirbel, welcher sich in der Einschubschicht (400 bis 500 mb) spontan (durch Corioliskraft) horizontal

dehnt $\left(\frac{dF}{dt}\text{ positiv}\right)$. Gleichzeitig *schrumpfen* aber alle anderen Schichten (darüber und darunter) horizontal (wie in [6] nachgewiesen) und gewinnen dadurch ebenfalls zyklonale Vorticity. Der Endeffekt dieser spontanen Feldänderungen besteht (bei positivem oder negativem σ_ν) darin, daß im Gebiet F alle Schichten eine neue Vorticity $\bar{\zeta}_2'$ erhalten derart, daß

$$\bar{\zeta}_2' - \bar{\zeta}_2 = \Delta\bar{\zeta}_2 = \frac{\nu}{1+\vartheta} \cdot \sigma_\nu \qquad (4$$

ist [6]. Dabei ist ν die Massenmächtigkeit der Einschubschicht, relativ zur Mächtigkeit aller Schichten gemessen, in unserem Beispiel (400 bis 500 mb) also $\nu = 0{,}1$. ϑ ist der sog. „*Adaptationskennwert*“:

$$\vartheta = \frac{\bar{\zeta} \cdot l \cdot r^2}{4 \cdot R \cdot T_v}, \qquad (5$$

in welchem $R = 287 \left[\frac{\text{m}^2}{\text{sec}^2 \cdot {}^\circ K}\right]$ die Gaskonstante der Luft und T_v [° K] ihre virtuelle Temperatur bedeuten. Für $r = 1000$ km ist $\vartheta \leqq 0{,}06$. Daher kann man also mit grober Näherung ϑ in Gl. (4) vernachlässigen. Denn auch die Gl. (4) gilt mit Rücksicht auf die „thermische“ Kompensation nur näherungsweise.

Mit dieser Vernachlässigung besagt die Gl. (4), daß das Austauschquantum m im Gebiet F eine Änderung $\Delta\bar{\zeta}_2 = \nu \cdot \sigma_\nu$ bewirkt hat, d. h. daß der Vorticity-Überschuß σ_ν, den diese Masse mitgebracht hat, dort (in F) auf alle Massen verteilt worden ist[1].

Wesentlich größere Austauschquanten mit Radien $r > 1000$ km werden, wie die Adaptationstheorie und die Erfahrung zeigen, nicht in eine Teilschicht eingeschoben, sondern umfassen selbst alle Schichten. Für diese „Allschichtenwirbel“ hat der Verfasser in [4, Gl. (90)] ohnehin nachgewiesen, daß sie ihre absolute Vorticity ungefähr behalten. Von ihnen rechnen wir in der vorliegenden Betrachtung nur jeweils den Teil oberhalb 4 km Höhe mit. Auf diese Art ergibt sich mit Berücksichtigung aller Nebeneffekte ungefähr, daß jedes planetarische Austauschquantum oberhalb 4 km seine Vorticity mitbringt, wodurch sein Vorticity-Überschuß dem planetarischen Feld $\bar{\zeta}$ (in der Endbreite φ_2) zugeführt wird.

Der Effekt, den ein einzelnes (kleineres oder größeres) Austauschquantum ohne Vermischung im Mittelwertfeld $\bar{\zeta}(\varphi)$ macht, ist also un-

---

[1] Nach der „isothermen“ Adaptationstheorie [6] wird der Vorticity-Überschuß auf *alle* Schichten von der Erdoberfläche bis in unbegrenzte Höhe gleichmäßig verteilt, aber die thermische „Kompensation“ [6] modifiziert diesen Effekt in dem Sinne, daß die *Einschubschicht* bei dieser Verteilung bedeutend *mehr* erhält als die anderen Schichten. Da der „Einschub“ vorwiegend im Tropopausenniveau und benachbarten Schichten erfolgt, werden also die untersten 4 km dabei *weniger* bedacht. Die Kompensationsrechnung zeigt, daß Einschubquanten mit Radien $r < 500$ km, welche im Tropopausenniveau eingeschoben werden, infolge der thermischen (adiabatischen) Kompensation in den untersten 4 km kaum einen Effekt machen.

gefähr folgender: Das Quantum hat seine Vorticity $\bar{\zeta}_1$ in eine andere Breite φ_2 mitgenommen und sie auf die dortige Massen verteilt genau ebenso, als ob $\bar{\zeta}$ eine stoffliche *Beimengung* (Massenmischungsverhältnis) wäre, welche in verschiedener Breite verschieden stark vorhanden wäre und nun vom Austauschquantum in andere Breiten befördert und dort *durch Mischung* abgegeben würde. Man sieht, die Adaptation und planetarische Mittelung leisten betreffs der Vorticity das gleiche, was die Mischung betreffs stofflicher Beimengungen bewirkt. Daher können wir die bekannte Austauschformel von W. Schmidt folgendermaßen anwenden:

Der meridionale „Einschub" und die geostrophische Adaptation bewirken gemeinsam einen austauschartigen Fluß V der absoluten Vorticity, der den Breitenkreis φ überschreitet:

$$V = \frac{A_v}{r_E} \cdot \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \varphi} \qquad \left[\frac{\text{gr}}{\text{cm} \cdot \text{sec}^2}\right]. \tag{6}$$

Dabei bedeutet r_E den Erdradius und A_v den Austauschkoeffizienten für Vorticity-Austausch:

$$A_v = \frac{1}{2\pi t \cdot \cos\varphi} \cdot \sum m \cdot |\Delta\varphi| \qquad \left[\frac{\text{gr}}{\text{sec}}\right]. \tag{7}$$

Jede „Einschubmasse" m, welche den Breitenkreis φ in der „Zählzeit" t überschreitet (polwärts oder äquatorwärts), wird mit dem „freien" Weg $|\Delta\varphi|$ (Bogenmaß), den sie *vor* dem Überschreiten horizontaldivergenzfrei zurückgelegt hat, multipliziert. Dann werden alle diese Produkte multipliziert, addiert und schließlich durch Division mit $2\pi t \cdot \cos\varphi$ auf die Längeneinheit des Breitenkreises und auf die Zeiteinheit bezogen. A_v hat also den Charakter eines normalen Austauschkoeffizienten im zweidimensionalen Austauschfeld der Erdatmosphäre.

Die Größe $\Delta\varphi$ ist offensichtlich von der „Adaptationszeit" abhängig, d. h. von der Zeit, welche der Störwirbel σ_v benötigt, um sich auf alle Schichten zu verteilen. In [*6*] hat der Verfasser diese Zeit auf einige Stunden geschätzt. $\Delta\varphi$ ist ungefähr das Breitenintervall, welches vom Austauschquantum während der Adaptationszeit durchlaufen wird. Diese Zeit ist in den Allschichtenwirbeln theoretisch unendlich, d. h. in diesen bedeutet $\Delta\varphi$ die insgesamt durchlaufene Breitendifferenz.

V bedeutet nun nach Gl. (6) das Produkt Masse mal Vorticity ($\sum m \cdot \zeta$), welches pro Zeiteinheit über die Längeneinheit des Breitenkreises φ äquatorwärts transportiert wird.

Dieselbe Endformel (6) gewinnt man auch dann, wenn man das planetarische Feld $\bar{\zeta}$ nicht als wirklich existent, sondern nur als *Mittelwertfeld* voraussetzt. Alle Schwankungen um den mittleren Zustand $\bar{\zeta}(\varphi)$ gleichen sich im Mittel aus, wenn die Einschubvorgänge von diesen Feldschwankungen unabhängig sind, was wohl, über längere Zeit und über den ganzen Breitenkreis gemittelt, ungefähr vorausgesetzt werden darf.

Betreffs der *Realität* dieses mischungsfreien Austausches mit „eingeschobenen" und „Allschichtenwirbeln" ist heute kein Zweifel mehr

möglich. E. KLEINSCHMIDT [7] hat kürzlich einen äquatorwärts vorstoßenden Einschubwirbel gründlichst untersucht. Derartige Fälle kann man in den täglichen Höhenwetterkarten häufig beobachten. Charakteristischerweise haben diese Einschubquanten, wenn sie nur einer Teilschicht angehören, mittelgroße Radien ($r < 1000$ km) und treten meist in der Tropopause und benachbarten Schichten auf. Daneben aber kommen auch Massenverschiebungen mit größerem Quantenradius ($r \geqq 1000$ km) vor, welche dann fast immer *allen* Schichten angehören („Allschichtenwirbel"). Durch die „*Luftmassenanalyse*" T. BERGERONS [8] wissen wir seit langem, daß derart große Massen sich kaum (oder jedenfalls nur sehr langsam) mit ihrer Umgebung vermischen. Nur im planetarischen Mittelwertfeld scheint es so, als ob eine gleichmäßige Verteilung der absoluten Vorticity auf den ganzen Breitenkreis vor sich geht.

Allerdings kann man aus den Höhenwetterkarten den Eindruck gewinnen, als ob die subtropischen Luftmassen im Durchschnitt *weniger* Neigung zur Erhaltung ihrer absoluten Vorticity besitzen als die polaren. Vielleicht sind weiträumig-horizontale Mischungsvorgänge in den subtropischen Massen häufiger. Diese Erfahrungstatsache wurde dem Verfasser [4] zum Anlaß eines sonst wohl merkwürdig erscheinenden Austauschmodells. Doch ändert dies nichts an den Austauschformeln (6) und (7) und ist lediglich ein Hinweis, daß *neben* dem Vorticity-Austausch noch ein Austausch des Rotationsmoments besteht.

Gegen den Austausch der Vorticity kann man auch einwenden, daß auf dem „freien" Weg des Austauschquantums tatsächlich nicht die Vorticity ζ sondern die potentielle Vorticity $\zeta/\Delta p$ erhalten bleibt, in welcher Δp die vertikale Druckmächtigkeit des Austauschquantums bedeutet. Dieser Einwand betrifft natürlich nicht die Allschichtenquanten und auch nicht wesentlich die in der Troposphäre bzw. Stratosphäre verbleibenden, aber sehr erheblich diejenigen Austauschquanten, welche aus der Stratosphäre in die Troposphäre (äquatorwärts) oder aus der Troposphäre in die Stratosphäre (polwärts) übergehen. Denn diese ändern dabei ihre vertikale Druckmächtigkeit Δp sehr erheblich. Doch könnte man in der Austauschrechnung diesen Fehler dadurch annähernd wieder aufheben, daß man diese, die Tropopause meridional durchstoßenden Massen m im Austauschkoeffizienten doppelt zählt. Hierdurch würde lediglich der ohnehin nur sehr ungenau bestimmbare Austauschkoeffizient A_v ein wenig größer werden, im übrigen aber die Gl. (6) ungefähr gültig bleiben.

4. Austausch des Rotationsmoments.

Der Meridionalaustausch des Rotationsmoments [4] wird vielleicht zum Teil von denselben Massen m getragen, welche den Vorticity-Austausch machen, aber sicherlich sind die „freien" Wege $\Delta\varphi$ in diesen beiden Austauschformen verschieden. Deshalb müssen wir auch die Austauschkoeffizienten unterscheiden und nennen den Austauschkoeffizient des

meridionalen Impulsaustausches A_J. Nach [4, Gl. (53)] ergibt sich ein polwärts fließender Strom J von Westwindimpulsen folgendermaßen:

$$J = A_J \cdot \left(\eta \cdot l^* - \frac{1}{r_E} \cdot \frac{\partial v_y^*}{\partial \varphi}\right) \qquad \left[\frac{\text{gr}}{\text{sec}^2}\right]. \tag{8}$$

Hier bedeutet J die Westwindimpulse, welche pro Zeiteinheit die Längeneinheit des Breitenkreises φ polwärts überschreiten. Dabei ist

$$A_J = \frac{1}{2\,\pi\, t \cos\varphi} \cdot \sum m \cdot |\Delta\varphi| \qquad \left[\frac{\text{gr}}{\text{sec}}\right], \tag{9}$$

ebenso wie in Gl. (7) der Austauschkoeffizient, nur mit dem Unterschied, daß in (9) andere $\Delta\varphi$-Werte und zum Teil auch andere Masseindividuen m auftreten als in Gl. (7).

Ferner ist

$$l^* = 2 \cdot \omega^* \cdot \sin\varphi; \qquad \omega^* = \omega + \frac{v_y}{r_E \cdot \cos\varphi}. \tag{10}$$

l^* ist also die absolute Vorticity eines mit dem mittleren Westwind v_y der Breite φ um die Erdachse rotierenden Koordinatensystems. v_y^* bedeutet die mittlere Westwindgeschwindigkeit relativ zu diesem System. D. h. in der Breite φ ist $v_y^* = 0$, wobei jedoch (im gleichen Koordinatensystem gemessen) $\partial v_y^*/\partial\varphi \neq 0$ sein kann.

η bedeutet den „Monotropiekoeffizient“ [4], also $\eta = 0$ im „isotropen“, $\eta = 1$ im „monotropen“ und $0 < \eta < 1$ im „heterotropen“ Meridionalaustausch. r_E ist auch hier der Erdradius.

Nähere Erläuterungen dazu findet man in [4].

5. Planetarisches Austauschgleichgewicht.

Es ist evident, daß die polwärts fließenden Westwindimpulse J die absolute Vorticity des Polargebietes *vermehren*, während der äquatorwärts fließende Strom V die polare Vorticity *vermindert*. Ein permanentes (stationäres) Windfeld kann (im Mittel) im Polargebiet (polwärts von 50°) nur dann auftreten, wenn oberhalb 4 km Höhe diese Vermehrung und Verminderung sich gegenseitig aufheben, wenn also an der Grenze des Polargebietes

$$V = \frac{2\,J}{r_E \cdot \cos\varphi} \tag{11}$$

ist. Denn die mittlere Vorticity des Polargebietes ist die *doppelte Winkelgeschwindigkeit*, mit welcher die dortigen Luftmassen um die Erdachse rotieren.

Dabei ist die Reibung am Erdboden unberücksichtigt geblieben; man darf daher nur erwarten, daß die Gl. (11) für die oberen Schichten der Atmosphäre oberhalb 4 km Höhe gilt. Die unterste Schicht (unterhalb 4 km) enthält außerdem noch einen kräftigen Impulstransport, welcher durch Reibung dem festen Erdkörper polwärts von 30° Breite Westwindimpulse, äquatorwärts von 30° Ostwindimpulse zuführt. Wenn man diesen zusätzlichen Impulsstrom des „Reibungsgleichgewichtes“, den

der Verfasser in [4, Tabelle 3] berechnet und als Drehmoment D_A angegeben hat, abzieht, so muß der dann noch verbleibende Impulsstrom J die Gl. (11) erfüllen.

Daß aber die Gl. (11) auf die oberhalb 4 km Höhe liegenden Schichten *ohne* derartige Korrektur angewendet werden darf, zeigt folgende Abschätzung:

Unter 50° Breite beträgt bei dem mittleren Vertikalaustauschkoeffizient (im 4-km-Niveau) $A_z \approx 20 \left[\frac{\text{gr}}{\text{cm}\cdot\text{sec}}\right]$ und einem mittleren vertikalen Windgefälle $\partial v_y/\partial z \approx 1{,}5 \cdot 10^{-3} \left[\frac{1}{\text{sec}}\right]$ die Reibungskraft (in horizontaler Flächeneinheit („Schubspannung") 0,03 $\left[\frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}\right]$ und ist westwärts gerichtet. Nach dem Pol hin nimmt diese Reibungskraft ab. Wir betrachten nun eine sphärische spitze Dreieckfläche, welche im Pol ihre Spitze und auf dem 50°-Breitenkreis ihre 1 cm lange Grundlinie hat (beiderseits von Meridianen begrenzt wird). Diese Fläche ist etwa $2 \cdot 10^8$ cm² groß. Ihr gesamtes Reibungsmoment (um die Erdachse) beträgt dann etwa $3 \cdot 10^6 \cdot r_E \cdot \cos 50°$ [dyn cm]. Demgegenüber beträgt der Impulsstrom J bei einem Koeffizienten $A_J \approx 1{,}5 \cdot 10^{13} \left[\frac{\text{gr}}{\text{sec}}\right]$ und $\eta = 0{,}1$ etwa $J \approx 1{,}5 \cdot 10^8 \left[\frac{\text{dyn}}{\text{cm}}\right]$ und liefert also ein Drehmoment $1{,}5 \cdot 10^8 \cdot r_E \cdot \cos 50°$ [dyn · cm] in die sphärische Dreieckfläche. Die Reibung am Erdboden könnte demnach nur etwa 2% des Impulsstromes J aufnehmen. Würde sie den größten Teil von J dem festen Erdkörper zuführen, so könnte es auch keinen schroffen Wetterwechsel, sondern nur allmähliche Klimaänderungen geben.

Wenn wir also oberhalb 4 km Höhe den Effekt der Bodenreibung vernachlässigen, so muß dort (im Mittel) ein planetarisches Austauschgleichgewicht herrschen, welches die Gl. (11) erfüllt.

Setzen wir in diese Gl. (11) die Gl. (6) und (8) ein, so erhalten wir:

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \varphi} = \frac{2 A_J \cdot l^*}{A_v \cdot \cos\varphi} \cdot \left(\eta - \frac{1}{l^* \cdot r_E} \cdot \frac{\partial v_y^*}{\partial \varphi}\right). \tag{12}$$

Die eingeklammerte Größe auf der rechten Seite ist zwischen 50° Breite und dem Pol positiv; wir nennen sie η^*:

$$\eta^* = \eta - \frac{1}{r_E \cdot l^*} \cdot \frac{\partial v_y}{\partial \varphi}. \tag{13}$$

Ferner gebrauchen wir die Definitionsgleichung:

$$\bar{\zeta} = l^* - \frac{1}{r_E} \cdot \frac{\partial v_y^*}{\partial \varphi}, \tag{14}$$

aus welcher unter Berücksichtigung der Gl. (10) durch Differenzieren folgt:

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r_E} \cdot \frac{\partial^2 v_y^*}{\partial \varphi^2} + 2 \cdot \frac{\operatorname{tg}\varphi}{r_E} \cdot \frac{\partial v_y^*}{\partial \varphi} + 2\,\omega \cdot \cos\varphi. \tag{15}$$

Setzen wir nun die Gl. (13) und (15) in (12) ein, so ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 v_y^*}{\partial \varphi^2} - 2\,\frac{\partial v_y^*}{\partial \varphi}\cdot \operatorname{tg}\varphi = -\,2\,\omega^*\cdot r_E\cdot\left(\frac{2\,A_J\cdot\eta^*}{A_v}\cdot\operatorname{tg}\varphi - \cos\varphi\right). \tag{16}$$

Ein wenig polwärts von derjenigen Breite, wo der Westwind (im Mittel aller Schichten oberhalb 4 km) seinen Maximalwert hat, ist $\partial v_y^*/\partial\varphi = 0$. Im Mittel liegt diese Breite φ_0 wohl etwa bei 50°. Hier ist dann $\eta^* = \eta$ und die Gl. (16) nimmt folgende Form an:

$$\frac{\partial^2 v_y^*}{\partial \varphi^2} = -\,2\,\omega^*\cdot r_E\cdot\left(\frac{2\cdot A_J\cdot\eta}{A_v}\cdot\operatorname{tg}\varphi_0 - \cos\varphi_0\right). \tag{17}$$

Diese Gl. (17) gestattet eine numerische Bestimmung des Austauschverhältnisses $A_J\cdot\eta/A_v$ folgendermaßen:

$$\frac{A_J\cdot\eta}{A_v} = \frac{1}{2\operatorname{tg}\varphi_v}\cdot\left(\cos\varphi_0 - \frac{1}{2\cdot\omega^*\cdot r_E}\cdot\frac{\partial^2 v_y^*}{\partial\varphi^2}\right). \tag{18}$$

Hier setzen wir folgende Zahlenwerte ein:

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg}\varphi_0 \approx 1{,}2; && \cos\varphi_0 \approx 0{,}77;\\ &r_E \approx 6{,}4\cdot 10^6\,[\mathrm{m}]; && \omega^* \approx 7{,}5\cdot 10^{-5}\left[\frac{1}{\mathrm{sec}}\right];\\ &\frac{\partial^2 v_y^*}{\partial\varphi^2} \approx 300\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}\right] && \text{(erfahrungsgemäß),} \end{aligned} \tag{19}$$

und erhalten im Westwindmaximum:

$$\frac{A_J\cdot\eta}{A_v} \approx 0{,}25. \tag{20}$$

Nach dieser Gleichung ist es wahrscheinlich, daß in 50° Breite A_J und A_v in derselben Zehnerpotenz ($\approx 10^{13}$ [gr/sec]) liegen.

6. Planetarische Polarfront.

Der Hauptwert der vorstehenden Betrachtung liegt aber nun keineswegs in der numerischen Abschätzung dieser Austauschgröße A_J und A_v, sondern in folgender Überlegung:

Da (nach amerikanischen Beobachtungen) in *polaren Breiten* $\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\varphi} \approx 0$ gefunden wird, muß man nach der vorstehenden Theorie [Gl. (12)] dort annehmen:

$$\frac{A_J\cdot\eta^*}{A_v} \approx 0. \tag{21}$$

Dieses Ergebnis stimmt sehr gut zur Theorie des isotropen und monotropen Impulsaustausches [*4*]; im Polargebiet kann es *keine „Vorzugsachse"* des planetarischen Impulsaustausches geben, und dieserhalb muß dort $\eta = 0$, also bei geringem $\frac{\partial v_y^*}{\partial\varphi}$ auch $\eta^* \approx 0$ sein.

Vom planetarischen Austausch (oberer Schichten) her gesehen, darf man daher die Hemisphäre in drei Zonen teilen:

1. Die *Polarzone* als Herrschaftszone des *Vorticity-Austausches* oder, anders ausgedrückt, als Zone des *isotropen Impulsaustausches*.

2. Die *Westwindzone* als Zone einer gleich starken Gegenwirkung des Vorticity- und Rotationsmomentaustausches.

3. Die *Passatzone* als Zone überwiegenden *Mischungsaustausches* (der Rotationsmomente) bei geringem Vorticity-Austausch (abgesehen von einzelnen Einschubstörungen).

Die Grenze zwischen der Zone 1 und 2 nennen wir „*Planetarische Polarfront*". Vielleicht kann diese Auffassung der Polarfront, welche in nuce bereits durch Ferrels Theorie der allgemeinen Zirkulation [*1*] gegeben ist, auch für Wetterbetrachtungen fruchtbar werden. Denn die *Störungen* der Polarfront müssen doch wohl dem *Wesen* der Polarfront entsprechen.

Hierüber wird der Verfasser vielleicht demnächst Näheres mitteilen können.

Literaturverzeichnis.

1. Ferrel, W.: Amer. Journ. Science 1861; Prof. papers Sign. service XII. Washington 1882.

2. Oberbeck, A.: Sitz.-Ber. Preuß. Akad. Wiss. 1888, 383; Meteorol. Z. 1888, 305.

3. Prandtl, L.: Führer durch die Strömungslehre, S. 367. Braunschweig 1949.

4. Raethjen, P.: Arch. Met., Geoph. u. Biokl., A **3**, 173 (1951).

5. Rossby, C. G.: On the nature of the general circulation. In: G. P. Kuiper, The atmospheres of the earth and planets, p. 16. University of Chicago Press 1949.

6. Raethjen, P.: Arch. Met., Geoph. u. Biokl., A **2**, 207 (1950).

7. Kleinschmidt, E.: Meteor. Rdsch, **3**, 1, 54 (1950).

8. Bergeron, T.: Über die dreidimensional verknüpfende Wetteranalyse. Geoph. Publ. **V**, Nr. 6 (Oslo 1928).

551.515.21

(Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen.)

Grundlagen einer Theorie der tropischen Zyklonen.

Von

E. Kleinschmidt jun.

Mit 3 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Bei den tropischen Zyklonen strömt die Luft in den bodennahen Schichten zum Zentrum, in der mittleren Troposphäre wieder nach außen. Der Zustrom wird durch die Reibung an der Meeresoberfläche beherrscht, der Abstrom erfolgt in einem Feld dynamischer Feuchtindifferenz. Wenn ein Taifun neu entstehen soll, muß anfangs eine dynamische Labilität vorhanden sein. Eine solche tritt nur unter ganz speziellen, schwer zu erfüllenden Bedingungen auf. Für den ausgereiften Taifun werden mit Hilfe der Impuls- und Energiesätze eine Reihe Gesetze aufgestellt, die die wichtigsten Erscheinungen — Auge des Sturms, Sturmzone, Wolkenschirm usw. — erklären und ihr gegenseitiges Größenverhältnis zu berechnen gestatten. Nach diesen Gesetzen wird das Modell eines Taifuns entworfen.

Summary. In tropical cyclones the air near the ground flows towards the centre, in the middle troposphere it flows outwards. The inflow is governed by the friction on the surface of the sea, the outflow takes place in a field of dynamical moist-indifferent equilibrium. If a typhoon is to be developed, there must first be a dynamical instability. This occurs only under special conditions which cannot easily be met. For the fully developed typhoon a number of laws are stated by means of the principles of momentum and energy which explain the most important phenomena — eye of the storm, zone of the storm, cloud screen, etc. — and allow the calculation of their mutual ratio of magnitude. According to these laws the model of a typhoon is designed.

Résumé. Dans les cyclones tropicaux l'air des couches inférieures s'écoule vers le centre, celui de la troposphère moyenne vers l'extérieur. L'apport est dominé par le frottement à la surface de la mer; le flux expulsé a lieu dans un champ d'indifférence pseudolabile au point de vue dynamique. Pour qu'un typhon prenne naissance il faut qu'il y ait au préalable de la labilité dynamique, laquelle n'apparaît que dans des conditions toutes particulières, difficiles à remplir. Dans le cas du typhon bien développé on se sert des théorèmes de l'impulsion et de l'énergie pour établir une série de lois qui permettent

d'expliquer les principaux phénomènes (oeil de la tempête, région à vents violents, panache nuageux, etc.) et de calculer leurs ordres de grandeur respectifs. L'auteur propose un modèle de typhon conçu d'après ces lois.

Vorbemerkungen.

Über den Mechanismus der tropischen Zyklonen gab es bisher mehrere verschiedene Ansichten. Eine Gegenüberstellung findet sich bei Riehl [*1*]. Zu entscheiden, was an diesen Theorien richtig und was falsch ist, war lange Zeit unmöglich, da den Taifunen mit den aerologischen Meßgeräten nur sehr schwer beizukommen ist. Erst in den letzten zehn Jahren gelang es, Daten aus dem Innern tropischer Wirbelstürme zu erhalten. Zweimal konnte sogar der Aufstieg einer Radiosonde im windschwachen Auge des Sturmes durchgeführt werden [*2*, *3*], so daß wir heute über den thermischen Aufbau der Taifune gut unterrichtet sind. Auch sonst fehlt es nicht an neuen Hilfsmitteln; die Vermessung der Starkregenfelder durch Radar [*4*, *5*] sowie die unmittelbare Erkundung durch Flugzeuge [*6*] haben viele neue Tatsachen erbracht.

Die im folgenden entworfene Theorie hat das Ziel, möglichst viele Einzelheiten auf wenige einfache Prinzipien zurückzuführen. Daß ein so vielseitiges Gebilde wie der tropische Wirbelsturm immer einige Seiten aufweist, die nur durch verwickeltere Theorien erklärt werden können, liegt auf der Hand. Mit solchen können wir uns hier nicht befassen. Es geht nur um die Erklärung der grundlegenden Vorgänge.

Wie fast bei jeder Theorie atmosphärischer Vorgänge, muß eine Reihe vereinfachender Annahmen gemacht werden; ihre Berechtigung läßt sich an den später berechneten Modellen nachweisen. *1.* Der Durchmesser des Taifuns ist klein gegenüber der Entfernung vom Äquator, so daß die Coriolisparameter als unabhängig von der geographischen Breite gelten können. *2.* Der horizontale Anteil des Drehvektors der Erde wird vernachlässigt. Es werden also Verhältnisse angenommen, wie sie auf einer rotierenden Scheibe herrschen. *3.* Die Asymmetrien, die man häufig bei Taifunen beobachtet, sind Äußerlichkeiten und haben keinen entscheidenden Einfluß; der Idealtaifun ist somit kreissymmetrisch. *4.* Oberhalb der bodennahen Reibungsschicht ist das statische und das Gradientwindgleichgewicht in guter Näherung erfüllt. Legen wir um die Achse des Taifuns ein System von Zylinderkoordinaten, so gilt also

$$l\,v + \frac{v^2}{r} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{1}$$

und

$$-g = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{2}$$

(Es bedeutet: r den Abstand von der Achse, z die Höhe, $l = 2\,\omega \sin\varphi$ den Coriolisparameter, v die tangentiale Horizontalgeschwindigkeit, p den Druck, ϱ die Dichte, g die Schwerebeschleunigung.) Aus (1) und (2) folgt

$$l\,v + \frac{v^2}{r} = g\,\frac{\partial_p z}{\partial r}, \tag{3}$$

wo $\partial_p z/\partial r$ die Neigung der isobaren Flächen ist.

Für die kreissymmetrischen Felder folgt aus unserer *4.* Bedingung eine wesentliche Beschränkung. Während nämlich Tiefs beliebiger Stärke existieren können, ist das bei kreisförmigen Hochs nicht der Fall. Denn (3) ist eine quadratische Gleichung in v. Sie hat keine reelle Lösung, wenn ihre Diskriminante

$$D = l^2 r^2 + 4 g r \frac{\partial_p z}{\partial r} \tag{4}$$

negativ ist. In diesem Fall gibt es keinen Gradientwind, der das Hoch am Auseinanderfließen hindern könnte. Ist D dagegen positiv, d. h.

$$\frac{\partial_p z}{\partial r} > -\frac{l^2 r}{4 g}, \tag{5}$$

so gibt es zwei Lösungen v. Von diesen kommt nur eine in Frage, nämlich

$$v = -\frac{l r}{2} + \frac{\sqrt{D}}{2}. \tag{6}$$

Bei der anderen Lösung wäre der absolute Rotor des Windfeldes der Erdrotation entgegengerichtet, was in Taifunen nicht vorkommt.

Im Grenzfall, wenn in (5) an Stelle von $>$ das Gleichheitszeichen steht, bildet die isobare Fläche ein nach unten offenes Paraboloid:

$$z = z_{r=0} - \frac{l^2 r^2}{8 g}. \tag{7}$$

Dieses „Grenzhoch" ist in tropischen Breiten sehr flach. Selbst auf einer Breite von 20° sinkt das Paraboloid von der Achse bis zum Abstand von 500 km noch nicht einmal um 8 m ab, und der antizyklonale Wind in dieser Entfernung beträgt 12,5 m/s! Je näher am Äquator, um so weniger ausgeprägt können die kreisrunden Antizyklonen sein, entsprechend dem Faktor l^2 in (7).

Die Bedingung (5), wonach das Grenzhoch nicht überschritten werden darf, nennen wir im folgenden Grenzhochbedingung. Sie ist wichtig im Hinblick auf den warmen Kern der tropischen Zyklonen. Entsprechend den hohen Temperaturen des Kerns nimmt die am Boden vorhandene Depression nach oben rasch ab. Diese Abnahme darf nun nicht wesentlich über den Druckausgleich hinausführen. Deshalb können die Temperaturen im Kern nie eine gewisse obere Grenze überschreiten, die jeweils durch die Stärke des Bodentiefs gegeben ist. Im Vorstadium des Taifuns, wenn am Boden nur ein flaches Tief von wenigen Millibar liegt, kann die mittlere Temperatur der Troposphäre über dem zentralen Bereich um nicht viel mehr als 1° C höher liegen als im Umkreis. Andernfalls würden die Kernmassen unweigerlich infolge ihres statischen Auftriebes aufsteigen und sich oben ausbreiten.

Der Flächensatz und die dynamische Feuchtlabilität.

Die Bewegung der Luft im Taifun besteht aus dem zirkularen Wind v und einer Komponente senkrecht dazu. Diese zweite Komponente stellen wir durch einen Strom dar, dessen Stromlinien in den rz-Ebenen

liegen und den wir Vertikalstrom nennen. In seinem unteren Teil bildet er den Zufluß, im oberen Teil den Ausfluß aus dem Taifun. Die Bewegung im Vertikalstrom erfolgt nahezu unbeschleunigt, da die rz-Komponenten der reellen Kräfte (Druck, Schwere, Reibung) und die der Scheinkräfte (Zentrifugal- und Corioliskraft) in fast völligem Gleichgewicht stehen.

In Richtung der Komponente v wirkt weder eine Druck- noch die Schwerkraft. Deshalb lautet hier die Eulersche Bewegungsgleichung

$$\frac{dv}{dt} = -l\frac{dr}{dt} - \frac{v}{r}\frac{dr}{dt}. \tag{8}$$

Das Integral dieser Differentialgleichung ist

$$r\left(v + \frac{l\,r}{2}\right) = A, \tag{9}$$

wo A eine Konstante ist. Die Gleichung schreibt dem einzelnen Luftquantum, das sich in wechselndem Abstand von der Achse bewegt, eine ganz bestimmte Änderung seiner Tangentialgeschwindigkeit vor, unabhängig von der speziellen Gestalt des kreisförmigen Druckfeldes. Die linke Seite von (9) ist der absolute, d. h. in einem Inertialsystem gemessene Drehimpuls der Masseneinheit bezüglich der Taifunachse. Die Gleichung selbst ist der sogenannte Flächensatz, der die Konstanz dieses Drehimpulses fordert.

Für den in Bodennähe erfolgenden Zufluß gilt weder (8) noch (9). Denn hier spielt die Bodenreibung eine entscheidende Rolle. Der einströmenden Luft, die ursprünglich dank ihrer achsenfernen Lage einen sehr hohen absoluten Drehimpuls besaß, auch wenn sie dabei ganz ruhig lag, wird ein großer Teil dieses Impulses durch die Reibung entzogen. Anders dagegen im Abstrom des Taifuns, der in nahezu reibungsfreien Höhen verläuft. Hier muß sich das einzelne Teilchen, mindestens in gewisser Näherung, nach dem Flächensatz richten.

Man hat geglaubt, daß diese Tatsache schwer oder gar nicht mit den Beobachtungen in Einklang zu bringen sei [7]. Entnimmt man nämlich v der Gl. (9) und setzt es in (1) ein, so erhält man für jede Stromlinie im reibungsfreien Raum

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{A^2}{r^3} - \frac{l^2 r}{4} \quad \text{mit } A = \text{const}. \tag{10}$$

Nimmt man nun an, daß das Ausströmen horizontal erfolgt, so ist (10) eine Differentialgleichung für das radiale Druckprofil in der Höhe des Ausflusses, wobei natürlich die Achse als singuläre Stelle ausgenommen werden muß. Hier befindet sich ja auch das Auge, dessen Massen am Vertikalfluß nicht teilnehmen.

Die Massen des Vertikalstroms besitzen beim Verlassen der Bodenreibungsschicht immer noch einen hohen absoluten Drehimpuls A. Infolgedessen müßte, damit sie wieder ausströmen könnten, das radiale Druckprofil vom Rand des Auges bis zum Außenrand des Taifuns eine starke negative Krümmung besitzen. Das ist nun sicher nicht der Fall. Gerade

die neuen Messungen aus dem Innern [2, 3] beweisen, daß das Druckfeld in keiner Höhenschicht (außer in Bodennähe) auch nur entfernt der Gl. (10) entspricht.

Der Widerspruch löst sich dadurch, daß die Luft — man vergleiche dazu Abb. 2 — sofort nach dem Verlassen der Reibungsschicht auszuströmen beginnt, aber nicht horizontal, sondern steil nach oben (in der Natur anfangs etwa unter 45°). Infolgedessen muß die einzelne Höhenschicht nur über ein kurzes Stück das von (10) geforderte Druckgefälle aufweisen. Da fernerhin der Kern des Taifuns warm ist, nimmt der horizontale Druckgradient nach oben ab. Auf diese Weise ist es möglich, daß (10) auf jeder Stromlinie des Abstroms tatsächlich erfüllt ist. Diesen Zustand bezeichnet man als dynamisch feuchtindifferent. Denn ein längs der Stromlinie verschobenes Teilchen befindet sich überall im Gleichgewicht. Das dynamisch indifferente Gleichgewicht geradliniger Stromfelder hat der Verfasser in [8] untersucht. Die dortigen Ergebnisse lassen sich sinngemäß auf Kreisstromfelder übertragen.

Die mächtige Wolkenmasse, die sich bei jeder tropischen Zyklone etwa zwischen 4 und 10 km Höhe schirmartig ausbreitet, befindet sich im feuchtindifferenten Zustand. In ihr erfolgt das Ausströmen aus dem Taifun. Genau genommen herrscht eine schwache dynamische Labilität, die die Energie zur Überwindung der inneren Reibung des Ausflusses liefert. Davon können wir hier aber absehen.

Dynamische Indifferenz verlangt statische Stabilität. Die Wolke muß also feuchtstabil geschichtet sein. Tatsächlich zeigen die Radiosonden im Bereich des Vertikalstroms sowohl einzeln [3] wie gemittelt [9] oberhalb 5 km eine deutliche Feuchtstabilität. Bemerkenswert ist, daß auch im Monatsmittel über dem Karibischen Meer der September diese Stabilität ab 550 mb deutlich aufweist, während sie im Februar erst bei etwa 350 mb beginnt [10]. Hier dürfte mit ein Grund liegen, warum die Taifune nur im Sommer und Herbst aufzutreten pflegen. Denn das Ausströmen in der statisch feuchtstabilen Schicht ist der primäre Vorgang in den tropischen Zyklonen. Wenn die Schichtung bis hoch hinauf feuchtlabil ist, entstehen allenfalls Cumulonimben, aber kein Taifun.

In den untersten 3 bis 5 km herrscht über den tropischen Meeren fast immer eine merkliche Feuchtlabilität. Diese Schicht muß in der Sturmzone des Taifuns vollständig zur bodennahen Reibungsschicht gerechnet werden. Denn die stürmische Bewegung veranlaßt eine lebhafte Konvektion mit heftigen Regenschauern. Durch den starken Vertikalaustausch wird die Ekmansche Reibungsspirale verzerrt. Die Reibungshöhe liegt in der Nähe der Cumulus-Köpfe und steigt gegen das Innere des Taifuns an (Abb. 2). Die Reibungsschicht hängt in dem Nimbostratus-Ringwall, der das Auge umschließt, mit der dynamisch indifferenten Abstromwolke zusammen.

Die von Wexler [5] ausgewerteten Radaraufnahmen der starken Schauerregen zeigen, daß die Konvektionsströme in Banden angeordnet sind, die mit den Stromlinien des Sturms spiralförmig gegen das Innere

verlaufen. Diese Erscheinung beruht auf der starken Windscherung der Reibungsschicht; sie wurde von SOBHAG MAL [*11*] experimentell nachgewiesen.

Der Ausgangszustand für tropische Zyklonen.

Ehe wir an die Durchrechnung der ausgebildeten Zyklone gehen, untersuchen wir, aus welcher Anfangslage heraus ein Taifun sich entwickeln kann. Die wichtigste Voraussetzung ist nach dem letzten Abschnitt eine dynamische Feuchtlabilität in der statisch stabilen Schicht. Es erhebt sich die Frage, wann eine solche vorhanden ist.

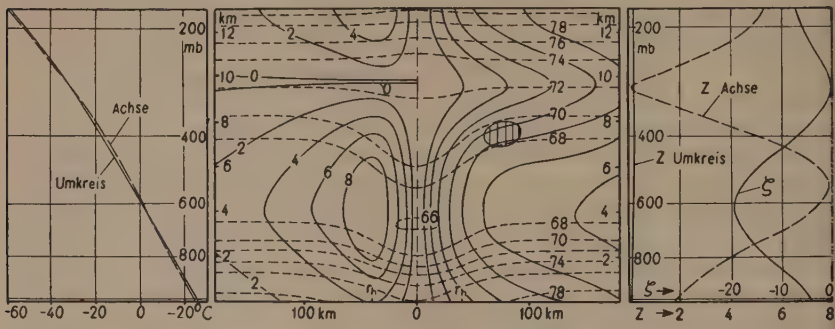


Abb. 1. Mittleres Feld: Schnitt durch eine Störung mit dynamischer Feuchtlabilität. Gestrichelt Linien gleicher feuchtpotentieller Temperatur; außerdem linke Hälfte Linien gleicher Gradientwindstärke (m/s), rechte Hälfte Wirbellinien des absoluten Windfeldes. Schraffiert: Zone dynamischer Labilität. Rechtes Feld: Z-Verteilung, Z in 10^{-7} cgs, und Einsenkung ζ der Druckflächen in m.

Abb. 1 zeigt im Mittelteil einen Vertikalschnitt. In eine sonst windstille Atmosphäre ist eine kreisrunde, nach außen abklingende „Störung" eingelagert. Mit dem Wort Störung ist gemeint, daß hier Massen mit anderen Z-Werten liegen als in der ungestörten Atmosphäre. (Die ERTELsche Größe Z und ihre Bedeutung für das Druckfeld hat der Verfasser in [*12*, *13*] behandelt.) Auf der linken Seite zeigt Abb. 1 die Temperatur auf der Achse der Störung und im windstillen Außenraum. Im Vertikalschnitt sind die Linien gleicher feuchtpotentieller Temperatur gestrichelt eingetragen, ferner links die Linien gleicher Gradientwindstärke v, rechts die absoluten Wirbellinien des Gradientwindfeldes. Deren Neigungswinkel α ist gegeben durch

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{l + v/r + \partial v/\partial r}{-\partial v/\partial z}. \tag{11}$$

Führt man hier mit Hilfe von (9) den absoluten Drehimpuls ein, so findet man, daß

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\partial A}{\partial r} \Big/ \frac{\partial A}{\partial z} \tag{12}$$

ist. Also sind die Wirbellinien gleichzeitig Linien gleichen absoluten Drehimpulses.

Gewöhnlich verlaufen die Wirbellinien steiler als die Feuchtisentropen. Wo sie flacher liegen, nimmt der Drehimpuls längs der Feuchtisentropen nach außen ab, und damit ist die Lage dynamisch labil. Das ist in dem schraffierten Bereich des Vertikalschnittes der Fall, also in einer Zone, die sich ringförmig in einigem Abstand um die Achse zieht.

Die Berechnung des in Abb. 1 gezeigten Modells geschieht in folgender Weise: Die Höhenlage der isobaren Flächen ist gegeben in der Form

$$z\,(p, r) = z_\infty\,(p) + \frac{\zeta\,(p)}{1 + r^2/r_h^2}. \tag{13}$$

Dabei ist z_∞ die Höhe der Druckfläche in der ungestörten Atmosphäre ($r = \infty$), ζ die durch die Störung bewirkte Überhöhung auf der Achse, r_h der Radius, bis zu dem die Störung auf die Hälfte abklingt. Dieser Radius sei für alle p derselbe, die Störung sei also zylindrisch aufgebaut.

Das zugehörige Gradientwindfeld läßt sich aus Gl. (3) berechnen, wenn man dort z aus (13) einsetzt. Man findet

$$v = -\frac{l\,r}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{l^2\,r^2 - 8\,g\,\zeta\,(p)\,r^2\,r_h^2/(r^2 + r_h^2)^2}. \tag{14}$$

Dies setzen wir in (11) ein. Dabei ist zu bemerken, daß v durch (14) nicht als Funktion von r und z, sondern von r und p gegeben ist, wobei p selbst von r und z abhängt. Beachtet man dies, so erhält man nach einiger Rechnung als Steigung der absoluten Wirbellinien in unserem Modell

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{l^2\,(r^2 + r_h^2)^3 - 8\,g\,\zeta\,r_h^4}{2\,g\,r\,r_h^2\,(r^2 + r_h^2)\,\dfrac{\partial\zeta}{\partial p}\,\dfrac{\partial p}{\partial z}} - \frac{\partial p}{\partial r}\Big/\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{15}$$

In dieser Formel läßt sich $\dfrac{\partial\zeta}{\partial p}\,\dfrac{\partial p}{\partial z}$ noch durch die Temperaturstörung ausdrücken. Bezeichnen wir die *isobare* Temperaturdifferenz zwischen Achse und Außenraum mit ΔT, so ist nämlich

$$\frac{\partial\zeta}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\Delta T}{T}. \tag{16}$$

Beweis: Für $r = 0$ (Index 0) geht (13) über in

$$z_0\,(p) = z_\infty(p) + \zeta\,(p).$$

Daraus folgt sofort

$$\frac{\partial\zeta}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial z} = \left(\frac{\partial z_0}{\partial p} - \frac{\partial z_\infty}{\partial p}\right)\cdot\frac{\partial p}{\partial z}$$

und weiter aus der statischen Grundgleichung (2)

$$\frac{\partial\zeta}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial z} = \left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_\infty}\right)\cdot\varrho.$$

Schließlich liefert die Gasgleichung $p/\varrho = RT$ und die Definition $\Delta T = T_0 - T_\infty$ die zu beweisende Beziehung (16).

Auf demselben Wege gelangt man zum nächsten Ziel, zu der Gleichung für die Steigung der Feuchtisentropen. Differenziert man (13) nach p, berücksichtigt wieder statische Grundgleichung und Gasgleichung, so findet man zunächst, daß das isobare Temperaturfeld in derselben Weise von r abhängt wie die Höhe der Druckflächen:

$$T(p, r) = T_\infty(p) + \frac{\Delta T(p)}{1 + r^2/r_h^2}. \tag{17}$$

Der *isobare* Temperaturgradient ist demnach

$$\frac{\partial_p T}{\partial r} = -\frac{2 r r_h^2 \Delta T}{(r^2 + r_h^2)^2}. \tag{18}$$

Nun machen wir davon Gebrauch, daß man die feuchtpotentielle Temperatur für konstanten Druck sehr genau als lineare Funktion von T darstellen kann:

$$\Theta = a(p) + b(p) \cdot T, \tag{19}$$

jedenfalls in den kleinen Bereichen, die durch die Temperaturkurven der Abb. 1 begrenzt werden. Aus (18) und (19) ergibt sich der isobare Gradient von Θ:

$$\frac{\partial_p \Theta}{\partial r} = b(p) \frac{\partial_p T}{\partial r} = -b(p) \frac{2 r r_h^2 \Delta T}{(r^2 + r_h^2)^2}. \tag{20}$$

Der *horizontale* Gradient hängt mit dem isobaren zusammen durch die Formel

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} = \frac{\partial_p \Theta}{\partial r} + \frac{\partial \Theta}{\partial z} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} \Big/ \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{21}$$

Hier setzen wir (20) ein und dividieren dann durch $-\partial\Theta/\partial z$ (welche Größe wir weiterhin mit Γ bezeichnen). So erhalten wir die Formel für den Steigungswinkel β der Feuchtisentropen:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b \Delta T}{\Gamma} \frac{2 r r_h^2}{(r^2 + r_h^2)^2} - \frac{\partial p}{\partial r} \Big/ \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{22}$$

Die Bedingung für dynamische Labilität,

$$\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta,$$

läßt sich nun mit Hilfe von (15), (16) und (22) ausführlich hinschreiben. Sie lautet, wenn wir noch die dimensionslose Größe $x = r/r_h$ einführen:

$$\boxed{\frac{T\Gamma}{4 g b (\Delta T)^2} \left(l^2 r_h^2 \frac{(1 + x^2)^4}{x^2} - 8 g \zeta \frac{1 + x^2}{x^2} \right) < 1.} \tag{23}$$

Das ist die eigentliche Bedingung für die Entstehung tropischer Zyklonen.

Zu der Forderung dynamischer Labilität tritt die der statischen Stabilität:

$$\Gamma > 0. \tag{24}$$

Ferner fügen wir noch die *Grenzhochbedingung* hinzu. Sie ist in der Atmosphäre eo ipso erfüllt, muß aber bei der Konstruktion eines Modells ausdrücklich beachtet werden. Bildet man $\partial_p z/\partial r$ durch Ableitung von (13) nach r und setzt es in die Grenzhochbedingung (5) ein, so zeigt

sich, daß diese Bedingung in unserem Modell, d. h. bei dem Ansatz (13), am schwersten auf der Achse zu erfüllen ist. Für $r = 0$ geht sie aber über in

$$\zeta < \frac{l^2 r_h^2}{8 g}. \tag{25}$$

Diese spezielle Form der Grenzhochbedingung hat, wie man leicht feststellt, zur Folge, daß der Klammerausdruck in (23) stets positiv ist. Ferner sieht man, daß sein Wert sowohl für $r \to 0$, wie für $r \to \infty$ über alle Grenzen wächst. Also ist der labile Bereich stets ein ringförmiges Gebilde. Eine gewisse Umgebung der Achse bleibt immer dynamisch stabil. Hier ist schon in der Ausgangslage das Auge des Taifuns vorgebildet.

Wir fragen nun: Wie müssen wir die Einzelgrößen wählen, damit (23) erfüllt ist? Die Größen T, g und b bewegen sich in engen Grenzen, können also nicht viel zur Labilität beitragen. Auch werden für sie im folgenden immer nur Mittelwerte eingesetzt. Ferner ist zu beachten, daß der Wert von x, also der normierte Abstand von der Achse, keinen Einfluß auf die Wahl der übrigen Größen hat. Denn in jedem Fall, d. h. für jedes r_h, durchlaufen die beiden Brüche in x von $r = 0$ bis $r = \infty$ denselben Wertevorrat.

Von den übrigen Größen hängen drei, nämlich Γ, ΔT und ζ in bestimmter Weise voneinander ab. Ein hohes ΔT, an sich wünschenswert, hat laut statischer Grundgleichung ein rasches Anwachsen von ζ nach oben zur Folge, so daß die durch (25) gegebene Grenze bald erreicht wird, wenn ζ nicht einen genügend hohen negativen Wert besitzt. Man kann zwar ΔT nach oben rasch abnehmen lassen, doch ist das um so weniger möglich, je geringer die mittlere statische Stabilität ist. Der Zusammenhang ist derart, daß im günstigsten Fall

$$\zeta \text{ angenähert proportional} - \frac{(\Delta T)^2}{\Gamma} \tag{26}$$

sein muß. Der „günstigste Fall" ist der, wo eine Depression nach oben gerade bis zum Grenzhoch, d. h. praktisch bis zum Druckausgleich abnimmt. In unserem Modell (Abb. 1) ist dieser Fall angenommen. Der Druckausgleich liegt in 9700 m Höhe, darüber beginnt eine neue, schwächere Depression. Würde man nicht den günstigsten Fall annehmen, so wäre eine dynamische Labilität kaum zu erreichen. Denn gerade der Druckausgleich ist es, der in Abb. 1 den flachen Verlauf der Wirbellinien in der Höhe des labilen Ringes bewirkt.

Aus der Forderung (26) folgt, daß der zweite Summand auf der linken Seite von (23) sich ebenfalls in ziemlich engen Grenzen bewegen muß und daß infolgedessen die dynamische Labilität hauptsächlich von der Wahl des Ausdrucks

$$\frac{\Gamma l^2 r_h^2}{(\Delta T)^2}$$

abhängt. Zwischen dessen Einzelgrößen besteht keinerlei Abhängigkeit mehr. Hiernach gibt es außer dem Druckausgleich in der Höhe, der geradezu notwendig ist, noch drei günstige Momente für die Bildung von

Taifunen: 1. Geringe statische Feuchtstabilität, 2. starker radialer Temperaturgradient, 3. niedere geographische Breite. Schon auf 20° Breite muß man einen abnorm steilen Temperaturanstieg zum Kern annehmen, um einen labilen Ring zu erhalten. Natürlich darf man aus der Formel (23) nicht den Schluß ziehen, der Äquator sei der günstigste Ort für die Bildung von Taifunen; denn am Äquator fehlt die Coriolis-kraft, die für die weitere Entwicklung des Taifuns unentbehrlich ist.

Dem Modell liegen folgende Daten zugrunde: $\varphi = 8°$, l also $= 2 \cdot 10^{-5}\,s^{-1}$, ferner im 400 mb-Niveau, wo der labile Ring liegen soll $T = 257°$, mittleres $\Gamma = 0{,}9°\,\Theta/1000$ m, $\zeta = -7{,}2$ m, $\Delta T = 1{,}5°$ C $r_h = 40$ km. Mit diesen Werten geht (23) über in

$$0{,}00076\,\frac{(1+x^2)^4}{x^2} + 0{,}654\,\frac{1+x^2}{x^2} < 1$$

und ist erfüllt für $1{,}45 < x < 2{,}305$, d. h. für 58 km $< r <$ 92 km.

Rechts in Abb. 1 ist dargestellt die Einsenkung der Druckflächen (ζ und die Z-Verteilung auf der Achse und im Außenraum. Die für drohende Taifungefahr typische Z-Verteilung ist hiernach: engbegrenzte Masse von hohem Z mit dem Schwerpunkt in etwa 5 km Höhe, darüber rascher Übergang zu unternormalem Z. Das letzte ist notwendig, denn nur unternormales Z kann die Wirkung der hochzyklonalen Masse bis zum Druckausgleich kompensieren. Die erneute Zunahme von Z in unserem Modell oberhalb 10 km ist nicht wesentlich, kann also auch fehlen.

Für die Vorhersage brauchbarer ist eine Aussage über Druck- und Temperaturfeld: Schwache Feuchtstabilität, engbegrenztes Tief im 500 mb-Niveau mit 10 bis 20 m Einsenkung der Druckflächen, darüber rasche Abnahme der Depression, möglichst über den Druckausgleich hinaus. Die Hauptpunkte dieser Regel, nämlich das Tief in der mittleren, das (flache) Hoch in der oberen Troposphäre, sind bereits empirisch gefunden [*14*]. Wenn Riehl anderseits betont, daß die Anfangs-störung immer einen kalten Kern habe, so stimmt das auch, aber nur zwischen dem Boden und etwa 5 km Höhe. Darüber muß die Störung einen warmen Kern haben, und hier oben nimmt der Taifun seinen Aus-gang.

Im übrigen ist die Taifunbedingung (23) zu subtil, als daß sie durch das Druck- oder das Z-Feld hinreichend beschrieben werden könnte. Die Durchrechnung eines Modelles zeigt, wie stark sich schon kleinste Änderungen der Daten auswirken, wie sie den Labilitätsbereich weit ausdehnen oder ganz zum Verschwinden bringen können. Überhaupt ist der vollkommene Druckausgleich oder gar das Grenzhoch ein derart spezieller Fall bei den kleinräumigen kreisrunden Störungen, daß man sich nicht über die Seltenheit der Taifune zu wundern braucht.

Es wäre nun zu untersuchen, wie weit gewisse Wetterlagen, die als taifun-anfällig bekannt sind, wie das Rodewaldsche Dreimasseneck [*15*] mit obigen Bedingungen übereinstimmen. Das ist im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich. Nur auf eines sei hingewiesen: Wenn sich ein Taifun entwickeln soll, muß zu Beginn der dynamisch labile Bereich

auch wirklich einen geschlossenen Ring bilden. Andernfalls sind die Anfangswiderstände zu groß, um den eigentlichen Taifun in Gang zu bringen. Ein geschlossener Ring ist nur möglich in der Nähe des thermischen Äquators, wo die absoluten Wirbellinien gelegentlich senkrecht verlaufen. In den Westwindzonen treten zwar auch dynamisch feuchtlabile Bereiche auf. Sie sind aber nicht ringförmig geschlossen. Denn in ihnen steigen alle Wirbellinien nach einer Richtung, nämlich zur höheren Breite hin an. Eine aktive Westströmung ist deshalb, was ebenfalls RIEHL schon empirisch gefunden hat, geradezu taifun-feindlich. Aus ihren dynamisch labilen Bereichen entstehen die Warmfronten der gemäßigten Breiten.

Wie kommt es nun zu einer gefährlichen Ausgangslage? Es gibt da *zwei Möglichkeiten*. Entweder entsteht die Lage auf advektivem Wege; wenn mit der Passatströmung Massen von hohem Z nach Westen ziehen, während in die darüberliegende schwache Westströmung Massen von geringem Z eingelagert sind, muß es gelegentlich zur gefährlichen Z-Verteilung kommen. Die andere Möglichkeit ist das Wirken nichtadiabatischer Vorgänge; hier könnte die verbreitete Schauertätigkeit, die der Taifunbildung vorangeht, eine Rolle spielen.

Der stationäre Abstrom im voll entwickelten Taifun.

Über die Entwicklung der tropischen Zyklone aus der Ausgangslage des letzten Abschnitts wird in dieser Arbeit nichts Näheres ausgesagt. Wir wenden uns gleich dem Zustand des ausgebildeten Taifuns zu. Auf die Untersuchung des instationären Zwischenstadiums kann um so leichter verzichtet werden, als der Endzustand zwar in starkem Maße vom Aufbau der Außenatmosphäre, aber gar nicht von der speziellen Form der Anfangsstörung abhängt. Von dieser wird nur verlangt, daß sie eine dynamische Feuchtlabilität aufweist, die genügend Energie entwickeln kann, um die Anfangswiderstände zu überwinden. Wenn erst die eigentliche Energiequelle — die von der sturmgepeitschten See an die Luft abgegebene Wärme — erschlossen ist, dann strebt der Taifun einem nahezu stationären Zustand zu, der mit der ursprünglichen Labilität nichts gemein hat. Da der ausgereifte Taifun ein in sich stabiles Gebilde ist, stellt seine Entstehung nichts als den Übergang von einem instabilen in einen stabilen Zustand dar.

Wir beginnen bei dem primären Teil des Taifuns, dem Abstrom in der oberen, statisch stabilen Schicht. Im stationären Zustand muß auf jeder Stromlinie des Abstroms einheitliche feuchtpotentielle Temperatur und einheitlicher absoluter Drehimpuls herrschen. Also ist A im Abstrom eine reine Funktion von Θ. Was wir suchen, ist wieder eine Gleichung für die Steigung der feuchtisentropen Flächen, jetzt aber unter der Bedingung $A = A(\Theta)$. Dazu differenzieren wir (1) nach z, (2) nach r, bilden die Differenz und erhalten

$$\left(l + 2\frac{v}{r}\right)\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \varrho}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r}\frac{\partial \varrho}{\partial z}\right). \tag{27}$$

Die Dichte ϱ fassen wir als Funktion des Drucks und der feuchtpotentiellen Temperatur auf: $\varrho = \varrho\,(p, \Theta)$. Für die räumlichen Ableitungen von ϱ gilt

$$\frac{\partial \varrho}{\partial r} = \frac{\partial \varrho}{\partial \Theta}\frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial \varrho}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varrho}{\partial z} = \frac{\partial \varrho}{\partial \Theta}\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\partial \varrho}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Setzt man dies in (27) ein, so folgt

$$\left(l + 2\,\frac{v}{r}\right)\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial \varrho}{\partial \Theta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \Theta}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r}\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right) \tag{28}$$

und weiter mit Hilfe von (2) die Gleichung

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{\partial \Theta}{\partial r}\Big/\frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{\varrho}{g\,\dfrac{\partial \varrho}{\partial \Theta}\dfrac{\partial \Theta}{\partial z}}\left(l + 2\,\frac{v}{r}\right)\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial r}\Big/\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{29}$$

Ihr entspricht für die Ausgangslage die Gl. (22). Jetzt führen wir den absoluten Drehimpuls ein. Aus (9) folgt

$$v = \frac{A}{r} - \frac{l\,r}{2}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial z} \tag{30, 31}$$

oder, da A allein von Θ abhängt,

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{dA}{d\Theta}\frac{\partial \Theta}{\partial z}. \tag{32}$$

Ferner bedenken wir, daß $\partial\varrho/\partial\Theta$ die Ableitung bei konstantem Druck ist, so daß aus der Gasgleichung $\varrho = p/RT$ folgt:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial \Theta} = -\frac{1}{T}\frac{\partial_p T}{\partial \Theta},$$

wofür nach (19) geschrieben werden kann

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial \Theta} = -\frac{1}{T\,b}. \tag{33}$$

Setzen wir (30), (32) und (33) in (29) ein, so erhalten wir das Gesetz für die Steigung der Stromlinien im Abstrom:

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{2\,T\,b}{g\,r^3}A\frac{dA}{d\Theta} - \frac{\partial p}{\partial r}\Big/\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{34}$$

$A\,dA/d\Theta$ hat auf jeder Stromlinie einen konstanten negativen Wert. Da T und b näherungsweise ebenfalls als konstant gelten können, nähern sich die Stromlinien ungefähr mit r^{-3} den isobaren Flächen, deren Steigung durch das zweite Glied der rechten Seite gegeben ist.

Integriert man (34) über r, so erhält man die Höhenfunktion $z\,(r)$ einer Stromlinie. Da gegen das Innere hin die Senkung der Druckflächen viel kleiner ist als der Abfall der Feuchtisentropen, so gilt für die inneren Teile der Stromlinie — T und b sind als konstant vorausgesetzt —

$$z\,(r) = \frac{T\,b}{g\,r^2}A\frac{dA}{d\Theta} + \mathrm{H} \tag{35}$$

mit H als Integrationskonstante. In den äußeren Teilen ist $\operatorname{tg}\beta$ nach (34) so klein, daß die Stromlinie praktisch horizontal verläuft. Da das Temperaturfeld des Abstroms stetig in die Außenatmosphäre übergehen muß

ist H ungefähr die Höhe, in der im Außenraum die feuchtpotentielle Temperatur der Stromlinie angetroffen wird.

$A\,dA/\Theta$ ist, wie schon erwähnt, eine negative Größe. Denn A nimmt gegen das Auge hin ab, weil die zuströmenden Massen durch die Bodenreibung Drehimpuls verlieren, und Θ wird in der Sturmzone durch das Verdampfen des Meerwassers ständig erhöht. Im übrigen sei hier schon bemerkt, daß es die Unsicherheit in der Bestimmung von $A\,dA/d\Theta$ ist, was vorläufig den Versuch, einen Taifun vollständig aus den äußeren Umständen zu berechnen, scheitern läßt.

Der stationäre Zustrom in der bodennahen Reibungsschicht.

Die in den Taifun einströmenden Massen bringen von außen einen hohen absoluten Drehimpuls mit, auch wenn sie ursprünglich fast still

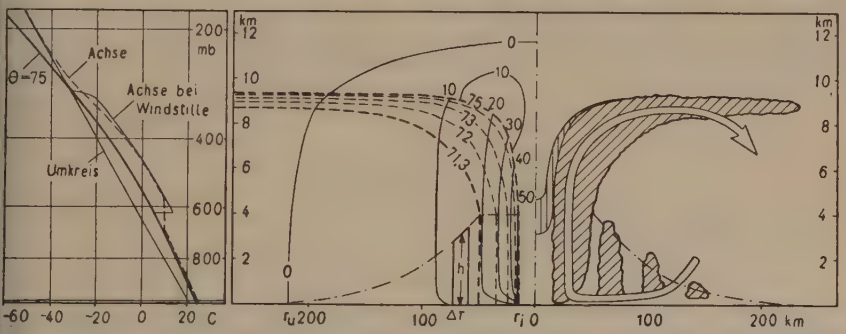


Abb. 2. Schnitt durch einen Taifun mäßiger Stärke. Gestrichelt: Linien gleicher feuchtpotentieller Temperatur. Ausgezogen: Linien gleicher Gradientwindstärke (m/s).

lagen. Einen großen Teil davon verlieren sie durch die Bodenreibung. Wir stellen für einen ringförmigen Abschnitt der Reibungsschicht die Bilanz des absoluten Drehimpulses auf. Der Querschnitt des Rings, von der Breite Δr und der Höhe h ist in Abb. 2 eingezeichnet. Der Einfachheit halber werde die Dichte ϱ in der ganzen Reibungsschicht als konstant angesehen. Auch muß die oben erwähnte Tatsache, daß der Austausch in der Reibungsschicht bandenförmig geordnet verläuft, hier unterschlagen werden. Es werde vielmehr isotrope Turbulenz angenommen.

Der Massenfluß durch eine senkrechte Wand des Rings ist

$$2\pi\varrho r\int_0^h u\,dz \quad (u = \text{Radialgeschwindigkeit}). \tag{36}$$

Differenzieren wir diesen Ausdruck nach r und multiplizieren mit Δr, so erhalten wir den sekundlichen Massenverlust im Ring, der auf den Fluß durch die senkrechten Wände zurückzuführen ist:

$$2\pi\varrho\,\Delta r\frac{\partial}{\partial r}\int_0^h r\,u\,dz. \tag{37}$$

Da sich die Masse im Ring nicht ändern soll, muß durch den Deckel dieselbe Masse pro Sekunde einfließen.

Der absolute Drehimpuls ist durch (9) gegeben. Bezeichnen wir mit V den Gradientwind am oberen Rand der Reibungsschicht, so beträgt der Verlust an Drehimpuls infolge des Flusses durch Wände und Deckel des Rings

$$2\pi\varrho\,\Delta r\,\frac{\partial}{\partial r}\int_0^h r^2 u\left(v+\frac{l}{2}r\right)dz - 2\pi\varrho\,\Delta r\left(V+\frac{l}{2}r\right)\frac{\partial}{\partial r}\int_0^h r\,u\,dz. \quad (38)$$

Ferner verliert die Volumeinheit durch die Scheinreibung sekundlich an Drehimpuls

$$-r\,\frac{d\tau}{dz}.$$

Dabei ist τ die Schubspannung an einer horizontalen Fläche in Richtung des Gradientwinds. Der ganze Ring verliert durch Reibung

$$-2\pi\,\Delta r\,r^2\int_0^h \frac{d\tau}{dz}\,dz = 2\pi\,\Delta r\,r^2\,\tau_B, \quad (39)$$

wo τ_B die zum Radius senkrechte Komponente der Bodenschubspannung ist. Die Schubspannung am Deckel des Rings konnte, da gegen τ_B sehr klein, in (39) weggelassen werden.

Die Formeln (38) und (39) enthalten alle Einzelposten der gewünschten Bilanz. Ehe wir diese aber hinschreiben, soll (38) noch eine andere Darstellung erfahren. Sie schließt sich an die Methoden an, die PRANDTL in seiner Strömungslehre [*16*] entwickelt hat. Das Folgende kann deshalb kurz gefaßt werden.

Für die Strömung in der Reibungsschicht wird angesetzt

$$v = V\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad u = -v\left(1-\frac{z}{h}\right)\operatorname{tg}\gamma. \quad (40)$$

γ ist der Ablenkungswinkel des Bodenwindes gegen den Gradientwind, n ist eine Zahl von der Größenordnung 10, die mit der Turbulenz anwächst. Die Windverteilung (40) ersetzt bei turbulenter Strömung die EKMAN-Spirale, die ja für laminare Strömung abgeleitet ist. PRANDTL hat für den Fall einer gleichmäßigen und geradlinigen Strömung gezeigt, wie h und γ mittels der Impulssätze berechnet werden können. Eine entsprechende Rechnung für den Zustrom der Taifune würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Es muß hier genügen, daß mit Hilfe einiger einfacher Annahmen, die sich auf PRANDTLS Ergebnisse stützen, das Wesentliche der bodennahen Strömung deutlich wird.

Die Zahl n soll über den ganzen Bereich des Zustroms als konstant gelten. Ebenso wird γ, im Einklang mit der Beobachtung, als etwa konstant angesehen. Das gilt jedoch nicht im innersten Bereich der Sturmzone. Dort geht γ mit Annäherung an das Auge gegen Null. Setzt

man (40) in (38) ein, so lassen sich die Integrale von (38) ausführen. Die Forderung, daß in unserem Ring der Drehimpuls zeitlich konstant sein soll, erhält dabei die Form

$$\frac{V^2 h + rV\frac{\partial}{\partial r}(Vh) - l\,r\,Vh}{(n+1)(2n+1)} - \frac{2V^2 h + r\frac{\partial}{\partial r}(V^2 h)}{(n+2)(2n+2)} = \frac{-r\tau_B}{\varrho\,\mathrm{tg}\,\gamma\,n^2}. \quad (41)$$

Für die Reibungshöhe machen wir die Annahme

$$h = m\frac{V}{l} \quad (m = \text{Zahl}). \quad (42)$$

Damit wird aus (41) eine Differentialgleichung für V allein, nämlich

$$\frac{\partial V}{\partial r}(n-2{,}5) + \frac{V}{r}(n-1) + l(n+2) = l\,\frac{\tau_B (n+1)(n+2)(2n+1)}{\varrho V^2\,\mathrm{tg}\,\gamma\,m\,n^2}. \quad (43)$$

Nun ist die Bodenschubspannung τ_B näherungsweise proportional ϱV^2. Also bilden die Größen auf der rechten Seite von (43) insgesamt eine Konstante K und das Integral der Differentialgleichung läßt sich geschlossen angeben:

$$\text{mit} \quad \left.\begin{aligned} V &= C\left(\frac{r_u^{\mu}}{r^{\mu-1}} - r\right) \\ C &= l\,\frac{n+2-K}{2n-3{,}5} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{2n-3{,}5}{n-2{,}5}. \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Das ist ein Näherungsgesetz für den Gradientwind an der Obergrenze der Reibungsschicht. Der Außenradius r_u des Taifuns ist hiernach definiert als der Ort, wo kein Gradientwind mehr weht. Da μ ungefähr $= 2$, so nimmt V nach innen etwa mit $1/r$ zu. Dasselbe gilt nach (42) für die Reibungshöhe h.

Es ist wohl zu beachten, daß das Gesetz sicher seine Gültigkeit verliert, wenn man zu nahe an das Auge gelangt. Unter dem inneren Ringwall wird γ ständig kleiner, somit der Wert der „Konstanten" K immer größer. Also wächst V gegen das Auge zu nicht mehr mit $1/r$, sondern langsamer. Das feuchtadiabatische Aufsteigen der Massen, für die der Weg in die dynamisch labile Oberschicht freigeworden ist, ist hier der alles beherrschende Vorgang.

Der Energiehaushalt der tropischen Zyklonen.

In der stationären Vertikalströmung des Taifuns werden laufend große Energiemengen umgesetzt. Ihnen gegenüber spielen Energieumsätze, die vielleicht im Auge oder im umgebenden Außenraum vor sich gehen, keine Rolle. Wir können uns also bei einer Energiebilanz auf die Vorgänge im Vertikalstrom beschränken.

Wie sich im letzten Abschnitt ergab, bezieht der Zustrom seinen Nachschub nicht von außen, sondern von oben. Das gilt allerdings nur bei statisch indifferenter Schichtung (wir hatten $\varrho = \text{const.}$ vorausgesetzt).

Bei der oberhalb des Reibungsstroms herrschenden trocken-stabilen Schichtung müßte der Massennachschub zum großen Teil doch von außen erfolgen. Es ist nun sehr bemerkenswert, daß rings um den von SIMPSON bearbeiteten Taifun vom Oktober 1946 [3] zwischen 6 und 8 km Höhe eine Zone großer Trockenheit liegt, die sich auch noch in tieferen Lagen bemerkbar macht und die nur dadurch hervorgerufen sein kann, daß die Luft absinkt. Es scheint also doch ein geschlossener Kreislauf im Taifun zu existieren[1]. Nach dem Verlassen des Abstroms sinken die Massen wieder langsam nach unten bis in Bodennähe, wobei sie durch Ausstrahlung Wärme verlieren müssen, um das statische Gleichgewicht zu behalten. Wenn auch außerdem ständig neue Luft aus dem Außenraum einbezogen wird, so handelt es sich doch im Zustrom um Massen, die aus einer gewissen Höhe kommen und die, verglichen mit der normalen, über dem Wasser liegenden tropischen Luft, zunächst eine geringe pseudopotentielle Temperatur besitzen.

Während des Zuströmens wird nun die pseudopotentielle Temperatur stark erhöht, einmal durch direkten Wärmeübergang vom Wasser zur Luft, zum anderen — und das ist der wichtigere Vorgang — durch das *Verdunsten des Meerwassers*. Besonders im mittleren Teil der Sturmzone bedingt die ursprüngliche Trockenheit der zuströmenden Luft im Verein mit der ungeheuren Turbulenz ein überaus hohes Dampfdruckgefälle über dem Wasser. Auch das Verdampfen des aufgewehten Gischts und des Regens trägt zur Erhöhung der pseudopotentiellen Temperatur bei, zwar nicht unmittelbar, da die Verdampfungswärme der Luft entzogen wird, aber indirekt, weil die Abkühlung den Wärmeübergang vom Meer zur Luft verstärkt. Nach den Höhenmessungen aus dem Taifun vom Oktober 1946 darf man annehmen, daß die im innersten Teil der Sturmzone die Meeresoberfläche verlassenden Luftmassen nahezu die Temperatur des Wassers besitzen und mit Wasserdampf gesättigt sind.

Die durch den Sturm dem Meer entzogene Wärme ist die wesentliche Energiequelle des Taifuns. Neben ihr spielt die latente Wärme des Wasserdampfes, den die Luft etwa von außen mitbringt, nur eine untergeordnete Rolle. Mit dieser Feststellung wird deutlich, warum die tropischen Zyklonen vorwiegend über den warmen Meeresteilen der Tropen auftreten. Es wird auch klar, warum jeder Taifun, der das Festland betritt, zum Sterben verurteilt ist.

Um eine einfache Energiebilanz zu gewinnen, verfolgen wir 1 g Luft, das vom Außenradius an durch den Zustrom, anschließend auf der Innenfläche durch den Abstrom läuft und das dann wieder zu seinem Ausgangspunkt hinabsinkt. Den Energiegewinn E aus dem damit verbundenen thermodynamischen Kreisprozeß findet man in bekannter Weise, indem man die Temperaturkurve der Außenatmosphäre und die Feuchtadiabate der innersten Abstromfläche in ein Tephigramm einträgt und die zwischen den Kurven liegende Fläche ausmißt.

[1] Zusatz bei der Korrektur: Diese Ansicht hat schon T. BERGERON ausgesprochen in: De tropiska orkanernas problem, Svenska Fysikersamfundets publ. Kosmos **27**, 122 (1949).

Dem Gewinn E steht ein Verlust an kinetischer Energie gegenüber. In Abb. 3 ist durch den dicken Linienzug dargestellt, wie sich v während des Kreislaufes ändert: von der Windstille am Außenradius (Punkt 1) nach einer Funktion der Form (44) bis zum Eintritt in den Ringwall (Punkt 2), dann nach einer schwächer ansteigenden Funktion bis zum stärksten Sturm auf dem Innenradius (Punkt 3); im Abstrom längs der Linie konstanten absoluten Drehimpulses bis Punkt 4. Während des Absinkens muß der übriggebliebene Impuls künstlich entzogen werden, um den Kreis zu schließen. Wäre keine Bodenreibung wirksam, würde das Teilchen auch im Zustrom seinen Drehimpuls behalten und nach Punkt 3′ gelangen. Seine Geschwindigkeit wäre dort nach dem Flächensatz:

$$V_i' = \frac{l}{2}\left(\frac{r_u^2}{r_i} - r_i\right). \qquad (45)$$

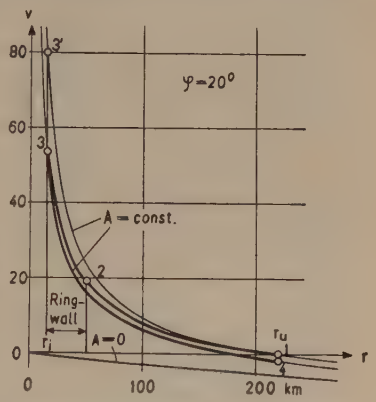


Abb. 3. Windplan des Vertikal-Kreislaufs im Taifun der Abb. 2.

Tatsächlich ist, wenn das Teilchen auf dem Innenradius die Reibungsschicht verläßt, infolge der Bodenreibung nur noch ein Bruchteil q dieser Geschwindigkeit vorhanden. Also verliert das Teilchen an kinetischer Energie durch Reibung

$$\frac{1}{2} V_i'^2 (1 - q^2) \text{ oder nach (45)}$$

$$\frac{l^2}{8}\left(\frac{r_u^2}{r_i} - r_i\right)^2 (1 - q^2).$$

Auf dem Abstrom tritt kein derartiger Verlust ein und der künstliche Energieentzug zwischen Punkt 4 und dem Ausgangspunkt ist ohne Bedeutung. Also lautet die Energiebilanz

$$\frac{l^2}{8}\left(\frac{r_u^2}{r_i} - r_i\right)^2 (1 - q^2) = E. \qquad (46)$$

Daraus folgt, da $r_i \ll r_u$, in guter Näherung

$$\boxed{r_u^4 = \frac{8 E r_i^2}{l^2 (1 - q^2)}.} \qquad (47)$$

Für die maximale Windstärke $V_i = q \cdot V_i'$ folgt aus (45) und (47) in ebensolcher Näherung

$$\boxed{V_i^2 = 2 E \frac{q^2}{1 - q^2}.} \qquad (48)$$

Der Vergleich zwischen (44) und (45) legt die Annahme nahe, daß q in allen Taifunen nahezu denselben Wert hat. Somit hängt nach (48) die größte Windstärke im Taifun nur von E, d. h. nur vom Aufbau der Außenatmosphäre und von der Wassertemperatur ab.

Die Berechnung eines Taifuns.

Bezeichnen wir mit r_s den Radius, bei dem eine Stromlinie des Abstroms die Reibungsschicht (Höhe h_s) verläßt, so ist nach (35)

$$\boxed{r_s^2 = -\frac{T\,b}{g\,(H-h_s)}\,A\,\frac{dA}{d\Theta}.} \tag{49}$$

Diese Gleichung zeigt, daß der Ringwall, in dem die Massen in die Oberschicht übertreten, sowohl nach innen wie nach außen begrenzt sein muß. Denn $r_s = 0$ ist nur möglich für $A = \text{const.}$, d. h. entweder am Äquator, wo die Corioliskraft fehlt und $A = 0$ sein kann, oder bei fehlender Bodenreibung. Es ist also letzten Endes die Bodenreibung im Verein mit der Corioliskraft, die die einströmenden Massen nicht bis zur Achse vordringen läßt. Nach außen darf der Ringwall ebenfalls nicht zu weit reichen. Sonst würde nach (49) $dA^2/d\Theta$ Werte annehmen, die nur durch eine übermäßig starke Bodenreibung (dA^2 sehr groß) oder durch verschwindende Wärmezufuhr ($d\Theta$ sehr klein) zu erreichen wären. Beides ist offenbar nicht der Fall. Die Erfahrung zeigt, daß es immer nur ein verhältinsmäßig schmaler Ring ist, in dem (49) erfüllt werden kann.

Durch die drei Gleichungen (47) bis (49) werden die Hauptmaße eines Taifuns bestimmt: äußerer Umfang, mittlerer Radius des Ringwalls und maximale Windstärke. Die bestimmenden Größen sind fast alle durch die äußeren Umstände gegeben oder sie liegen stets innerhalb enger Grenzen und sind der Erfahrung zu entnehmen. Einzig für $A\,dA/d\Theta$ liegt vorläufig keinerlei Anhalt vor. Wenn es gelänge, noch eine vierte Formel aufzustellen, die diese Größe mit den Hauptmaßen des Taifuns verbindet, so wäre jeder Taifun vollständig aus den äußeren Daten zu berechnen.

So lange wir diese Formel nicht kennen, müssen wir zur Konstruktion unseres Modells wenigstens *ein* Hauptmaß ebenfalls der Erfahrung entnehmen. Wir setzen daher den Innenradius mit 15 km fest. Die übrigen Daten sind: $\varphi = 20°$, also $l = 5 \cdot 10^{-5}\,\text{s}^{-1}$, $q = {}^2/_3$, $\Theta_i = 75°$. Die Temperaturkurve für den Umkreis (Abb. 2) und die Feuchtadiabate $\Theta = 75°$ umschließen eine Energiefläche $E = 1770\ \text{m}^2/\text{s}^2$. Mit diesen Werten findet man aus (47) und (48)

$$r_u = 219\ \text{km}, \qquad V_i = 53{,}3\ \text{m/s}.$$

Den äußeren Radius des Ringwalls setzen wir ebenfalls willkürlich mit 50 km fest. Für die Geschwindigkeitsverteilung an der Obergrenze der Reibungsschicht bestimmen wir die Konstanten von (44) so, daß beim Eintritt in den Ringwall ${}^5/_6$ des reibungslosen Windes ausmacht (Abb. 3). Im Ringwall selbst geht dieser Bruchteil stetig auf ${}^2/_3$ zurück.

Zur Berechnung des Abstroms wird aus (35) und (49) $A\,dA/d\Theta$ eliminiert. Man erhält

$$z = H - \frac{r_s^2}{r^2}\,(H - h_s). \tag{50}$$

H ist zunächst nur für die innerste Stromlinie bekannt ($H_i = 9340$ m), da man das Θ der folgenden Stromlinien noch nicht kennt. Um es zu erhalten, drücken wir $dA/d\Theta$ durch die Gradienten von A und Θ längs der Obergrenze der Reibungsschicht aus:

$$\frac{dA}{d\Theta} = \frac{dA}{dr} \Big/ \frac{d\Theta}{dr} \tag{51}$$

Hieraus und aus (49) folgt

$$\frac{d\Theta}{dr} = -\frac{T\,b}{g\,(H-h_s)\,r^2}\,A\,\frac{dA}{dr}. \tag{52}$$

Hier setzen wir für H und h_s je einen Mittelwert (9 km und 4 km) ein, berechnen $A\,dA/dr$ aus der Windverteilung der Abb. 3 und erhalten so den Gang von Θ im Ringwall. Es ergibt sich, daß Θ vom inneren zum äußeren Rand um 3,7° abnimmt. Damit ist alles vorhanden, um die Stromlinien des Abstroms zu berechnen. Die Windverteilung im Abstrom ergibt sich aus dem Wind in Reibungshöhe und dem Flächensatz.

Die Bodendepression erhält man, wenn man den Wind in Reibungshöhe in (1) oder (3) einsetzt und über r integriert. Sie beträgt in unserem Modell 24 mb. Das entspricht einem mäßigen Wirbelsturm. Da nach (3) die Depression im wesentlichen mit v^2 geht, v^2 aber nach (48) proportional E ist, so ist die Depression selbst proportional E. Man muß also annehmen, daß in den kräftigsten Taifunen die verfügbare thermodynamische Energie doppelt so groß wie in unserem Modell oder noch größer ist.

Das Auge der tropischen Zyklone.

Aufbau und Umfang des Taifuns werden — das ging aus den letzten Abschnitten hervor — allein durch die äußere Umgebung und die Vorgänge im Vertikalstrom bestimmt. Die Luftmassen im Auge haben sich diesem Aufbau anzupassen, d. h. sie haben sich mit dem Vertikalstrom ins Gleichgewicht zu setzen. Wie sieht dieses Gleichgewicht aus?

Nehmen wir zunächst an, im Auge herrsche völlige Windstille. Auf der Grenzfläche zum Abstrom besteht dann ein Sprung der Windstärke von 0 auf v. Dem entspricht nach Margules ein Temperatursprung

$$\delta T = T\,\frac{l\,v + v^2/r}{g\,\mathrm{tg}\,\beta}. \tag{53}$$

Die Steigung der Grenzfläche, $\mathrm{tg}\,\beta$, ist aus (34) zu entnehmen. Da bei Windstille die isothermen Flächen horizontal liegen, ist mit (53) auch die Temperatur auf der Achse gegeben. Sie ist links in Abb. 2 ebenfalls eingetragen. Im unteren Teil des Auges steht die Grenzfläche senkrecht, also ist $\delta T = 0$. Mit Beginn des Abstroms springt $\mathrm{tg}\,\beta$ ungefähr auf 1 und δT auf 7,9° C. Nach oben nimmt dann δT nur sehr langsam ab (etwa mit T) und geht erst kurz vor der Obergrenze des Taifuns rasch auf Null zurück.

Hieraus sieht man, daß im Auge keine Windstille herrscht. Nicht etwa, weil die statische Instabilität an der Obergrenze sich nicht halten kann, sondern weil sie schon gar nicht entstehen kann. Denn die Luft-

massen im Auge behalten während der Entstehung des Taifuns ihr Z fast unverändert. Selbst wenn die Strahlung das Z etwas verändern sollte, so kann es doch nie zu negativen Werten kommen. Vielmehr folgt die Temperatur auf der Achse etwa dem Verlauf der gestrichelten Linie in Abb. 2. Im unteren Teil des Abstroms, wo v sehr groß und r klein ist, muß sich δT allerdings nach (53) richten. Die hohe Temperatur entsteht dadurch, daß die Luft während der Entwicklung des Taifuns tiefer steigt und sich adiabatisch erwärmt. Die darüber liegende Luftsäule streckt sich; dabei entsteht eine mäßige zyklonale Rotation. Erst einige Kilometer über der Obergrenze ist nichts mehr von der Streckung zu spüren.

Der Radiosondenaufstieg vom 8. Oktober 1946 [*3*] zeigt den fraglichen Temperaturaufbau sehr deutlich, die Sonde vom 19. Oktober 1944 [*2*] ebenfalls bis 250 mb. Darüber dürfte sie erheblich zu warm sein. Beide Radiosonden zeigen die Zunahme der Temperatur beim Beginn des Abstroms, allerdings nicht als scharfen Sprung, sondern als mächtige Isothermie. Vermutlich erstreckt sich diese Übergangsschicht über einen großen Teil des Abstroms (senkrecht schraffiert in Abb. 2). Ein scharfer Sprung in Temperatur und Wind wird durch den Austausch verhindert.

Auffallend sind die hohen Feuchtewerte, die im Auge gemessen wurden. Sie zeigen, daß der Austausch zwischen Abstrom und Auge durch die Isothermie keineswegs unterbunden ist. In einem eben erst entstandenen Taifun ist es oberhalb der Isothermie sicher sehr trocken. Aber bei längerem Bestehen erfolgt eine Anreicherung von Wasserdampf im Auge, die bis zur Bildung von hohen Wolkenschichten führt.

Herrn Professor L. PRANDTL verdanke ich den Hinweis, daß die Impulsvernichtung in der Bodenreibungsschicht die Dimensionen des Taifuns wesentlich mitbestimmen muß. Herrn HERBERT RIEHL (Chicago) danke ich für die freundliche Übersendung von Beobachtungsmaterial aus dem Bereich von Taifunen.

Literaturverzeichnis.

1. RIEHL, H.: J. of Applied Phys. **21**, 917 (1950).
2. — Quart. J. R. Meteorol. Soc. **74**, 194 (1948).
3. SIMPSON, R. H.: Month. Weath. Rev. **75**, 53 (1947).
4. MAYNARD, R. H.: J. of Meteorol. **2**, 214 (1945).
5. WEXLER, H.: Annals New York Acad. **48**, 821 (1947).
6. Meteorol. Squadr. One: Chief Nav. Pp. Washington (1947).
7. SAWYER, J. S.: Quart. J. R. Meteorol. Soc. **73**, 101 (1947).
8. KLEINSCHMIDT, E.: Ann. Hydr. **69**, 305 (1941).
9. SCHACHT, E.: Bull. Am. Meteorol. Soc. **27**, 324 (1946).
10. PALMÉN, E.: Geophysica **3**, 26 (1948).
11. SOBHAG MAL: Beitr. Phys. fr. Atm. **17**, 40 (1931).
12. KLEINSCHMIDT, E.: Meteorol. Rdsch. **3**, 1 (1950).
13. — Ber. Dtsch. Wetterd. US-Zone Nr. 12, 36 (1950).
14. RIEHL, H.: Misc. Rep. No. 24, Dep. of Meteorol. Univ. Chicago (1948).
15. RODEWALD, M.: Meteorol. Z. **53**, 197 (1936).
16. PRANDTL, L.: Führer durch die Strömungslehre, 3. Aufl., S. 337f., Braunschweig 1949.

551.515.23

(College of Engineering, New York University.)

The Motion of Binary Tropical Cyclones.

By

B. Haurwitz.

With 3 Figures.

Summary. When two tropical cyclones are present simultaneously in the same region they show as a rule a counterclockwise rotation around each other. A theoretical explanation of this motion is given. The theory permits the computation of the rate of rotation. A discussion of nine examples with sufficiently reliable and complete observational data gives a satisfactory agreement between theoretical and observed rates of rotation.

Zusammenfassung. Es ist häufig beobachtet worden, daß zwei tropische Zyklonen sich entgegen dem Uhrzeigersinne umeinander bewegen. Eine theoretische Erklärung dieser Bewegung kann gegeben werden auf Grund der Annahme, daß sich jedes Zyklonenzentrum unter dem Einfluß des Windfeldes der anderen Zyklone bewegt; auf Grund dieser Theorie läßt sich die Rotationsgeschwindigkeit des Zyklonenpaares berechnen. An Hand von neun Fällen mit genügend zuverlässigem und vollständigem Beobachtungsmaterial wird gezeigt, daß gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung besteht.

Résumé. On a souvent observé que deux cyclones tropicaux se meuvent l'un par rapport à l'autre dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. On peut expliquer le fait en admettant que chaque centre cyclonique se déplace sous l'influence du champ de vent de l'autre. Grâce à cette hypothèse on peut calculer la vitesse de rotation de la paire de cyclones. Neuf exemples richement documentés montrent un bon accord entre la théorie et l'observation.

1. Introduction.

When two tropical cyclones exist simultaneously in the same region it is frequently observed that they move around each other in a cyclonic sense and with a speed which depends on various parameters of the binary system. It is the purpose of the present paper to discuss this relative motion on the basis of various cases which have been observed in the Pacific and the Atlantic Ocean.

The equations governing the behavior of such cyclone pairs have been derived previously (see reference [1] where earlier papers on the subject are quoted). At that time the effects of horizontal divergence and of friction were also taken into account, although in a crude fashion. It was found that the cyclones should rotate around a point on their axis which will be defined below as the "*center of mass*", that they may change their distance from each other because of the effects of divergence, and that the rotational speed may decrease under the influence of friction. But the last two effects, although often observable, are difficult to compute since the quantities which govern the change of distance and of the rate of rotation according to the theory cannot be determined accurately from the meteorological data. Therefore the present investigation will be confined to the rotation of the binary axis.

Since the formula for the rotational speed of the binary axis alone can be derived very simply if friction and convergence are neglected this derivation will be given here. For a more complete analysis and for references to earlier papers on the subject of vortex motion the paper [1] quoted previously may be consulted.

2. The rotation of the binary axis.

It will be assumed that the velocity field of each individual vortex is only a function of the distance from the center of this vortex. The velocity at the center of each vortex due to the velocity field of this vortex is zero. Consequently the instantaneous velocity of the center of the vortex 1, V_2, is entirely due to the velocity of the second vortex. Similarly, the instantaneous velocity of this second vortex, V_1, is entirely due to the velocity field of the first vortex. Both velocities are perpendicular to the axis joining the centers, r_{12}, as indicated in Fig. 1. It follows that this axis, because of the interaction of the vortices must rotate with an angular velocity α, where

$$\alpha = (V_1 + V_2)/r_{12}. \tag{1}$$

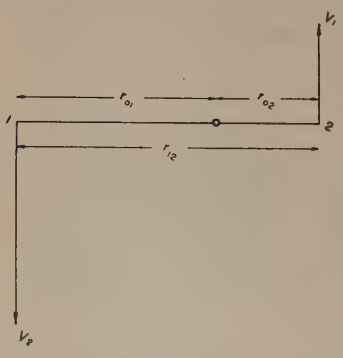


Fig. 1. Rotation of two vortices, schematic.

The two velocities cannot be determined directly from observations at the two centers because of the superposition of the two fields of motion. In order to find, for instance, V_2 it is necessary to analyze the velocity field closer to the center of the first vortex, where the effect of the velocity field of the second vortex is small, and extrapolate to the distance r_{12} from 1. To do so it will be assumed that the velocity field of each vortex resembles, to a sufficient degree of approximation, a Rankine vortex. Such a vortex consists of an inner core in solid rotation, with the velocity distribution

$$v = \xi r \tag{2}$$

where r is the distance from the vortex center and ξ the angular velocity of the rotation, and of an outer region for $r > R$ where

$$v = \xi \frac{R^2}{r}. \tag{3}$$

The kinetic energy of the Rankine vortex is porportional to $\ln r$. It is therefore infinitely large unless an outer boundary is imposed, as pointed out by JAMES [2] who showed that in extratropical cyclones a radial pressure profile of the form of the normal error curve approximates the observations quite well. In tropical cyclones, on the other hand, the velocity distribution is apparently often quite well represented by (3). Therefore the simple Rankine vortex is being assumed here for the further study. Furthermore, only its kinematic properties are being used here so that the dynamic difficulties arising from its infinitely large kinetic energy are less important. Since the inner core of a tropical cyclone is small, it can be assumed that each vortex is in the outer part of the other vortex so that

$$V_i = \xi_i R_i^2 / r_{12}^2 \quad i = 1,2. \tag{4}$$

It is convenient to introduce

$$M_i = \xi_1 R_i^2 \tag{5}$$

which may be referred to as the "mass" of the vortex. The vortex mass is, except for a numerical constant, identical with the circulation around each vortex. Thus we find that the angular velocity of rotation of the binary is given by

$$\alpha = (M_1 + M_2)/r_{12}^2 \text{ radians per second} \tag{6}$$

where the quantities on the right-hand side are given in cm-gm-sec units. If α is to be expressed in degrees per day

$$\alpha = 49{,}5 \cdot 10^5 (M_1 + M_2)/r_{12}^2 \text{ degrees per day.} \tag{6a}$$

Let a point o be chosen on the axis of the binary so that its distance from the first vortex center is r_{o1}, its distance from the second vortex center r_{o2} where

$$r_{o1}/r_{o2} = V_2/V_1 = M_2/M_1. \tag{7}$$

Then this point o will not participate in the rotation of the axis. Equation (7) which defines the position of o is analogous to the definition of the center of gravity of two points of masses, M_1 and M_2 at the distance r_{12} from each other. Therefore o may be called the *mass center of the binary*.

3. Determination of the vortex mass.

In order to apply (6) or (6a) to observations the vortex masses M_1 and M_2 must be known. It would be possible to determine these quantities directly from the wind field since in the outer region of each vortex according to (3) and (4)

$$V_i = \frac{M_i}{r} \tag{8}$$

but in view of the inaccuracies of the wind observations it appears more satisfactory to evaluate the vortex masses from the pressure distribution by means of the gradient wind relation. Even though it cannot be assumed that gradient wind conditions exist in moving cyclones it is believed that the application of the gradient wind relation yields better results than the use of the wind observation.

According to the gradient wind relation

$$(V^2/r) + fV = (1/\varrho)\,(\partial p/\partial r)$$

where $f = 2\,\omega \sin \varphi$, the Coriolis parameter. By substitution of (8) into this equation and by integration from r to r' it follows that

$$\frac{1}{2}\,M_i^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2}\right) + f\,M_i \ln \frac{r'}{r} = \frac{p' - p}{\varrho}. \tag{9}$$

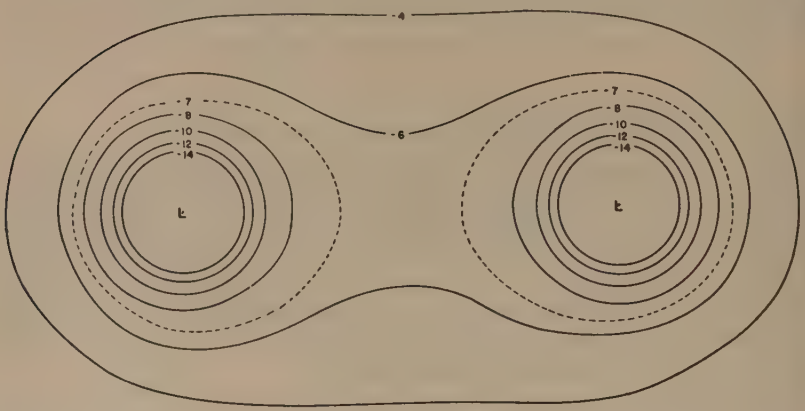


Fig. 2. Pressure field of a binary Rankine Vortex. Only isobars with radii greater than 135 km are drawn. Distance of vortex centers 1000 km, mass of each vortex 5.4 km² sec⁻¹, latitude 25°. Pressures in millibars, subtracted from an arbitrary zero.

Thus the vortex mass can be found by measuring the distance of two isobars from the center and solving the quadratic equation (9) for M_i. It will be noted that the pressure has a logarithmic infinity at infinite distance from the vortex center. However, as stated before in connection with the logarithmic infinity of the kinetic energy of the Rankine vortex this feature of the model does not impede its applicability even at considerable distances from the vortex center.

When applying (9) to the computation of the vortex masses one must keep in mind that this equation holds only for the outer part of each vortex. The radius of the vortex core will, in general, not be known, but there is little danger that this part of the storm might be used for the determination of M because its radius is as a rule very small, presumably hardly ever greater than 50 miles. Another point to be observed in the

computation of M is that equation (9) is derived under the assumption that only one vortex exists. The actual pressure field, however, represents the superposition of the separate fields of the two vortices. An example of two such superimposed pressure fields is shown in Fig. 2. In this example the distance between the two vortex centers is 1000 km, the mass of each vortex is $5{,}4 \cdot 10^{10}$ cm^2 sec^{-1}, the latitude 25°. Only isobars with radii greater than 135 km are drawn because they are too crowded closer to the centers. The figure shows that the pressure distribution in

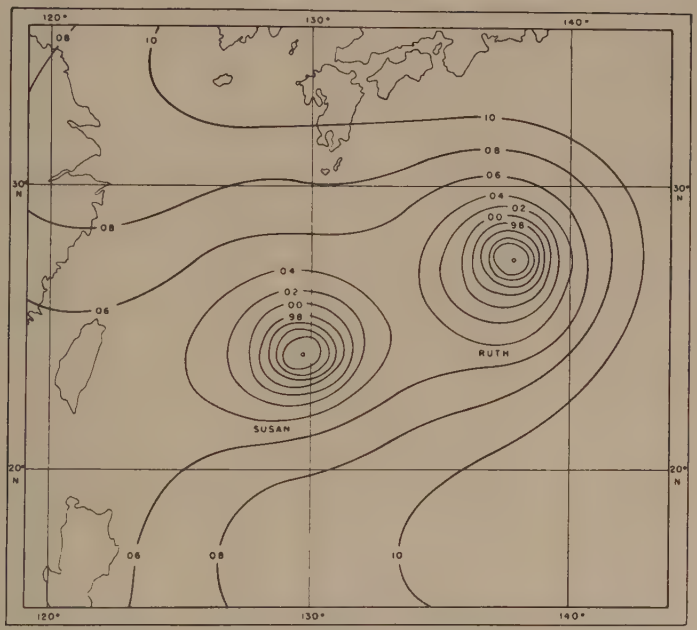


Fig. 3. Binary typhoons in the western North Pacific on 24 August 1945, 0600 GMT.

one vortex is not greatly affected by the presence of the other vortex, especially on the farther side so that the formula (9) may be used to determine the vortex mass. Fig. 2 should be compared with Fig. 3 which shows an actual example of the pressure distribution in a binary, namely in the typhoon pair of 24 August 1945, 0600 GMT, in the western North Pacific, discussed in section 4, b.

It may be repeated again that gradient wind motion cannot strictly be realized in such a binary. For this reason the isobars in Fig. 2 do not coincide with the stream lines or with the trajectories. That especially the latter must be quite different from the isobars is evident from the fact that the binary, apart from a general motion of the whole system, rotates around its axis so that the centers of motion of the two vortices describe concentric circles around the mass center of the binary.

4. Observations of the rotation of binaries.

a) Binaries during the period from 1900 to 1938.

The number of available cases of binary tropical cyclones with sufficiently complete observational data to check equation (6) is rather limited. The equation was therefore also applied to all cases of binaries which could be found on the "Historical Weather Maps for the Northern Hemisphere at Sea Level," [published under supervision of the U. S. Weather Bureau], even though the observational data for this period are very scanty. The calculations were carried out by Dr. F. Badgley, now at the University of Washington. The results are summarized in Table 1. This table shows the date on which the binary appeared, the calculated and the observed rotation of the binary axis in degrees per day, from the date given through the subsequent 24-hour period. The overall agreement between the calculated and observed rates of rotation is poor. Nevertheless there are at least some encouraging features. Of the 87 cases studied about 70% have the right sign of rotation, and in about two thirds of all cases the difference between the computed and observed rotation is less than 10°. The value of the last statement may seem somewhat impaired by the fact that in many cases the observed rotation was less than 10°. However, if only those binaries are considered which showed a rotation of more than 10° per day (32 cases) there are more than three fourths which have the correct sign of rotation. In more than half of these 32 cases the error of the computation is less than 10°, and in more than two thirds of these cases it is less than 12°.

It can readily be appreciated that lack of a sufficient number of observations may give rise to great differences between computed and observed rotation of the binaries. In the first place, it may lead to erroneous positions for the cyclones on the map which would not only falsify the observed angle of rotation, but also the distance between the centers. This distance enters into the expression (6) for the rate of the rotation in the second power. Consequently, an error in this quantity will produce a considerably larger error in the rate of rotation. Furthermore, a faulty analysis of the pressure field will, of course, lead to faulty values for the vortex masses, thus contributing further to errors in the computed rate of rotation. Therefore, it can be expected that better agreement between observed and computed rotation would be obtained when the computation is based on more reliable data. That this surmise is correct will be shown in the following discussion of nine recent cases of binary tropical cyclones for which the synoptic data are much more complete than for the cases in Table 1. Although it is not possible to reproduce here the synoptic maps for these nine cases, a brief statement will be made in each instance in order to show how the computation has been performed so that it can be repeated if the maps are available.

b) Binary of 23–25 August 1945.

During the latter part of August 1945 a pair of well-developed typhoons was observed in the western North Pacific. They were given the name

Table 1. *Rotation of binaries in degrees per day.*

Date	Calc.	Obs.	Date	Calc.	Obs.
15 Sept. 1900	7.8	0.3	8 Sept. 1923	12.1	11.6
16 Sept. 1900	6.1	– 8.7	9 Sept. 1923	7.5	9.1
29 Sept. 1903	12.4	9.4	10 Sept. 1923	11.3	8.9
30 Sept. 1903	11.6	2.0	11 Sept. 1923	11.9	14.8
1 Oct. 1903	5.4	5.9	6 Oct. 1923	12.9	4.2
27 Sept. 1907	12.4	10.4	7 Oct. 1923	15.3	10.6
28 Sept. 1907	18.9	7.5	21 July 1925	31.2	0.6
29 Sept. 1907	6.0	– 2.0	22 July 1925	24.8	– 8.6
31 Oct. 1910	6.0	0.7	23 July 1925	11.8	15.3
16 Sept. 1911	8.5	3.4	4 Sept. 1925	9.1	– 2.0
17 Sept. 1911	5.2	6.4	5 Sept. 1925	8.9	– 12.1
26 July 1913	11.3	8.9	6 Sept. 1925	9.9	– 37.0
27 July 1913	10.6	– 3.6	24 Aug. 1928	25.0	– 16.7
7 July 1914	8.0	– 8.5	25 Aug. 1928	11.3	5.5
8 July 1914	8.3	5.5	26 Aug. 1928	9.6	0.9
10 Aug. 1914	10.3	7.0	27 Aug. 1928	10.4	10.5
13 Aug. 1914	6.8	– 3.0	28 Aug. 1928	5.7	15.5
24 Oct. 1915	6.9	2.1	29 Aug. 1928	8.2	7.9
25 Oct. 1915	10.7	– 3.0	8 Sept. 1928	6.0	16.4
26 Oct. 1915	10.7	8.6	9 Sept. 1928	6.7	– 1.6
25 Sept. 1916	4.6	14.7	24 Nov. 1928	5.7	– 2.0
26 Sept. 1916	5.2	15.6	25 Nov. 1928	11.1	– 1.2
30 July 1917	8.8	9.2	26 Nov. 1928	12.6	16.2
31 July 1917	8.8	4.3	27 Nov. 1928	23.6	23.2
26 Sept. 1917	9.3	15.6	28 July 1930	9.3	8.7
27 Sept. 1917	7.3	5.7	29 July 1930	11.2	14.4
28 Sept. 1917	6.9	3.0	30 July 1930	7.8	3.5
29 Sept. 1917	4.9	– 0.8	12 Sept. 1933	5.6	2.2
20 Oct. 1918	7.7	10.4	13 Sept. 1933	9.6	5.1
21 Oct. 1918	14.3	26.1	14 Sept. 1933	10.9	2.9
22 Oct. 1918	35.5	11.7	15 Sept. 1933	7.7	0.3
28 July 1919	9.5	10.6	3 Dec. 1934	10.0	– 8.5
29 July 1919	12.5	10.2	4 Dec. 1934	17.3	– 33.0
30 July 1919	16.2	– 1.8	5 Dec. 1934	67.0	– 64.0
19 July 1920	17.9	9.0	22 Aug. 1935	9.4	0.0
20 July 1920	11.6	9.1	23 Aug. 1935	10.2	9.1
26 Sept. 1920	18.3	13.5	19 July 1936	17.0	16.0
27 Sept. 1920	8.1	6.6	20 July 1936	8.4	19.5
28 Sept. 1920	7.9	2.7	21 July 1936	10.2	4.5
9 June 1922	9.3	– 15.7	22 July 1936	6.5	– 2.0
10 June 1922	11.4	10.1	6 Nov. 1938	171.0	16.4
11 June 1922	16.4	– 14.6	7 Nov. 1938	92.1	– 6.0
2 June 1923	25.5	0.0	8 Nov. 1938	99.5	16.2
3 June 1923	21.4	– 6.4			

Susan and Ruth by the U.S. Air Corps Weather Service, and they will be referred to by these names here. Where a less personal reference is

more convenient, as in mathematical formulae, they will be distinguished by the subscripts 1 for SUSAN and 2 for RUTH. A discussion of these typhoons has been given by KIDD and REED [*3*, *4*]. From Figures 3 and 4 of their paper [*3*] the cyclonic rotation of the typhoons around each other can clearly be seen. Fig. 3 of the present paper shows the intermediate position of the typhoons at 24 August 1945, 0600 GMT. Maps of the surface weather situation in the locality and for the time under discussion were made available by the Air Weather Service to the Institute of Tropical Meteorology of the University of Chicago at the University of Puerto Rico where the author first had the opportunity to study this case.

As the two isobars for the determination of the vortex mass of SUSAN, M_1, 998 mb and 1002 mb were taken while for the mass of RUTH, M_2, 1000 and 1004 mb appeared suitable. The distance r of the isobars from the center of the respective typhoon was measured along the axis of the binary, and on that side of the cyclone which is farther away from the other one. It was pointed out previously, in the discussion of Fig. 2, that in these regions the mutual deformation of the pressure fields is least. Therefore, the distances of the isobars from the respective centers in this and the following examples have as a rule been measured along the binary axis. A certain amount of judgment must evidently be exercised when the cyclones deviate appreciably from circular symmetry in order to avoid regions where the pressure field is greatly deformed. In the present case the indicated choice seemed satisfactory, although a somewhat better agreement between computed and observed rotation could have been obtained, for instance, if the two isobars for SUSAN had been measured along a radius perpendicular to the axis and northwards.

The following values were thus obtained:

Date and time	M_1 cm^2/sec	M_2 cm^2/sec	r_{12} km	α (comp.) °/day	α (obs.) °/day
23 Aug. 1945, 0600 GMT	$3.11 \cdot 10^{10}$	$3.44 \cdot 10^{10}$	1150	24.5	19
24 Aug. 1945, 0600 GMT	$4.42 \cdot 10^{10}$	$3.82 \cdot 10^{10}$	885	52	53

The observed and computed angles of daily rotation of the binary axis, α, refer to the 24-hour period following the date and time indicated in the first column. For the period beginning on 24 August 1945, 0600 GMT the last map available was that for 18 hours later. The rates of rotation, however, have been adjusted to a 24-hour period.

It will be noted that the rate of rotation is more than doubled from 23 to 24 August. This increase is mainly due to the shortening of the distance of the two typhoons, a factor which alone would increase the rate of rotation by about 70% while the increase in mass alone would only contribute about 25% to the acceleration of the rate of rotation.

During the period under discussion two other typhoons were also present, at least part of the time, in the vicinity of SUSAN and RUTH

But no attempt was made to find the effect of these typhoons on the relative motion of SUSAN and RUTH. If the relative motion of more than two vortices is studied the equations governing the motion become analogous to those of the n-body problem of celestial mechanics, and it seems hardly worth while to apply these rather complicated equations to the relatively inaccurate observational data.

c) Binary of 15–16 October 1949.

The weather map of 15 October, 0030 GMT, showed two hurricanes in the North Atlantic, east of Florida. The northerly of these hurricanes will be denoted by 1, the southerly one by 2. After 24 hours these two hurricanes had moved northward, and their axis had rotated in a counterclockwise direction so that it was then almost east-west, the angle of rotation amounting to 58°. For hurricane 1 the only isobars available to determine its mass were 1008 mb and 1011 mb. The same isobars were used for the second hurricane, and the measurements were made in the same manner as in the previous example along the binary axis, with the following results:

Date and time	M_1 cm²/sec	M_2 cm²/sec	r_{12} km	α (comp.) °/day	α (obs.) °/day
15 Oct. 1949, 0030 GMT	$1.04 \cdot 10^{10}$	$3.9 \cdot 10^{10}$	810	37	58

The computed rotation was here considerably smaller than the observed one. The difference is in part attributable to the fact that the two hurricanes approached each other. On 16 October 1949, 0030 GMT, their centers were only 675 km apart. With the same masses and this distance the computed rate of rotation would have been 53° per day. The intermediate maps showed that the rotation of the axis was only 10° during the first six hours, in excellent agreement with the rate of 37° per day, and that it speeded up during the following 18 hours. But in view of the unavoidable errors in the determination of the vortex masses it did not seem worth while to perform the computation for each individual six-hour period.

d) Binary of 16–17 October 1949.

The western hurricane of the pair just discussed disappeared subsequently, and on 16 October 1949, 1230 GMT, only one center remained. However, at the same time it came close to another center to the eastwards, and these two cyclones began now to rotate around their center of mass. The pressure distribution in the wider vicinity of this new binary showed well developed highs which presumably affected the motion of this binary. Nevertheless, the formula was applied to the 12-hour period beginning with 16 October 1949, 1230 GMT. Beyond 17 October 1949, 0030 GMT, the application of the formula did not seem appropriate since a frontal cyclone developed to the northwest of the westerly hurricane

in the binary. The masses were determined, as before, by measuring along the binary axis, from the isobars 1008 and 1011 mb for the easterly hurricane (denoted by 2) and from the isobars 1005 and 1008 mb for the westerly hurricane (denoted by 1) since in this hurricane the 1011 mb isobar seemed too much disturbed. The results were as follows:

Date and time	M_1 cm^2/sec	M_2 cm^2/sec	r_{12} km	α (comp.) °/day	α (obs.) °/day
16 Oct. 1949, 1230 GMT	$2.54 \cdot 10^{10}$	$1.44 \cdot 10^{10}$	930	23	20

e) Binary of 19–20 October 1949.

Next, the cyclone pair in the western North Atlantic on 19 October 1949, 0630 GMT, was considered. During the earlier stages of its history this binary showed a pronounced frontal structure. But by 19 October, 0630 GMT, the occlusion process had progressed so far in these cyclones that it seemed possible to apply equation (6) to their relative motion. The vortex masses for the westerly (1) and easterly (2) cyclone were determined from the isobars 1011 mb and 1014 mb along the binary axis, with the following results:

Date and time	M_1 cm^2/sec	M_2 cm^2/sec	r_{12} km	α (comp.) °/day	α (obs.) °/day
19 Oct. 1949, 0630 GMT	$4.4 \cdot 10^{10}$	$5.6 \cdot 10^{10}$	1100	41	40

It may be added that this cyclone pair during the 6 hour interval prior to the period considered showed a cyclonic rotation of 13°. If the rotation is computed from the data for 19 October 1949, 0030 GMT, a rotation is found of 14° per 6 hour, even though for this period the frontal structure is thought to interfere with the application of equation (6).

f) Binary of 4 November 1949.

On 4 November 1949, 0030 GMT, two hurricanes were situated in the Caribbean area which showed a counter-clockwise rotation around their center of mass. The computations could be made only for the 12-hour period until 1230 GMT of the same day. With the use of the isobars 1008 mb and 1011 mb the following values have been computed (the index 1 denotes the westerly, 2 the easterly hurricane):

Date and time	M_1 cm^2/sec	M_2 cm^2/sec	r_{12} km	α (comp.) °/day	α (obs.) °/day
4 Nov. 1949, 0030 GMT	$2.9 \cdot 10^{10}$	$6.5 \cdot 10^{10}$	1970	12	16

g) Binary of 5–6 September 1950.

Two well developed hurricanes appeared in the Caribbean area during the early part of September 1950. This binary showed a pronounced rotation around its axis during the time from 5 to 6 September. Before and after this time interval the rotation of the binary axis was irregular, presumably because of interference by some adjacent high pressure areas. The outermost closed isobars around each hurricane on 5 September 1950, 1230 GMT, namely 1005 and 1008 mb, were used for the computation of the vortex mass. The subscripts 1 and 2 denote again the westerly and easterly hurricane, respectively. The results of the computation may be summarized as follows:

Date and time	M_1 cm²/sec	M_2 cm²/sec	r_{12} km	α (comp.) °/day	α (obs.) °/day
5 Sept. 1950, 1230 GMT	$5.9 \cdot 10^{10}$	$4.66 \cdot 10^{10}$	1600	20	16

h) Binary of 18–20 October 1950.

The last binary during the 1950 hurricane season suitable for a check of equation (6) appeared during the time from 18 to 20 October 1950 in the region of the Gulf of Mexico. For the westerly hurricane (1) the vortex mass on 18 October was determined from the isobars 1005 and 1008 mb. For the easterly hurricane (2) it seemed preferable to choose the isobars 1002 and 1008 mb since the position of the latter isobar appeared better fixed by observations than the isobar 1005 mb. The isobars along the binary axis of the easterly hurricane showed considerable crowding so that a small error in the position of an isobar would cause an appreciable error in the determination of the vortex mass. By the use of a greater pressure difference, this error was smoothed out. In the westerly hurricane the 1002 mb isobar was so close to the center that its use for the computation of M_1 did not seem advisable.

The same isobars, 1002 and 1008 mb, were used to find both vortex masses on 19 October 1950, 1230 GMT. The following numerical values were obtained:

Date and time	M_1 cm²/sec	M_2 cm²/sec	r_{12} km	α (comp.) °/day	α (obs.) °/day
18 Oct. 1950, 1230 GMT	$2.13 \cdot 10^{10}$	$4.06 \cdot 10^{10}$	790	49	43
19 Oct. 1950, 1230 GMT	$6.58 \cdot 10^{10}$	$3.57 \cdot 10^{10}$	900	62	39
	$(5.9 \cdot 10^{10})$	$(2.48 \cdot 10^{10})$		(51)	

The computed rate of rotation for 19 October is considerably larger than the observed one. This may be due to a faulty determination of M_1 and M_2. In particular the more easterly vortex was quite asymmet-

rical and the isobars were most crowded in the direction of the binary axis. If the radii of the isobars had been measured in a southeasterly direction normal to the binary axis one would have obtained the values shown above in parenthesis, in much better agreement with the observed rate of rotation.

5. Conclusion.

The nine cases of binary rotation discussed here in detail show much better agreement with the theory than might be expected from Table 1 which summarizes binary rotation data for the years 1900 to 1938. It seems therefore reasonable to conclude that the simple theory leading to equation (6) for the rate of rotation of the binary axis represents the actual conditions very well in many cases, and that the poor correlation between theory and observation shown in many instances in Table 1 may largely be attributed to the paucity of observations. It would in many cases have been possible to re-analyze the maps on which the computations were based and obtain a better agreement between theory and observation. But it appears more satisfactory to base the verification of a theory on those cases where sufficient data are available than on those where the number of observations is so small that a large freedom of choice exists in the selection of the parameters required by the theory.

The simple formula presented here for the relative motion of binary tropical cyclones is obviously incomplete in many respects. In particular, the assumption that the cyclone is a Rankine vortex can hardly be more than a rough approximation to the actual conditions. In order to obtain a better approximation it would be desirable to investigate the general law for the radial pressure distribution in tropical cyclones by a procedure similar to that employed by James [2] and to compute the required wind velocities from the gradient wind relation, rather than to assume a priori that the wind field is that of a Rankine vortex.

More satisfactory results might presumably also be obtained if not surface, but upper-air data were used. However, it is doubtful whether the improvement would be great because the pressure is not much modified by surface conditions, and the vertical stratification in the vicinity of tropical cyclones seems to be essentially barotropic so that the pressure distribution aloft is similar to that at the ground. A very compelling reason against the extensive use of upper-air data is, of course, in many cases that they do not exist.

In those of the preceding examples where analyses on two consecutive days are given it will always be seen that the masses of the cyclones and their distances changed from one day to the next. The same is also true for most of the other cases where only the rotation from one day to the next was studied. It is possible to explain the change in the distance of the cyclone centers by the assumption that convergence or divergence into or out of the cyclones takes place. In the case of convergence the

cyclones will approach each other, in the case of divergence their distance will increase. It is, of course, not necessary that convergence or divergence exists in both cyclones, but merely that the field of convergence or divergence in one cyclone is stronger than the field with the opposite sign in the other cyclone if the distance of the cyclones is to decrease or increase, respectively. Unfortunately, the value of the divergence or convergence cannot be determined with any degree of accuracy since the evaluation must be made from the wind field directly. Presumably the wind field aloft should be used for these computations, but such data are even scarcer than for surface winds. Nevertheless an attempt to carry out such a calculation was made for the two typhoons of 23 August 1945 in the western North Pacific on the basis of the few available surface wind data. The result was that the typhoons should have a distance of 900 km 24 hours later, which is in good agreement with reality. But the choice of the proper data on which to base this computation is so unreliable that it does not seem worth while to pursue this extension of the theory further at the present time.

It should be kept in mind when applying equation (6) that merely the rotation of the binary axis around the mass center of the vortices is being determined. In general the binary system as a whole will undergo a translatory motion because of the superimposed general current, often referred to as the steering current. If this steering current has a shear the latter will also contribute to the rotation of the binary axis. Such a shear of the steering current may be responsible for some of the discrepancies between computed and calculated rotation in the foregoing examples. The theory for the rotation of the binary axis developed above does merely permit one to find the rotation due to the interaction of the vortices, not the motion of the system as a whole due to the steering current.

It seems unlikely that the theory in its simple form can be applied generally to extratropical cyclones and anticyclones because the deviations from barotropic stratification are presumably large so that conditions aloft are quite different from those near the surface. In such situations other factors will obviously contribute greatly to the motion of the pressure systems.

Acknowledgments.

The author is indebted to Dr. Badgley, now at the University of Washington, for performing the laborious and largely discouraging computations leading to Table 1. He wishes to express his thanks to Professor H. Riehl who called his attention to the motion of Susan and Ruth, which gave the first confirmation of equation (6). Copies of the relevant weather maps for the investigation of the binaries in the western North Atlantic during 1949 and 1950 were supplied by the U. S. Weather Bureau office at La Guardia Airport, New York. The author appreciates greatly the promptness and courtesy with which this office satisfied his numerous demands for maps.

References.

1. Haurwitz, B.: Bewegungen von Wirbeln mit vertikaler Achse und endlichem kreisförmigem Querschnitt. Zs. f. Physik, **60**, 719 (1930).
2. James, R. W.: On the theory of large-scale vortex motion in the atmosphere. Quart. Journ. Roy. Met. Soc. **76**, 255 (1950).
3. Kidd, K. P. and Reed, C. K.: A study of several typhoons in the West Pacific, 1945. Bull. Am. Met. Soc. **27**, 232 (1946).
4. Kidd, K. P. and Reed, C. K.: Typhoons of the Southwest Pacific, 1945. Bull. Am. Met. Soc. **27**, 288 (1946).

551.515.83

(Weather Bureau, Pretoria.)

Frequency of Fronts in the Northern Hemisphere.

By

T. E. W. Schumann and **M. P. van Rooy.**

With 5 Figures.

Summary. It is pointed out that there are two distinct ways of defining the frequency of the occurence of fronts. Tables and charts are presented showing frontal frequency during winter and summer for the greater part of the Northern Hemisphere, the values being based on daily synoptic charts for a period of ten years.

The variation of average frequency of fronts with latitude is illustrated graphically, and it is shown to have a significant relation with the average temperature and pressure gradients.

Zusammenfassung. Es wird gezeigt, daß es zwei verschiedene Arten gibt, die Häufigkeit des Vorkommens von Fronten zu definieren. Es werden Tabellen und Karten mitgeteilt, die die Häufigkeit von Fronten während des Winters und Sommers für den größeren Teil der nördlichen Halbkugel zeigen; diese Werte gründen sich auf tägliche synoptische Karten über eine Periode von zehn Jahren. Die Änderung der mittleren Häufigkeit von Fronten mit der Breite wird graphisch dargestellt, und es wird gezeigt, daß eine eindeutige Beziehung zu dem mittleren Temperatur- und dem mittleren Druckgradienten besteht.

Résumé. On montre qu'il y a deux façons de définir la fréquence d'apparition des fronts. Des tables et des cartes illustrent la fréquence des fronts pendant l'hiver et l'été pour la plus grande partie de l'hémisphère nord; ces valeurs résultent de cartes synoptiques journalières s'étendant sur une période de dix ans. La variation des fréquences moyennes des fronts en fonction de la latitude est représentée graphiquement. Il existe une relation nette avec les gradients moyens de température et de pression.

1. Introduction.

A statistical study of the frequency of occurrence of fronts in the Northern Hemisphere is presented herewith, but due to lack of data the sector which covers most of Asia had to be excluded.

The main object of the paper is to provide statistical material for further research and no attempt has been made to account in any detail

for the pattern presented by the frequency-isopleths. A more detailed analysis is being contemplated and will probably be presented in some future publication.

2. Definition of frequency.

Apparently PETTERSSEN [*1*] was the first to draw charts showing the frequency of fronts over Western Europe and the adjoining ocean. He remarks: "For the interpretation of the frequency curves it is of interest to note that the frequency of the presence of fronts within an area does not only depend on the number of individual fronts, but also on the velocity of the fronts. The smaller the velocity the larger the frequency."

As a matter of fact the frequency of fronts may be defined in two distinct ways, whereby account is taken both of the density of distribution of the fronts and their average velocity. In the first place we might define the frequency F_1 as the number of times, say in 100 days, a front passes any given fixed point. This would be an adequate and legitimate definition, but the practical difficulty of counting the number of fronts defined thus is considerable, and hence we prefer to adopt the definition given by PETTERSSEN [*1*], somewhat modified.

He defines the frequency n as the number of times, per hundred days, when part of a front lies within a given unit area. However, the unit area adopted by him is a five degrees square, and apparently he does not allow for the fact that the area of such squares decreases proportionally with the cosine of their mean latitude. In our definition of the frequency F we have allowed for this fact, and the unit area adopted is a five degrees square centred on the equator, the side of the square being 300 nautical miles in all cases. The relation between n and F is

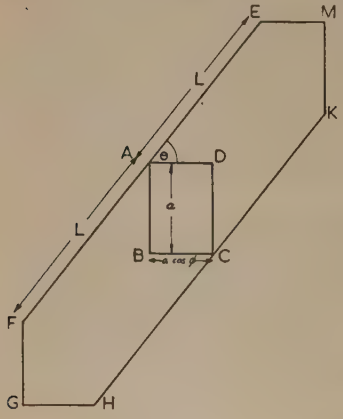


Fig. 1.

$$F = c\,n, \qquad (1$$

where $$c = 2/(1 + \cos \Phi). \qquad (2$$

Φ being the mean latitude of the square in question.

The factor c of eq. (2) was derived as follows:

If $ABCD$ in fig. 1 represents a five degrees square with sides, a and $a \cos \Phi$, then a straight front of length L at an angle Θ to the horizontal will penetrate the square when it lies within the figure $EFGHKM$. By simple geometry the area of the latter is found to be equal to

$$a \cos \Phi\,(2\,L \sin \Theta + a) + 2\,L\,a \cos \Theta.$$

If we integrate this expression with respect to Θ on the assumption of the haphazard orientation of the fronts, we find the average area to be

$$a^2 \cos \Phi + \frac{2}{\pi} L\, a\, (1 + \cos \Phi),$$

or

$$\frac{2}{\pi} L\, a\, (1 + \cos \Phi)$$

if we assume L to be large in comparison with a.

The corresponding average area of the standard square when $\Phi = 0$ is evidently $\frac{4}{\pi} L\, a$, and hence the ratio of the two areas is $2/(1 + \cos \Phi)$, which is the value we have adopted for c.

This value of c has been derived upon the supposition that L is large compared to a, and that there is no bias in the orientation of the fronts. The latter supposition is not strictly true as the fronts appear to show a tendency towards West-East orientation. However, this point has not been investigated further, and we are content to abide by the value of c as defined above. Our procedure was thus simply to count the number of fronts in each five degrees square, reduce this number to a percentage, and multiply by the appropriate value of c to obtain the value of the frequency F.

From their respective definitions it must be evident that the ratio of F_1 to F will be some measure of the average velocity of translation of the fronts, since the value of F_1 must necessarily be zero if all the fronts were entirely stationary. The respective values of F_1 and F were computed for a few isolated points and are reproduced in

Table 1.

Φ	λ	F_1	F	F_1/F
40° N	50° W	47.9	52.8	0.91
50° N	30° W	35.4	38.5	0.92
50° N	10° W	32.1	31.0	1.04
60° N	10° W	25.7	27.3	0.94

From these results it appears that the fronts move measurably faster at the point 50° N 10° W than at the other three points.

3. The data.

The basic material used in this study was the daily Historical Weather Maps [*2*] for a ten year period 1928 to 1938. On these maps eleven different types of fronts, frontogenesis and frontolysis are listed and shown on the charts. In computing the frequencies, all of these were grouped together and no attempt was made to distinguish between cold, warm, occluded or stationary fronts. However, fronts aloft, which are also shown on the original charts, were not included. The values of F, obtained in the way already explained above, were slightly smoothed along

Table 2. *Percentage frequency of fronts in Winter.*

λ \ Φ_N	10—15	15—20	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45	45—50	50—55	55—60	60—65	65—70	70—75	75—80	80—85	85—90
35– 40 E	0.5	1.1	3.9	6.4	14.3	23.4	31.3	29.5	23.9	23.1	25.9	23.7	25.4	16.7	3.3	0.7
30– 35 E	0.5	1.1	4.1	7.6	17.6	24.1	30.6	28.2	23.5	25.1	26.3	23.8	27.7	17.9	4.1	0.6
25– 30 E	0.3	0.6	3.2	9.1	19.6	25.3	30.3	26.3	25.6	29.7	27.1	24.9	29.3	19.5	4.9	0.6
20– 25 E	0.1	0.2	2.7	11.3	20.6	27.9	31.3	26.6	29.6	32.7	28.0	25.9	30.7	20.2	5.8	0.7
15– 20 E	0.0	0.1	3.2	12.2	21.9	29.5	34.4	28.7	32.3	32.1	28.2	26.5	30.7	19.6	6.2	0.8
10– 15 E	0.0	0.2	3.6	12.0	21.6	27.7	36.0	28.8	31.8	32.1	28.7	27.7	29.7	18.4	6.1	0.7
5– 10 E	0.0	0.1	3.5	11.0	18.9	24.5	34.4	28.3	30.2	35.3	30.5	28.2	28.2	16.4	5.1	0.5
0– 5 E	0.0	0.2	2.9	9.8	15.9	22.7	32.3	30.5	29.1	36.2	31.1	28.2	26.1	13.8	3.9	0.4
0– 5 W	0.0	0.4	2.2	9.0	15.0	23.2	30.3	33.7	28.4	31.6	29.6	29.3	23.6	10.7	2.7	0.4
5– 10 W	0.0	0.5	2.2	9.4	18.5	25.3	30.4	34.2	28.4	27.4	28.3	30.5	20.1	7.6	1.8	0.4
10– 15 W	0.1	0.6	3.2	10.4	18.9	27.3	32.8	33.6	28.3	26.0	27.4	30.0	16.3	4.7	1.2	0.3
15– 20 W	0.2	0.6	3.4	10.7	20.6	28.4	34.9	35.9	29.0	25.4	26.1	27.5	12.9	3.1	0.9	0.3
20– 25 W	0.2	0.5	3.7	11.0	23.0	31.5	37.1	39.0	32.2	25.3	24.3	22.4	9.8	2.3	0.6	0.2
25– 30 W	0.1	0.6	5.0	12.5	26.4	37.4	41.0	40.5	35.2	24.7	22.7	17.8	7.3	1.7	0.4	0.1
30– 35 W	0.0	1.0	6.1	14.8	29.9	42.7	46.7	42.9	35.6	23.3	21.3	14.4	5.1	1.1	0.3	0.0
35– 40 W	0.1	1.8	7.4	18.7	34.3	46.5	51.6	43.2	33.7	21.6	18.3	9.9	3.5	0.5	0.2	0.0
40– 45 W	0.3	2.5	9.2	22.8	38.0	50.7	52.4	38.2	28.9	19.2	13.8	6.2	3.0	0.3	0.1	0.0
45– 50 W	0.5	3.0	11.0	25.5	39.3	54.5	50.8	31.6	23.0	15.6	10.4	5.6	3.0	0.4	0.0	0.0
50– 55 W	0.4	3.7	13.1	27.2	40.0	57.0	48.6	28.1	17.8	12.0	8.4	5.7	3.0	0.7	0.0	0.0
55– 60 W	0.7	4.3	15.4	28.2	40.6	56.9	45.0	26.6	14.8	11.0	7.1	4.9	2.2	0.6	0.1	0.0
60– 65 W	1.0	4.6	16.5	28.2	43.5	54.4	40.8	24.1	15.0	11.5	6.0	2.1	1.2	0.3	0.2	0.0
65– 70 W	0.9	5.6	17.2	28.8	47.7	51.3	37.1	24.6	16.7	10.5	4.7	1.9	0.7	0.2	0.2	0.0
70– 75 W	0.9	6.2	18.9	32.4	47.2	44.8	37.2	30.3	17.3	8.7	3.9	1.6	0.4	0.1	0.1	0.0
75– 80 W	1.1	5.8	20.6	34.9	43.1	38.5	41.5	33.6	17.2	8.5	4.1	1.5	0.2	0.0	0.0	0.0
80– 85 W	1.0	5.9	21.0	34.2	39.7	38.3	43.3	33.0	18.3	9.8	4.9	1.9	0.2	0.0	0.0	0.0
85– 90 W	0.7	6.2	21.6	33.7	38.1	40.9	42.4	34.9	20.5	11.3	5.2	2.7	0.2	0.0	0.0	0.0
90– 95 W	0.4	6.5	21.9	31.8	38.1	41.6	44.3	36.9	23.1	12.9	5.3	2.8	0.4	0.0	0.0	0.0
95–100 W	0.1	5.5	18.7	28.4	37.9	39.7	47.7	38.5	27.3	14.9	6.8	2.5	0.6	0.1	0.1	0.0

Table 2 (continued).

λ \ Φ_N	10—15	15—20	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45	45—50	50—55	55—60	60—65	65—70	70—75	75—80	80—85	85—90
100–105 W	0.0	2.7	11.8	24.4	33.8	36.5	48.3	43.8	33.7	18.1	9.4	2.8	0.7	0.1	0.2	0.0
105–110 W	0.0	1.1	5.9	17.9	26.9	31.4	42.8	49.1	43.1	24.8	11.8	3.4	0.8	0.2	0.2	0.0
110–115 W	0.1	0.6	3.5	12.2	21.3	26.7	34.4	49.7	54.3	34.7	14.1	4.1	1.3	0.4	0.2	0.0
115–120 W	0.0	0.5	3.4	10.7	19.6	25.8	30.8	45.5	60.6	45.4	20.8	4.8	2.1	0.6	0.2	0.0
120–125 W	0.0	0.9	3.9	11.0	21.8	28.2	33.8	42.5	55.5	52.2	30.2	5.3	3.9	0.8	0.1	0.0
125–130 W	0.0	1.0	4.4	13.0	25.5	31.0	37.9	41.9	45.9	49.9	35.1	6.3	4.7	0.7	0.1	0.0
130–135 W	0.1	1.5	5.8	16.3	27.7	33.6	38.7	39.0	39.2	48.3	36.7	7.5	4.3	0.4	0.2	0.0
135–140 W	0.2	2.4	9.0	18.7	27.8	36.5	37.8	34.9	32.8	39.6	38.1	8.3	4.0	0.4	0.2	0.0
140–145 W	0.4	3.4	11.9	21.4	28.5	37.9	37.7	32.7	28.0	34.1	33.9	8.6	3.0	0.6	0.2	0.0
145–150 W	0.6	4.2	12.7	23.9	32.3	37.8	37.7	31.1	25.4	26.6	29.6	8.1	2.0	0.7	0.2	0.0
150–155 W	0.7	4.7	12.9	26.1	35.6	38.3	36.2	30.1	22.8	21.1	22.3	6.7	1.8	0.8	0.2	0.0
155–160 W	0.8	4.9	15.2	29.1	36.4	40.0	35.0	29.7	22.2	19.6	14.9	5.4	1.8	0.9	0.1	0.0
160–165 W	0.5	5.2	18.5	31.6	36.7	40.1	33.7	26.9	22.5	18.4	10.1	4.7	1.6	0.7	0.1	0.0
165–170 W	0.4	5.5	19.8	32.2	37.0	39.2	31.7	23.4	19.7	15.1	8.0	4.2	1.4	0.4	0.2	0.0
170–175 W	0.3	5.6	20.0	31.9	38.2	39.6	31.2	21.6	16.2	11.4	6.5	2.8	1.2	0.4	0.2	0.0
175–180 W	0.2	7.9	20.0	31.7	40.0	39.8	29.4	21.0	15.0	8.8	5.1	1.6	0.8	0.6	0.3	0.0
180–175 E	0.4	5.1	20.9	32.4	41.3	39.5	25.8	19.4	14.4	7.1	3.8	1.0	0.5	0.7	0.5	0.1
175–170 E	0.5	5.8	24.2	35.0	42.4	37.6	23.6	16.5	12.5	6.4	2.7	0.9	0.6	0.5	0.4	0.2
170–165 E	0.4	7.4	27.5	37.7	42.7	34.8	22.3	13.5	9.5	5.3	2.1	0.8	0.7	0.4	0.3	0.2
165–160 E	0.2	9.3	28.6	39.8	42.6	32.7	20.1	10.9	6.6	3.6	1.4	0.7	0.8	0.3	0.2	0.1
160–155 E	0.3	11.0	30.5	40.4	40.5	29.7	17.2	9.8	4.5	2.1	0.9	0.6	1.0	0.4	0.3	0.0
155–150 E	0.7	14.4	33.1	39.1	37.0	26.1	13.9	8.9	3.7	1.4	0.7	0.8	1.1	0.5	0.4	0.1
150–145 E	1.1	13.6	34.6	37.5	34.5	21.8	10.6	7.1	3.9	1.3	0.8	1.0	1.1	0.7	0.5	0.2
145–140 E	1.3	16.3	35.8	35.6	30.9	16.4	8.8	6.0	4.1	1.8	1.2	1.2	1.4	0.7	0.4	0.2
140–135 E	1.5	17.8	36.1	33.7	24.5	12.2	8.7	6.3	4.2	2.8	1.7	1.5	2.1	0.8	0.3	0.3
135–130 E	2.0	19.4	35.7	30.5	19.3	10.4	8.1	7.3	5.2	3.1	2.4	1.8	2.7	0.8	0.4	0.4
130–125 E	2.9	22.4	35.4	24.5	15.3	8.9	6.7	7.9	5.4	3.1	3.3	2.2	3.2	1.0	0.6	0.3
125–120 E	3.4	25.2	34.2	16.8	10.7	7.1	5.9	8.9	5.6	3.0	4.5	3.7	3.7	1.3	0.8	0.2

Table 3. *Percentage frequency of fronts in Summer.*

λ \ Φ_N	10—15	15—20	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45	45—50	50—55	55—60	60—65	65—70	70—75	75—80	80—85	85—90
35– 40 E	0.0	0.0	0.0	0.2	0.9	3.0	9.1	18.2	20.9	18.7	20.8	17.8	10.5	6.3	1.9	0.1
30– 35 E	0.0	0.0	0.0	0.3	0.9	3.3	9.0	20.8	21.7	19.1	20.5	18.5	9.7	5.9	1.8	0.2
25– 30 E	0.0	0.0	0.1	0.2	0.8	3.6	10.2	23.1	24.3	21.3	20.4	17.9	10.3	5.4	1.7	0.2
20– 25 E	0.0	0.0	0.0	0.3	0.9	3.9	11.9	24.0	23.4	22.4	20.7	16.3	11.4	5.4	1.7	0.2
15– 20 E	0.0	0.0	0.0	0.4	1.1	3.5	13.4	25.7	25.2	21.9	21.3	14.6	11.8	5.2	1.6	0.2
10– 15 E	0.0	0.0	0.0	0.3	1.3	4.1	15.5	27.9	23.6	22.1	20.6	13.0	11.6	4.6	1.4	0.2
5– 10 E	0.0	0.0	0.0	0.1	1.3	4.3	19.5	28.3	22.8	23.8	18.9	12.0	11.6	4.3	1.1	0.2
0– 5 E	0.0	0.0	0.0	0.3	1.6	6.8	21.8	26.5	23.2	23.1	18.8	11.9	11.4	3.9	0.9	0.2
0– 5 W	0.0	0.0	0.0	0.5	1.9	8.4	20.6	24.7	27.0	20.8	19.5	12.9	9.5	3.2	0.6	0.1
5– 10 W	0.0	0.0	0.0	0.4	2.3	8.9	20.2	26.5	25.0	19.6	18.9	13.5	6.7	2.3	0.5	0.0
10– 15 W	0.0	0.0	0.0	0.2	2.7	10.2	23.3	30.6	24.3	18.8	17.1	12.4	5.1	1.3	0.3	0.0
15– 20 W	0.0	0.0	0.0	0.3	3.7	12.7	28.5	32.6	24.8	18.8	15.3	10.5	4.4	1.0	0.1	0.0
20– 25 W	0.0	0.0	0.0	0.7	5.2	16.2	33.2	33.4	26.3	19.2	13.8	8.6	2.6	0.9	0.0	0.0
25– 30 W	0.0	0.0	0.0	1.4	6.2	19.5	36.6	35.0	27.4	18.3	11.9	6.8	1.6	0.7	0.0	0.0
30– 35 W	0.0	0.0	0.0	1.7	6.9	22.4	41.2	37.0	29.4	16.9	10.0	5.4	1.0	0.4	0.0	0.0
35– 40 W	0.0	0.0	0.0	1.9	7.9	25.6	44.4	36.9	29.0	15.8	8.3	4.3	0.6	0.2	0.0	0.0
40– 45 W	0.0	0.0	0.1	2.1	8.8	29.4	45.3	34.2	25.7	13.8	6.3	3.4	0.7	0.1	0.0	0.0
45– 50 W	0.0	0.1	0.2	3.0	9.4	32.6	46.1	33.5	24.3	12.9	6.1	3.5	1.1	0.1	0.0	0.0
50– 55 W	0.0	0.0	0.3	3.0	11.7	35.9	47.5	33.6	22.8	14.3	7.5	3.6	1.4	0.2	0.0	0.0
55– 60 W	0.0	0.0	0.5	4.2	15.8	39.6	46.2	32.0	19.5	15.5	7.8	3.0	1.2	0.2	0.0	0.0
60– 65 W	0.0	0.0	0.7	6.4	19.5	41.7	41.2	31.1	18.6	15.9	7.6	2.8	0.9	0.1	0.0	0.0
65– 70 W	0.0	0.1	1.1	8.2	23.2	47.7	38.8	30.4	19.5	16.0	7.5	2.9	0.6	0.0	0.0	0.0
70– 75 W	0.0	0.1	1.6	9.1	28.3	45.7	37.6	30.1	19.8	14.9	7.1	2.9	0.6	0.0	0.0	0.0
75– 80 W	0.0	0.2	1.7	10.0	30.1	38.3	36.1	29.1	19.1	13.9	6.9	2.8	0.8	0.1	0.0	0.0
80– 85 W	0.0	0.2	1.6	9.9	25.3	31.1	36.4	25.9	17.8	14.4	7.2	2.8	0.8	0.1	0.0	0.0
85– 90 W	0.0	0.2	1.3	7.8	19.3	29.7	36.6	24.8	17.7	14.8	7.6	2.5	0.8	0.1	0.0	0.0
90– 95 W	0.0	0.1	1.0	5.4	16.1	30.9	35.4	26.4	18.5	14.7	7.8	2.1	0.9	0.1	0.0	0.0
95–100 W	0.0	0.0	0.7	4.1	14.7	29.3	32.7	26.1	18.3	14.8	7.9	2.3	1.0	0.2	0.0	0.0

Table 3 (continued).

λ \ Φ_N	10—15	15—20	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45	45—50	50—55	55—60	60—65	65—70	70—75	75—80	80—85	85—90
100–105 W	0.0	0.0	0.3	3.2	12.3	23.0	27.9	23.3	17.9	14.7	8.3	3.0	1.3	0.4	0.0	0.0
105–110 W	0.0	0.0	0.1	1.9	7.2	15.0	20.9	20.1	17.7	13.3	8.9	3.6	1.4	0.4	0.0	0.0
110–115 W	0.0	0.1	0.1	1.1	3.7	10.2	15.3	16.3	16.1	13.1	9.8	3.8	1.2	0.2	0.0	0.0
115–120 W	0.0	0.1	0.2	1.4	3.6	8.7	12.9	12.5	14.3	14.1	10.9	5.1	1.3	0.2	0.1	0.1
120–125 W	0.1	0.1	0.2	1.7	4.1	8.6	13.1	13.4	15.0	14.9	12.9	7.5	2.0	0.3	0.0	0.0
125–130 W	0.1	0.0	0.2	1.7	4.5	10.2	15.9	19.5	18.5	14.3	13.9	9.0	2.9	0.4	0.0	0.0
130–135 W	0.0	0.0	0.3	2.0	5.3	13.5	18.7	24.1	22.4	15.1	12.7	9.5	3.0	0.5	0.0	0.0
135–140 W	0.0	0.1	0.4	2.3	6.7	16.7	21.5	26.1	25.5	19.5	11.6	10.3	3.0	0.5	0.0	0.0
140–145 W	0.0	0.2	0.4	2.4	8.1	18.6	25.6	27.7	27.3	23.2	10.9	9.9	3.2	0.8	0.0	0.0
145–150 W	0.0	0.2	0.5	2.6	9.3	18.6	28.4	27.5	27.3	23.1	10.7	8.3	3.0	0.8	0.0	0.0
150–155 W	0.0	0.1	0.5	2.9	11.3	23.9	28.5	27.0	26.9	19.9	10.5	7.9	2.9	1.0	0.0	0.0
155–160 W	0.0	0.0	0.6	3.1	13.4	26.4	28.7	28.9	26.9	17.4	10.0	7.9	3.0	0.6	0.0	0.0
160–165 W	0.0	0.1	0.8	3.2	14.1	26.5	30.5	31.5	26.7	17.3	9.9	7.3	2.8	0.2	0.0	0.0
165–170 W	0.0	0.2	0.9	3.8	14.3	26.4	32.9	33.8	26.9	17.7	10.0	6.7	2.3	0.1	0.0	0.0
170–175 W	0.0	0.3	0.9	4.8	15.4	29.0	34.5	35.1	26.5	17.4	10.3	6.2	1.8	0.2	0.1	0.1
175–180 W	0.0	0.3	1.0	5.9	16.8	31.6	36.3	34.8	23.5	15.3	10.1	5.2	1.5	0.3	0.2	0.2
180–175 E	0.0	0.2	1.1	6.9	19.3	34.3	40.1	33.7	19.9	11.9	8.1	4.1	1.5	0.6	0.3	0.2
175–170 E	0.0	0.1	1.2	8.3	23.7	36.7	42.5	30.0	16.9	9.2	6.1	4.1	1.8	0.9	0.4	0.2
170–165 E	0.0	0.0	1.5	10.2	27.1	38.8	40.5	24.7	14.3	7.8	5.1	4.8	2.1	1.2	0.5	0.2
165–160 E	0.0	0.1	2.3	11.8	29.1	38.2	37.1	21.2	11.7	6.8	4.7	5.2	2.3	1.7	0.7	0.3
160–155 E	0.0	0.2	2.9	12.3	30.6	35.7	33.7	18.3	9.9	5.9	4.9	5.5	2.3	2.4	1.0	0.4
155–150 E	0.0	0.3	3.9	12.7	31.7	35.2	30.1	15.2	10.0	5.5	5.5	5.6	1.9	2.6	0.9	0.4
150–145 E	0.0	0.4	6.2	13.9	32.0	33.8	25.9	13.2	11.7	6.5	6.2	5.5	1.7	2.2	0.8	0.4
145–140 E	0.0	0.3	8.1	15.3	30.5	29.3	21.3	14.6	14.0	7.8	7.3	5.3	2.0	1.5	0.8	0.3
140–135 E	0.0	0.3	8.2	17.1	26.9	23.7	17.9	17.1	15.3	10.3	8.1	5.3	2.9	1.3	0.8	0.4
135–130 E	0.0	0.6	7.9	18.5	23.3	18.4	15.0	18.4	15.9	11.6	7.2	5.2	3.5	1.6	1.1	0.4
130–125 E	0.0	0.9	7.9	17.7	19.8	14.7	12.8	19.7	17.1	11.4	6.4	4.8	3.6	2.3	1.3	0.4
125–120 E	0.0	1.2	7.7	15.1	15.5	12.2	12.9	20.9	18.2	11.1	6.8	5.3	4.0	2.7	1.5	0.4

the parallels, and the results are presented in tables 2 and 3 for winter and summer respectively, the winter months being December, January and February and the summer months June, July and August. Hence, in

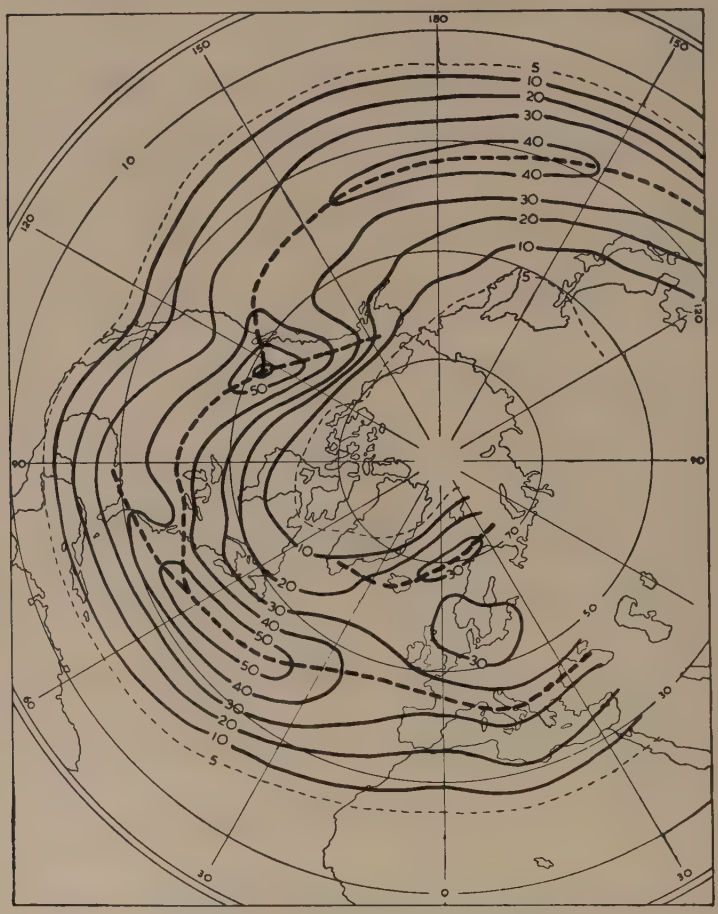


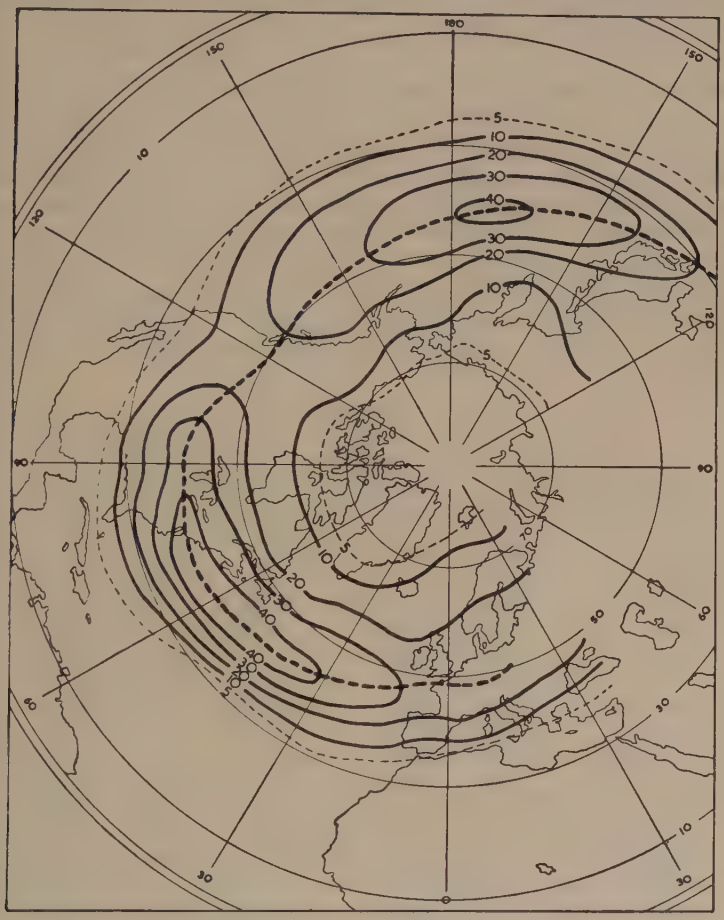
Fig. 2. Percentage frequency of fronts in Winter.

all, more than 1800 daily synoptic charts were scrutinized to obtain th figures in these tables. The graphical representation of the frequency o fronts is contained in figs. 2 and 3.

4. Discussion of results.

In figs. 2 and 3 the ridges of maximum frequency are indicated b heavy broken lines, and it is instructive to compare these with the pola and arctic fronts, e.g. as drawn by Petterssen [3] in his well-know

book on weather analysis. When the winter charts are compared, it appears that there is a fairly close correspondence between the fronts and the ridges of maximum frequency. Thus the Atlantic Arctic Front


180
150
150
120
120
90
90
60
60
30
30
0
5
10
20
30
40
30
20
10
5
10
20
30
40
30
20
10
5
10
20
30
40
30
20
10

Northern Hemisphere, with the exclusion of the sector between 40 and 120° E. These values are contained in table 4, in which are also included the average gradients of temperature and pressure for the part of the Northern Hemisphere under consideration, since we may suspect that there exists some relation between the frequency of fronts and these gradients.

The pressure gradient P' in millibars per ten degrees of latitude was obtained from the data on which the said Historical Weather Charts are based. On the other hand, it was not easy to obtain representative temperature figures. Eventually it was decided to calculate the mean average temperature of the air between the 1000 and 500 millibar levels, and for this purpose the maps of Scherhag [4] of the relative topography between these two levels for January and July were used. The temperature thus determined ranged from 281.9° A at 10° latitude to 243.5° A at the pole in January, and from 285° A to 263.7° A in July. The temperature gradient T' is expressed in degrees centigrade per ten degrees of latitude.

Table 4.

	Winter.				*Summer.*			
Φ	F	T'	P'	F'	F	T'	P'	F'
10	0	2.1	1.15	1.2	0	— 1.3	0.05	— 0.7
15	2.4	3.0	2.00	3.7	0	— 0.8	0.13	0.5
20	8.7	3.8	2.85	6.3	0.3	0.2	0.42	2.1
25	19.2	4.8	2.50	12.0	3.3	1.3	1.23	1.5
30	27.4	6.1	0.60	22.3	8.8	2.6	1.32	5.3
35	32.7	7.7	— 0.25	32.0	17.0	3.6	0.67	12.2
40	33.4	8.1	— 0.95	35.1	26.1	4.3	0.0	18.5
45	30.8	7.1	— 1.40	30.8	27.8	4.4	— 0.72	22.9
50	26.5	6.1	— 1.63	26.5	23.4	3.9	— 1.38	25.1
55	21.3	5.4	— 1.33	22.7	18.1	3.4	— 1.08	21.7
60	16.7	5.2	— 0.26	19.5	13.2	3.4	— 0.08	16.0
65	12.3	5.5	0.44	19.4	9.0	3.7	0.75	12.3
70	8.4	5.0	0.92	16.1	5.5	4.3	1.44	10.4
75	5.2	4.1	1.38	10.7	2.8	4.6	1.97	8.4
80	2.4	2.5	1.72	2.0	1.0	2.5	2.31	— 0.7
85	0.6	0.7	1.30	— 6.4	0.1	0.8	1.70	— 3.0
90	0	0	0	— 7.0	0	0	0	4.0

The greatest frequency of fronts is undoubtedly to be sought in the region where the greatest temperature contrast prevails, and in actual fact the correlation coefficient between F and the temperature gradient T', as computed from the table above, is 0.92 in winter and 0.70 in summer. The association of frontogenesis with sharp temperature gradients, is therefore borne out by these high correlation coefficients.

Instead of a gradual increase of pressure from equator to pole corresponding to decrease in temperature, the rotation of the earth causes

ne well-known belt of high pressure with a resultant negative pressure radient roughly between the 40th and 60th parallels. A certain degree f dynamic instability is evidently associated with this reversal in the ressure gradient as shown by the negative correlation coefficient between and P', its value being —0,64 in winter and —0.62 in summer.

Since F is dependent both on T' and P' we can combine the two to a single entity F' to give the highest possible correlation with F.

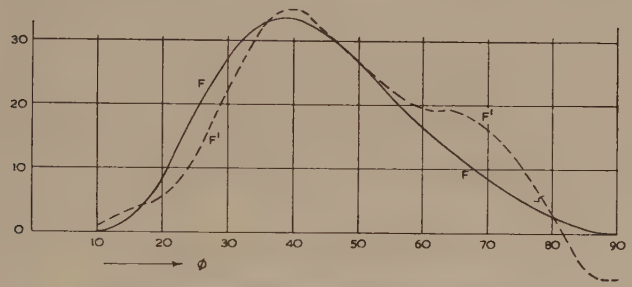


Fig. 4. Relation between F and F' in Winter.

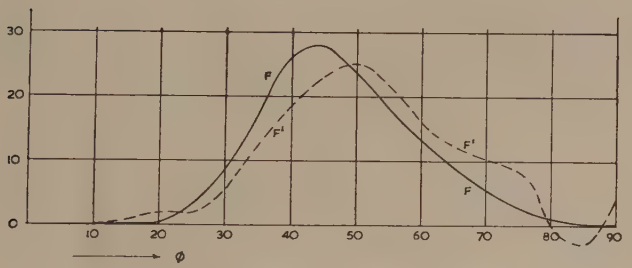


Fig. 5. Relation between F and F' in Summer.

is was done, and in table 4 the values of F' also appear, where $F' = 5\,T' - 2\,P' - 7$ in winter and $F' = 3.4\,T' - 5.7\,P' + 4$ in summer. e correlations between F and F' are 0.94 and 0.92 for winter and mmer respectively. The close relation between F and F' for the two asons is shown graphically in figs. 4 and 5.

References.

PETTERSSEN, S.: Frontogenesis and Fronts in the Atlantic Area. Mém. et Disc., Pr.-Verb. Séanc. Ass. Mét. U. G. G. I. Edinbourgh, 1936, pp. 83 à 105.

U. S. Weather Bureau: Normal Weather Maps. Northern Hemisphere Sea Level Pressure. Washington, April, 1946.

PETTERSSEN, S.: Weather Analysis and Forecasting. New York, 1940, pp. 266—273.

SCHERHAG, R.: Neue Methoden der Wetteranalyse und Wetterprognose. Berlin, 1948, pp. 67 bis 70.

551.515.13 (261) : 523.74

(School of Cosmic Physics, Dublin Institute for Advanced Studies.)

On the Frequency of Cyclones over the North Atlantic Related to the Sunspot Cycle.

By

L. W. Pollak and P. G. Tedde.

With 7 Figures.

Summary. C. J. KULLMER and H. H. CLAYTON found shifts in the latitude *tracks* of low pressure areas in North America with change in sunspot activity. These remarkable results called for an extension of their investigations to other parts of the globe and this was made possible by the U. S. Weather Bureau Northern Hemisphere Historical Map Series published lately and was all the more justified since no statistical tests of significance had been applied so far.

Owing to the material used, only *frequencies* of cyclonic centres for three solar cycles between 1899 and 1932 were subjected to a search for a relationship to the solar activity and the area investigated has for the time being been restricted to the North Atlantic. Our results are based on 12 418 weather maps for 1300 G. M. T.

In spite of the fact that track-frequencies and frequencies of cyclonic centres of different periods have been combined (Fig. 1) agreement in the characteristic features of the average annual frequency in the overlapping part of the areas investigated by previous authors and ourselves exists. The maximum frequency of the cyclonic tracks occurs over the United States in a belt around 50° N. which continues in approximately the same latitude up to 55° W. and then over the Atlantic turns northwards, reaching 62° N. between 10° and 0° W. Isopleths of the total frequency (Fig. 2) of the cyclonic centres describe this belt in greater detail and show the three well known frequency maxima in the regions of Newfoundland, Greenland and Iceland.

During the period 1899 to 1929, generally three belts of maximum frequency (in high, middle and low latitudes) appear in a single year. Figs. 3 and 4 show two characteristic specimen maps. The movement of these belts (Figs. 5 and 6) along the mid-Atlantic meridian seems to indicate a correlation to the solar activity although its interpretation is ambiguous.

The plotting of the differences of the cyclonic frequencies (for three year periods) at the maximum and minimum solar activity and for KULLMER's "selected" and "test" years respectively does *not* reveal any conspicuous

attern. The considerable differences in the cyclonic frequencies at the naximum and minimum solar activity in the Greenland area (Fig.7) might ndicate a solar influence. The application of the t test to the frequencies of ow pressure centres over the North Atlantic indicates a solar influence at east in the latitudes 50° to 60° N., which is supported by the results of ur application of the t test to Kullmer's track frequencies over the United tates.

Zusammenfassung. C. J. Kullmer und H. H. Clayton haben Breitenerschiebungen der Bahnen der Tiefdruckgebiete in Nordamerika mit der onnenfleckentätigkeit gefunden. Diese bemerkenswerten Resultate legten ine Ausdehnung ihrer Untersuchungen auf andere Teile der Erde nahe, elche jetzt durch die kürzlich vom Wetterbureau der Vereinigten Staaten eröffentlichte Reihe historischer Wetterkarten der nördlichen Halbkugel rmöglicht wurde. Eine solche Untersuchung war um so mehr gerechtertigt, als die früher genannten Autoren keine Wahrscheinlichkeitskriterien ngewendet, sondern ihre Feststellungen auf rein graphischem Wege abeleitet hatten.

Da das von uns benützte Material nur eine Wetterkarte per Tag gibt, aben wir bloß die *Häufigkeit* der Tiefdruckzentren während dreier Sonnenleckenzyklen im Zeitraum von 1899 bis 1932 auf ihre Beziehung zur Sonnenätigkeit hin untersucht und das Untersuchungsgebiet vorläufig auf den ördlichen Atlantischen Ozean beschränkt. Unsere Resultate gründen sich uf 12418 Wetterkarten, welche für 1300 M. G. Z. entworfen sind.

Trotzdem in Abb. 1 Häufigkeiten von Zyklonenbahnen und Tiefdruckentren von sogar verschiedenen Epochen zusammengestellt sind, besteht ute Übereinstimmung in den charakteristischen Zügen der durchschnittichen jährlichen Häufigkeit in den übergreifenden Teilen der von den obenenannten Forschern und uns untersuchten Gebiete. Die größte Häufigkeit er Tiefdruckbahnen tritt über den Vereinigten Staaten von Nordamerika n einem Gürtel in ungefähr 50° n. Br. auf, der sich bis 55° westlicher Länge rstreckt und dann über dem Atlantik nordwärts wendet; er erreicht 62° n. Br. wischen 10° und 0° westlicher Länge. Isoplethen der Gesamthäufigkeit Abb. 2) der Tiefdruckzentren geben Einzelheiten über die Ausdehnung und Gestalt dieses Gürtels und zeigen die drei wohlbekannten Häufigkeitszentren n der Gegend von Neufundland, Grönland und Island.

Im allgemeinen treten in einzelnen Jahren des Zeitraums 1899 bis 1929 rei Gürtel größter Häufigkeit auf, und zwar in hohen, mittleren und niedrigen Breiten; in manchen Jahren ist allerdings der Gürtel südlich von 20° n. Br. chlecht ausgeprägt. Abb. 3 und 4 bringen zwei charakteristische Beispiele. Die Verschiebung dieser Gürtel in der Mitte des Atlantischen Ozeans, entang dem Meridian von 35° westlicher Länge, deutet eine Korrelation mit er Sonnenaktivität an, wenn auch die Interpretation dieser Beziehung och unsicher ist. Es ist möglich, die Nord-Süd-Verschiebung dieser Gürtel o der Sonnentätigkeit zuzuordnen, daß die Minima der Sonnenflecken-Relativzahlen der größten Südwärtsverschiebung der Häufigkeitsgürtel entprechen und die Maxima der Sonnentätigkeit ihrer größten Verlagerung ach Norden (Abb. 5). Man kann aber auch, wenn auch nicht so zwanglos, ie in Abb. 6 wiedergegebene, umgekehrte Zuordnung versuchen.

Die Mappierung der Differenzen der Häufigkeit der Lage der Tiefdruckentren zur Zeit der Maxima und Minima der Sonnentätigkeit und für die on Kullmer definierten „ausgewählten" und „Probe"-Jahre ergibt komlizierte Anordnungen der Häufigkeitskurven über dem nordatlantischen

Ozean und zeigt, im Gegensatz zu jenen über dem nordamerikanische Kontinent, *keine* auffallende Anordnung. Die beträchtlichen Unterschied in den Häufigkeiten der Tiefdruckzentren im Gebiete von Grönland zwische den Maxima und den Minima der Sonnentätigkeit (Abb. 7) könnten immerhi einen solaren Einfluß andeuten. Die Anwendung des sogenannten „*t*-Test auf die Häufigkeitsverteilung der Zyklonen über dem Nordatlantik läß einen solaren Einfluß wenigstens in den Breiten von 50° bis 60° N. erkenner ein Befund, der durch die Anwendung desselben Tests auf die von Kullmer für Nordamerika mitgeteilten Häufigkeiten der Zyklonenbahnen gestütz wird.

Résumé. C. J. Kullmer et H. H. Clayton avaient constaté un dépla cement en latitude des trajectoires de dépressions en Amérique du Nor en relation avec l'activité des taches solaires. Ces résultats remarquable suggéraient une extension des recherches dans d'autres régions du globe recherches facilitées par la publication récente par le Weather Bureau amér cain de séries de cartes du temps rétrospectives de l'hémisphère nord. Un telle étude était d'autant plus justifiée que les auteurs cités n'avaient pa appliqué de critères probabilistes et n'avaient conclu que sur la base d méthodes graphiques.

Comme le matériel utilisé ici ne comporte qu'une carte par jour, nou nous sommes borné à étudier la fréquence des centres de basse pression e relation avec l'activité solaire durant trois cycles de taches solaires, soit dan la période de 1899 à 1932; nous n'avons en outre considéré que la région d l'Atlantique nord en utilisant 12418 cartes synoptiques dessinées pour 13 h T. M. G.

Bien que la fig. 1 représente des fréquences de trajectoires et de centre de basse pression de périodes différentes, elle montre cependant un bo accord des traits caractéristiques des fréquences moyennes annuelles dan les régions communes étudiées par les auteurs cités et par nous. La plu grande fréquence de trajectoires dépressionnaires s'observe aux États-Uni dans une zone de latitude voisine de 50° N s'étendant du méridien de 55° W à l'Atlantique septentrional; ici, elle se tourne vers le N et atteint 62° d latitude N entre les longitudes occidentales de 10° à 0°. Les isoplèthes de l fréquence totale (fig. 2) des centres de basse pression décrivent l'étendue e la forme de cette zone, et mettent en relief les trois centres de fréquenc bien connus de Terre-Neuve, du Groenland et de l'Islande.

D'une façon générale, trois zones de fréquence maximum apparaisser dans la période 1899—1929, et cela aux latitudes hautes, moyennes et basse certaines années, la zone au sud du 20me parallèle N est à vrai dire mal défini Les figures 3 et 4 fournissent deux exemples caractéristiques. Le déplacemer de cette zone au milieu de l'Atlantique, le long du méridien de 35° W, fa pressentir une corrélation avec l'activité solaire, bien qu'une incertitude plan encore sur cette interprétation.

La corrélation pourrait s'établir dans ce sens qu'au minimum de tach solaires correspond le plus grand déplacement vers le Sud de la zone d fréquences, et au maximum de taches le plus grand déplacement vers Nord (fig. 5). Mais il est aussi possible de renverser les rôles, comme l'indiq la fig. 6, bien que cela paraisse moins naturel.

Si l'on reporte sur la carte les différences de fréquences des positio des centres de basse pression aux époques respectives des maxima et des minir de l'activité solaire pour les années classées par Kullmer (comme sélectiv ou de contrôle) on obtient des courbes compliquées sur l'Atlantique no

on ne retrouve plus les dispositions régulières apparaissant sur le continent
néricain. Toutefois les différences importantes de fréquences des centres
épressionnaires dans la région du Groenland entre les maxima et les minima
e l'activité solaire (fig. 7) pourraient faire supposer une influence solaire.
'application du «test *t*» à la distribution des fréquences des cyclones sur
Atlantique nord fait apparaître une influence solaire, au moins aux latitudes
mprises entre 50° et 60° N; ce fait est confirmé par l'application de la
ême méthode aux fréquences de trajectoires dépressionnaires en Amérique
u Nord par KULLMER.

Introduction.

The change in the distribution of pressure between sunspot maximum nd sunspot minimum has been investigated several times. The connection etween the shift of storm tracks (frequency of cyclones) over the United tates and solar activity has been studied by C. J. KULLMER [*1*] and by . KIDSON for the region of Australia and New Zealand. Their results ndicate shifts in the latitude tracks of low pressure areas with change n sunspot activity [*2*].

KULLMER based his researches on the series of maps giving the tracks f low pressure systems over the United States, as published in the U. S. Monthly Weather Review" from 1874 to the present. He divided the rea investigated into rectangular sections of 5 degrees longitude difference nd $2^1/_2$ degrees latitude difference, and computed the difference of rack frequencies between three years at the maximum and three years t the minimum solar activity of *succeeding* cycles for six cycles and ound that the maxima of these differences were arranged in a W.-E. elt in northern latitudes and in a southerly linear projection (between ne longitudes 83° and 102° W.) originating in this belt. In the sunspot ycles I (Max. 1882–84 vs. Min. 1877–79), III (Max. 1905–07 vs. Min. 900–02) and IV (Max. 1916–18 vs. Min. 1911–13) the belt is situated n a zone around 50° N., while in the cycles II (Max. 1892–94 vs. Min. 888–90), V (Max. 1927–29 vs. Min. 1922–24) and VI (Min. 1932–34 vs. Iax 1936–38 and Min. 1932–34 vs. Max. 1937–39) the belt shifts with s most southerly bow up to 40° N. The linear projection from the belt nows a displacement in the E.-W. direction. From the observations n the first four periods KULLMER believed justified in deducing a relation etween sunspot latitudes and the latitudes of the storm tracks over the Inited States; this conclusion however was contradicted by the fifth and xth periods.

In order to intensify the latitude effect, KULLMER then considered ree years at the beginning and three years at the end of the *same* cycle sing the following periods: I (1880–82 vs. 1886–88), II (1890–92 vs. 899–1901), III (1903–05 vs. 1909–11), IV (1913–15 vs. 1920–22) and V 924–26 vs. 1931–33). He then found that the relationship between the titude of the sunspots and the cyclones had disappeared. Gone also as the pattern with the southerly projection which he had found for x solar cycles. — Instead KULLMER now believed that he had discovered systematic shift of storm tracks, such that the pattern was repeated

after four sunspot cycles during which three 'horizontal' bands (i. bands parallel to the latitude circles) of excess storm frequencies alternate with an arrangement of the excess frequencies in form of a script pattern.

According to H. H. Clayton [2], whose investigation is based o data furnished by Kullmer, maps at intervals of two years show th "the bands of excess storm frequency in southern Canada at sunsp minima progress southwards towards the equator just as do spots o the sun. The low pressure centres are most frequent in middle latitud when sunspots are at their maximum and reach low latitudes whe sunspots are at a minimum. A new band of excess frequency then appea in southern Canada."

These remarkable results called for an extension of Kullmer's i vestigation to other parts of the globe as suggested by H. C. Willett [and this was made possible by the monumental U. S. Weather Burea Northern Hemisphere historical map series published during the rece war [4].

We are indebted to the Chief of the U. S. Weather Bureau, Dr. F. W Reichelderfer, for presenting a complete set of this unique collecti of weather maps to the School of Cosmic Physic of our Institute.

Since this series contains only one map per day (for 1300 G. M. T and the construction of tracks was considered impracticable, we restricte our investigation to frequencies. Our aim was to deduce the frequen distribution of cyclonic centres over the North Atlantic for the thr solar cycles between 1899 and 1932 and to search therein for a relationsh to the solar activity.

We are aware that our frequency distribution is affected by th rather large time interval of 24 hours between consecutive maps bu we are of the opinion that our material should suffice for our purpo in the first instance, since this influence affects approximately to th same extent both epochs of the sunspot period which we have compare

Method.

We considered the area of the North Atlantic ocean and its adjace continental coasts between the equator and 70° N. and between 9 W. of Greenwich and the meridian of Greenwich. This region was divide into 252 squares each of 5 degrees latitude- and longitude-differenc By means of a grid the centres of relatively low pressure were locat and the barometric pressure in these centres at 1300 G. M. T. f each day of the years 1899 to 1932 determined. The frequency of t cyclonic centres in each square was then deduced by means of pun cards.

We are indebted to Miss Nuala O'Brien of the School of Cosm Physics for evaluating the 12418 weather maps and to the *Irish La Commission* of the Department of Lands in Dublin for the rapid a reliable production of the punch cards.

Results.

Fig. 1 shows the average annual frequency of cyclonic centres for he period 1899 to 1932 as determined by us together with H. H. CLAYTON's

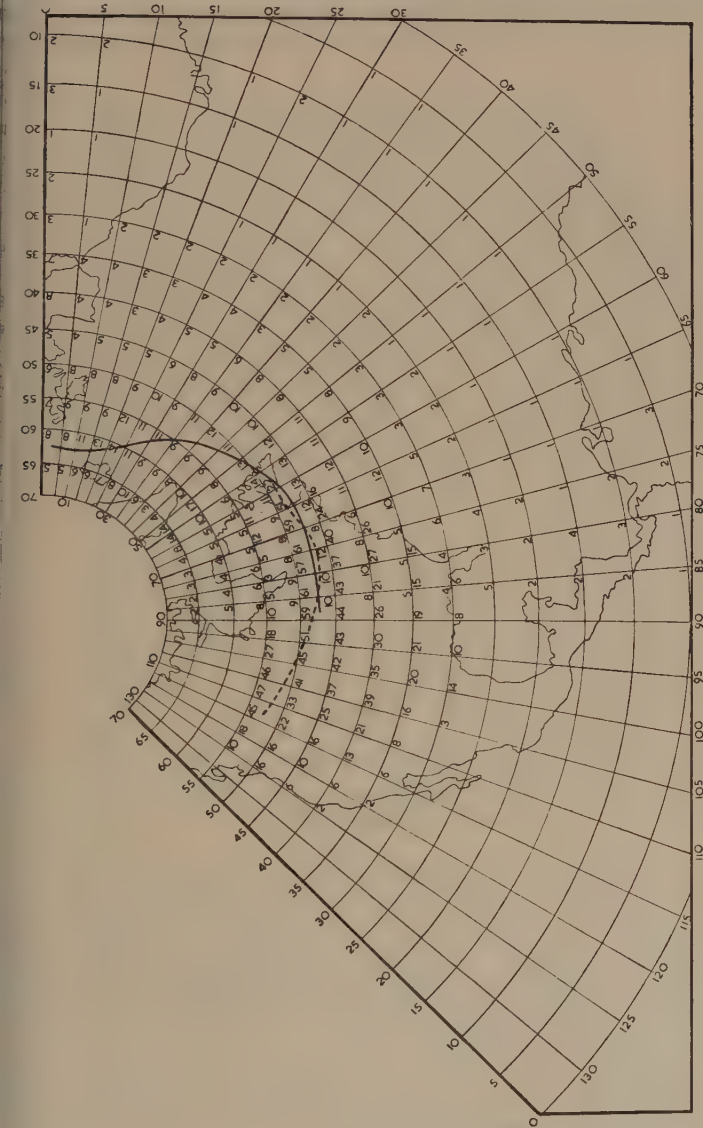


Fig. 1. Average Annual Frequency of Cyclonic Centres. Frequency of tracks of centres after H. H. CLAYTON for period 1883 to 1912 shown at the top of each five degree rectangle, frequency of low pressure centres after POLLAK-TEDDE for 1899 to 1932 at the bottom.

verage annual frequency of the tracks of centres of low pressure 1883 o 1912 (see Ref. [2] Fig. 15, p. 23). Our frequency figures are written t the bottom of each five degree rectangle and CLAYTON's figures at the

top. A heavy dotted line was drawn through the rectangles which contain the maximum track frequency in each meridional strip of 5 degrees width as given by Clayton, and similarly a full line through the squares with maximum cyclonic frequency as found by us.

It is noteworthy that in spite of the fact that track-frequencies and frequencies of cyclonic centres are combined, a perfect agreement of

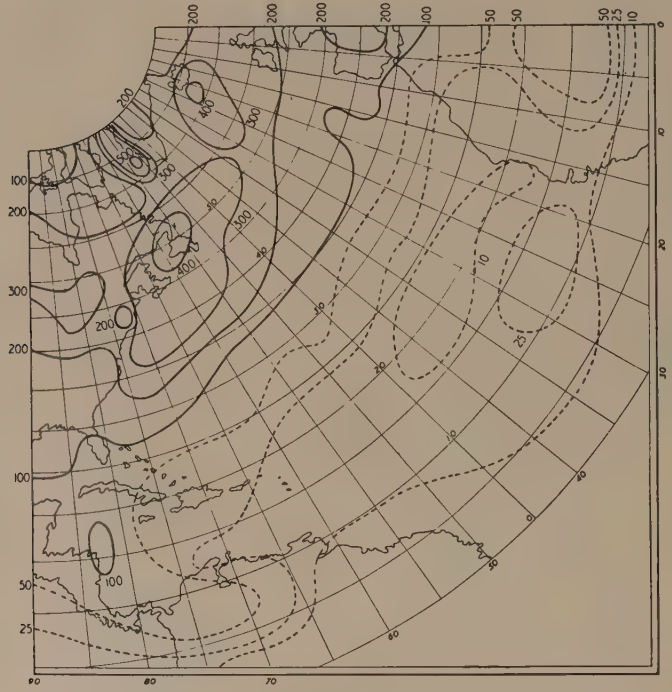


Fig. 2. Iso-Frequencies of Centres of Low Pressure at 13 h. G.M.T., 1899—1929.

the characteristic features in the overlapping part exists, although the absolute values of the frequencies of course must disagree.

The maximum frequency of the cyclonic tracks occurs over the United States in a belt around 50° N. which, as indicated by the cyclonic centre frequency, continues in approximately the same latitudes up to 55° W. and then over the North Atlantic turns northwards, reaching 62° N. between 10° to 0° W.

From this ridge the frequency decreases in general towards South and North; only in the strip between 65°–50° W. i. e. on the W.-coast of Greenland does an increase take place.

Over the United States a decrease of the frequencies is noticeable in the direction of the Pacific coast, and also, on the whole, towards the Atlantic coast.

Isopleths of the total frequency of the cyclonic centres at 13 h. G. M. T. during the period 1899 to 1929 are shown in Fig. 2.

Taking the average annual frequency for the period 1899 to 1929 as normal mean we formed for every second year the deviations from the normal for each rectangle and we plotted these deviations. In order to eliminate any bias, we requested Miss O'Brien, our experienced

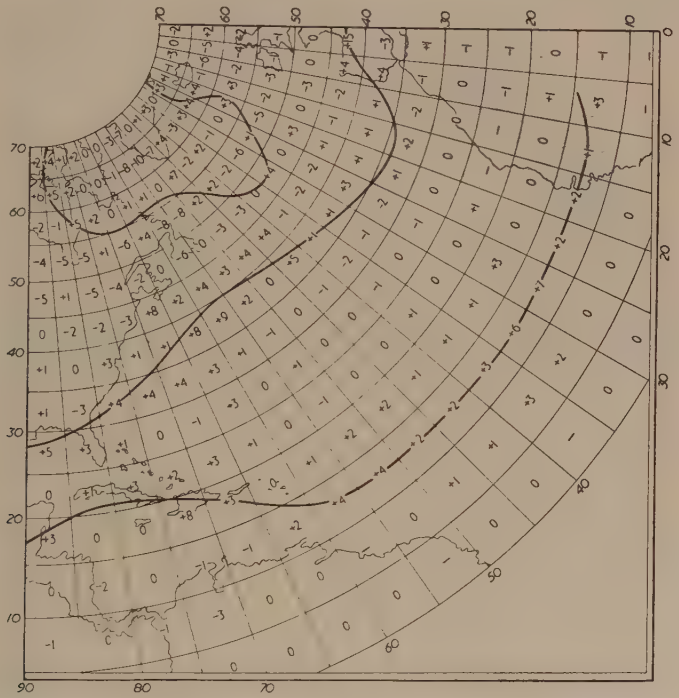


Fig. 3. Deviations from the Average 1899 to 1929 of Frequency of Low Pressure Centres in 1901 (Minimum Solar Activity).

technical assistant, to draw the bands of maximum frequency after first carefully studying similar maps given by H. H. Clayton [2] for the American continent and covering the period 1931 to 1940. Two characteristic specimen maps for 1901 and 1913 are reproduced in Fig. 3 and 4. In the middle of each rectangle is entered the average frequency of the cyclonic centres in the particular year. Looking through all the drawn maps we observe first of all that the bands of maximum frequency may be determined without persuasion, although these belts are better defined in some years than in others.

Generally, three such belts appear, in high, middle and low latitudes, but in several years the belt south of 20° N. is ill defined. We note also that in 1913 and 1923, years of minimum solar activity, there is only one band of excess storm frequency.

In order to study the movement of these belts during the sunspot cycles, the latitude of greatest departures from normal (as defined by these belts) along the meridian 35° W. (i. e. along the mid-Atlantic meridian) together with the relative numbers of sunspots was plotted against time (Fig. 5). The agreement in the course of the curves is striking, although it should not be overlooked that the minima of solar activity

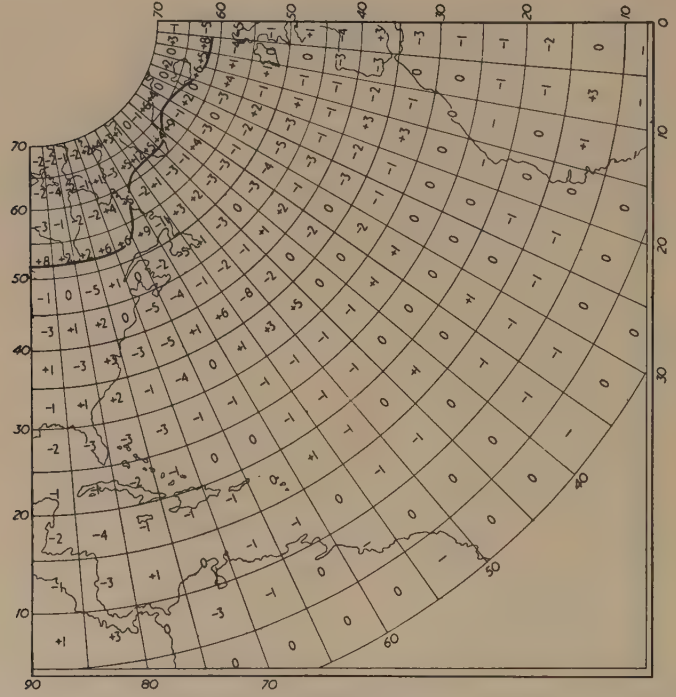


Fig. 4. Deviations from the Average 1899 to 1929 of Frequency of Low Pressure Centres in 191 (Minimum Solar Activity).

coincide with the greatest shift of the belts southward and its maxima with their most northerly position.

The positions in latitude of the bands of maximum cyclonic frequency at 35° W. longitude as shown in Fig. 5, however, permit another interpretation which is given in Fig. 6. Although we consider this interpretation which coordinates the maxima of solar activity with the position of the bands of maximum cyclonic frequency in high latitudes as less unconstrained, it is in agreement with the results given by H. H Clayton [2].

Furthermore, we plotted the differences of cyclonic frequencies fo three year periods, namely three years around the maximum and aroun the minimum solar activity (1905–1907 minus 1900–1902, 1916–191

minus 1911–1913, 1927–1929 minus 1922–1924) and also three years each at the beginning and at the end of the same solar cycle (1903–1905 minus 1909–1911, 1913–1915 minus 1920–1922; 1902–1904 minus 1910–1912, 1914–1916 minus 1920–1922) as indicated by MAUNDER's chart of sunspot

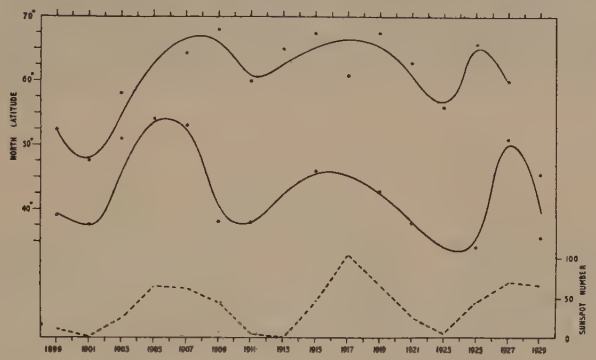


Fig. 5. Positions (·) in Latitude of the Bands of Maximum Cyclonic Frequency at 35° W. Longitude and their Representation by an Interpolating Curve (solid curves) using Positions in high and middle Latitudes separately. — The broken line shows the course of the relative sunspot numbers.

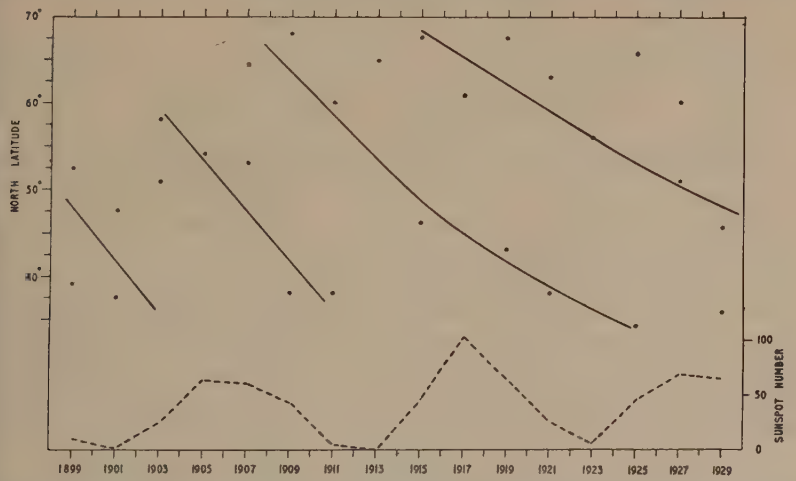


Fig. 6. Positions (·) in Latitude of the Bands of Maximum Cyclonic Frequency at 35° W. Longitude as shown in Fig. 5 and their Representation by a different Interpolating Function (solid lines) combining the Positions in high and middle Latitudes. — The broken line shows the course of the relative sunspot numbers.

latitudes. The two sets at the beginning and at the end of the cycle are called by KULLMER "selected" and "test" years respectively.

An examination of these seven, rather complicated maps does not reveal any conspicuous pattern. There are, however, considerable differences in the cyclonic frequencies at the maximum and minimum

solar activity in the region of Greenland which reach amounts between + 34 and — 40 in the three years period and *might* indicate a solar influence in this sense that the frequency of the cyclonic centres west of Greenland and in West Greenland between say 60° and 65° N. is considerably smaller during the maximum solar activity than during its minimum, while the opposite is the case north of 65° N.

The *average* differences of cyclonic frequency at maximum and minimum solar activity for the three solar cycles 1905–1907 minus

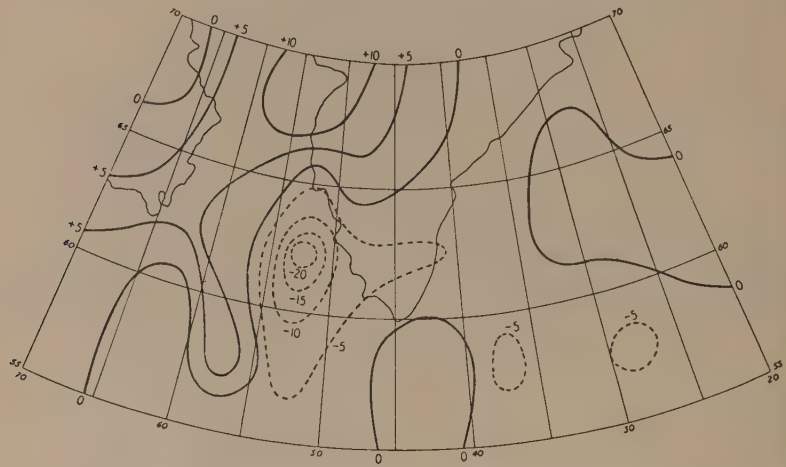


Fig. 7. Average Differences of Cyclonic Frequency at Maximum and Minimum Solar Activity for three Solar Cycles in Region of Greenland.

1900–1902, 1916–1918 minus 1911–1913 and 1927–1929 minus 1922–1924 in the region of Greenland are represented in Fig. 7.

The result obtained seems to be in good agreement with the well-known observation [*5*] that with increased solar activity the latitude contrasts of pressure in the earth's atmosphere are increased and atmospheric circulation speeded up. The pressure falls in the equatorial belt, rises in middle latitudes and falls in the polar regions (at latitudes above 70° N. in general, over the North Atlantic above 60° N.). A further confirmation may be found in a map showing the lines of equal correlation [*6*] between the average solar constant in January and February and the atmospheric pressure (1919–1937), from which for Greenland a correlation coefficient of —0.2 to —0.4 between latitudes 60° and 70° N. can be interpolated.

Finally, we applied the t test, in order to examine whether the difference between the frequencies of groups of years at various stages of the solar activity is statistically significant. The model for the applicability of this test to the investigation of solar influence on cyclonic frequencies may be found in a similar treatment of e. g. the effect of an electric current on the growth of seedlings or the effect of two different

drugs on patients. The difference between the elongation of the treated and untreated seedlings corresponds to that of the cyclonic frequencies at the maximum and minimum of the solar activity [7].

The ratio $t = d \sqrt{N}/s^2$, where d is the average difference between the ("treated" and "untreated") members of the pairs, N the size of the sample (number of pairs) and s^2 is the variance calculated from the sample by dividing the sum of the squares of deviations by the degrees of freedom, thus

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \Sigma (x - \bar{x})^2,$$

where

$$\bar{x} = (1/N) \Sigma x.$$

From R. A. FISHER's tables of t [8] we obtain P the probability by chance or the level of significance for the differences under investigation. It is conventional to regard a probability of < 0.05 as statistically significant.

At first, zones of 5 degrees latitude difference for the North Atlantic were considered. For each of the 14 zones between the equator and 70° N., and between the meridian of Greenwich and 90° W. of Greenwich the cyclonic frequencies of the two periods compared were added, and the t test applied to their differences. The results are given in Table 1.

Table 1.

Periods compared	Years *	P
1903–1905 versus 1909–1911	selected	0.20–0.10
1913–1915 versus 1920–1922	selected	0.10
1902–1904 versus 1910–1912	test	**0.01**
1914–1916 versus 1920–1922	test	$<$ **0.01**

Thus, the difference for the "selected years" is not significant, since the probability (P) is greater than 0.05, whereas the "test years" reveal a significant solar influence.

The differences, however, between the totals of the five-degree zone for three years around the maximum and the minimum solar activity indicate no significance, as can be seen from the figures in Table 2.

Table 2.

Periods compared	P
1905–1907 versus 1900–1902	0.30–0.20
1916–1918 versus 1911–1913	0.30–0.20
1927–1929 versus 1922–1924	0.20

* KULLMER has termed "selected years" the group of years which show better his results for the United States, and "test years" other groups which still show his findings but not so well.

We then considered the zones separately and applied the t test to the frequency differences in the squares of the particular zone and obtained the probabilities (P) given in Table 3.

Table 3. *Level of Significance (P) for solar influence on the frequency of centres of low pressure over the North Atlantic.*

Latitude N.	1902–1904 versus 1910–1912	1914–1916 versus 1920–1922	1903–1905 versus 1909–1911	1913–1915 versus 1920–1922
	test years		selected years	
70°–65°	**0.05**	> 0.90	0.20–0.10	0.60
65°–60°	0.60–0.50	0.90–0.80	0.20–0.10	0.90–0.80
60°–55°	0.10	0.20–0.10	**0.01**	0.50–0.40
55°–50°	0.20–0.10	0.10–**0.05**	0.80–0.70	**0.02**
50°–45°	0.20–0.10	< **0.01**	0.80–0.70	0.30–0.20
45°–40°	> 0.90	0.20–0.10	0.30–0.20	0.40–0.30
40°–35°	**0.05–0.02**	0.10	0.90–0.80	0.40–0.30
35°–30°	0.30–0.20	0.80	0.40	0.40–0.30
30°–25°	0.30–0.20	0.30–0.20	0.30–0.20	0.70

The probabilities in Table 3 seem to indicate a solar influence on the cyclonic frequencies over the North Atlantic in the latitudes 50° to 60° N., and from an extension of our computation down to the equator a second influenced belt between 10° and 25° N. might tentatively be claimed.

It was interesting to apply the t test to Kullmer's storm frequencies in the United States.

Again, we considered at first zones of 5 degree latitude difference and using Kullmer's figures we obtained the following probabilities P:

Table 4.

Periods compared	Years	P
1903–1905 versus 1909–1911 ..	selected	> 0.90
1913–1915 versus 1920–1922 ..	selected	0.60–0.50
1902–1904 versus 1910–1912 ..	test	0.70
1914–1916 versus 1920–1922 ..	test	**0.01**

In good agreement with our results for the North Atlantic, the difference for the "selected years" is not significant, whereas, at least in one period the "test years" indicate a significant solar influence.

Although we tested Kullmer's track frequency figures for zones of $2^1/_2$ degrees latitude difference, we have compiled in Table 5 only our results when grouping his values for squares of 5 degrees latitude difference.

Table 5. *Level of significance (P) for solar influence on the frequency of tracks of centres of barometric depressions over the United States.*

Latitude N.	1902–1904 versus 1910–1912	1914–1916 versus 1920–1922	1903–1905 versus 1909–1911	1913–1915 versus 1920–1922
	test years		selected years	
55°–50°	**< 0.01**	**0.10–0.05**	**0.01**	**0.05–0.02**
50°–45°	0.20–0.10	**0.05–0.02**	0.30–0.20	0.50–0.40
45°–40°	**0.02–0.01**	0.30–0.20	**< 0.01**	0.30–0.20
40°–35°	**0.02**	0.40–0.30	**0.01**	0.40–0.30
35°–30°	0.20–0.10	**< 0.01**	**0.01**	**< 0.01**
30°–25°	0.60–0.50	**0.05–0.02**	0.70–0.60	0.10–**0.05**

Table 5 confirms statistically the significance of KULLMER's claims for the United States which he derived in a purely graphical way, and it supports our results for the North Atlantic. The differences in the level of significance shown in Tables 3 and 5 might be attributed to the fact that KULLMER for his investigation used track frequencies, whereas we had to restrict our considerations to frequencies of centres of low pressure.

Following a suggestion made by Professor H. C. WILLETT to the senior author in a letter of April 1, 1949 the data used for this investigation has been published in such tabular form that they can be combined to show the change of storm frequency between any desired phase of the single or double sunspot cycle. This publication forms No. 3 of the Geophysical Bulletins of the School of Cosmic Physics in the Dublin Institute for Advanced Studies.

References.

1. KULLMER, C. J.: A remarkable reversal in the distribution of storm frequency in the United States in double HALE cycles, of interest in long-range forecasting. Smiths. Misc. Collections **103**, No. 10, Washington 1943.
2. CLAYTON, H. H.: Solar relations to weather and life. Clayton Weather Service, Canton, Mass., 1943.
3. WILLETT, H. C.: Long-period fluctuations of the general circulation of the atmosphere. J. Meteorol., Lancaster, Pa. **6**, 34 (1949).
4. Daily synoptic series, historical weather maps northern hemisphere, sea level. U. S. Weather Bureau.
5. CLAYTON, H. H.: The atmosphere and the sun. Smiths. Misc. Collections **82**, No. 7 (Figs. 2 and 4), Washington 1930.
6. BAUR, F.: Einführung in die Großwetterkunde. Wiesbaden 1948 (Fig. 38, S. 108).
7. TIPPETT, L. H. C.: The methods of statistics. London 1941 (pp. 112—114).
8. FISHER, R. A.: Statistical methods for research workers. London 1948.

551.513 : 551.588.1

(Wetterdienst Rheinland-Pfalz, Wetterwarte Mainz.)

Zur Frage des Einflusses der Land- und Meerverteilung auf die Lage der quasistationären Tröge in einer atmosphärischen Zonalzirkulation.

Von

F. Wippermann.

Mit 3 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Zur Erklärung der Lage der großen quasistationären Tröge wird einem Rechnungsgang von CHARNEY und ELIASSEN folgend, neben dem Einfluß der Erhebung der Erdoberfläche auch noch derjenige der Wärmeaufnahme und -abgabe herangezogen, der sich noch größer als der erstgenannte erweist. Erst nach seiner Berücksichtigung steht das Resultat in befriedigender Übereinstimmung mit den beobachteten Werten.

Summary. In order to explain the position of the great quasi-stationary troughs and ensuing a computation of CHARNEY and ELIASSEN, the author takes into consideration, apart from the influence of the upheavals of the earth's surface, also the supply and loss of heat. The latter influence proves to be more powerful than the first one, and taking it into consideration the result is in satisfactory agreement with the observed values.

Résumé. Afin d'expliquer la situation des grands creux quasistationnaires sont pris en considération, en suivant une méthode de CHARNEY et ELIASSEN à part l'influence des élévations de la surface terrestre, celle due à l'apport et la perte de chaleur, qui se révèle encore plus efficace que la première. Seulement en en tenant compte le résultat correspond d'une façon satisfaisante aux conditions observées.

Verwendete Symbole:

x, y	Ortskoordinaten	$f = 2\,\omega \sin\varphi$	Coriolisparameter
z	Höhe der 500-mb-Fläche	$\beta = \frac{2}{R}\,\omega \cos\varphi = \frac{\partial f}{\partial y}$	
h	Erhebung der Erdoberfläche	R	Erdradius
h^*	effektive Erhebung der Erdoberfläche	H	Höhe der homogenen Atmosphäre
U, v, w	Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}$	R^*	Gaskonstante

ndices:

g	geostrophisch
h	horizontal
0	Bodenwerte

$\mathfrak{F} = \text{rot } \mathfrak{v} + 2\,\mathfrak{U}$

$\zeta = \mathfrak{k} \cdot \text{rot } \mathfrak{v}$

T, Θ	Temperatur und potentielle Temperatur
$\Gamma = \frac{\partial \Theta}{\partial z}$	
ϱ	Dichte
D	meridionale Erstreckung der überlagerten Störungen

I.

Die Erweiterung des aerologischen Stationsnetzes in den Kriegs- und Nachkriegsjahren hat eine zuverlässige Darstellung der mittleren Strömungsverhältnisse im Niveau von 500 mb im Sommer und Winter über der Nordhemisphäre möglich gemacht. Derartige Mittelkarten lassen erkennen, daß der existierenden westöstlichen Zonalzirkulation meridionale Störungen — bedingt durch die ungleiche Verteilung von Land und Meer — überlagert sind. So beobachtet man drei große Tröge, die mit „*quasistationär*" bezeichnet werden sollen, da sie selbst in den Mittelkarten der Jahreszeiten Sommer und Winter noch deutlich zum Ausdruck kommen, für die die rein zeitlichen Änderungen als unerheblich angesehen werden können. Man findet je einen dieser Tröge an der amerikanischen und der asiatischen Ostküste, einen dritten, weniger gut ausgeprägten, über dem europäischen Rußland. Zwei entsprechende markante quasistationäre Hochdruckrücken treten vor der amerikanischen und der europäischen Westküste in Erscheinung (Abb. 3). Der jahreszeitliche Unterschied in der Lage aller dieser Abweichungen von der reinen Zonalzirkulation ist verhältnismäßig gering, ein Umstand, der die Diskussion der Ursache dieser Rücken und Tröge nicht unwesentlich beeinflußt.

Es unterliegt dabei keinem Zweifel, daß die Ursache dieser Druckverteilung in der Verteilung von Land und Meer zu suchen ist; unklar ist vielmehr nur, über welche Faktoren, und hierin, in welch anteiligem Ausmaß die Land- und Meerverteilung die beobachtete Anordnung in der Höhenlage der 500-mb-Fläche bewirkt. Hierbei scheint man in der letzten Zeit dem Einfluß der Unterschiede in der Höhe der Erhebungen der Erdoberfläche und dem der Reibung eine größere Wirkung zuzuschreiben (Charney und Eliassen [*1*], Bolin [*2*], Flohn [*3*]) als dem rein thermischen Effekt (Scherhag [*4*]), für den als ein Maß die Anzahl der im Strömungsfelde liegenden horizontalen P-T-Solenoide gelten kann. Zu dieser Auffassung mag wohl vor allem die recht gute Übereinstimmung des Rechenergebnisses von Charney und Eliassen mit den beobachteten Werten drängen, wenn man bedenkt, daß nur die Topographie der Erdoberfläche und die Reibung Berücksichtigung fanden. Insbesondere scheint aber gegen die Bedeutung eines rein thermischen Effektes die bereits erwähnte Beobachtungstatsache zu sprechen, wonach die Unterschiede in der Anordnung der 500-mb-Fläche zwischen Sommer und Winter unerheblich sind und keineswegs — wie doch eigentlich zu erwarten — ein inverses Bild bieten.

Im folgenden soll versucht werden, zu zeigen, daß jedoch auch dann, wenn man den thermischen Einfluß berücksichtigt — und zwar maßgeblich berücksichtigt —, eine brauchbare Übereinstimmung zwischen theoretischem Befund und Beobachtungsergebnis erzielt werden kann.

II.

Der Rechnungsgang von CHARNEY und ELIASSEN begnügt sich, die Höhe der 500-mb-Fläche bzw. des sog. äquivalent-barotropen Niveaus nur in *einer Dimension* zu erfassen und hat daher den Vorzug größtmöglicher Einfachheit. Dieser Arbeit folgend, kommt man von der Vorticity-Gleichung, die man durch Rotationsbildung der Eulerschen Bewegungsgleichung erhält, unter Vornahme der Integration über die vertikale Koordinate zu

$$\overline{\frac{d}{dt}(\zeta + f)} = -\frac{f}{H} w_0, \tag{1}$$

wobei der Querstrich die Verhältnisse in dem durch Mittelbildung gewonnenen äquivalent-barotropen Niveau andeutet. Ersetzt man hierin weiter ζ durch die Rotorkomponente des geostrophischen Windes, um mit CHARNEY [5] alle meteorologisch unwichtigen Änderungen auszuschalten,

$$\zeta = \zeta_g,$$

und verwendet die üblichen Linearisierungsbedingungen einer konstanten Zonalzirkulation, sowie

$$U = U_g = -\frac{g}{f}\frac{\partial z}{\partial y} = \text{const.}; \quad v = v_g = \frac{g}{f}\frac{\partial z}{\partial x}, \tag{2}$$

so folgt die Differentialgleichung:

$$U\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \beta\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f^2}{g\,H} w_0. \tag{3}$$

CHARNEY und ELIASSEN berücksichtigen hierin nunmehr über die Größe w_0 mittels des Ansatzes

$$w_0 = U_{g0}\frac{\partial h}{\partial x} + v_{g0}\frac{\partial h}{\partial y} \tag{4}$$

die in Richtung x verschieden großen Erhebungen der Erdoberfläche. Um nun zu einer Berücksichtigung des horizontalen Temperaturgefälles und damit des Einflusses der Wärme- und Kältequellen zu kommen, überlegen wir, daß eine Vertikalbewegung in irgendeiner Höhe im stationären Falle gegeben ist durch:

$$w = \frac{1}{\Gamma}\frac{d\Theta}{dt} - \frac{1}{\Gamma}(v_h \nabla)\,\Theta = \frac{1}{\Gamma}\frac{d\Theta}{dt} - \frac{R^*\,\Theta}{f\,p\,\Gamma} N_h\,(p, T), \tag{5}$$

wobei wiederum der horizontale Windvektor durch den geostrophischen ersetzt wurde und N_h die Anzahl der horizontalen Solenoide bedeutet. Letztere ist also in brauchbarer Näherung ein Maß für die Vertikalbewegungen, solange es sich um isentrope ($d\Theta/dt = 0$) Strömungsvor-

gänge handelt; sie muß anderseits aber auch ein Maß für die Größe der nichtadiabatischen Einflüsse sein, solange keine Vertikalbewegungen vorhanden sind. Dies ist aber im Niveau $z = 0$ infolge der festen Begrenzung durch den Erdboden durchaus der Fall, vorausgesetzt, daß die Erdoberfläche keine Neigung aufweist und hierdurch nicht eine erzwungene Vertikalbewegung im Sinne des Ansatzes (4) von CHARNEY und ELIASSEN vorhanden ist. Für die die Erdoberfläche überströmende Luftschicht ist also im stationären Falle das horizontale Solenoidfeld ein Maß für die Wärmeaufnahme und -abgabe; das gilt auch bei geneigter Erdoberfläche, solange das Solenoidfeld durch die Beobachtungen auf dieser geneigten Fläche erschlossen wird.

Es soll nunmehr der Einfluß dieser nichtadiabatischen Vorgänge derart berücksichtigt werden, daß für sie ein Äquivalent an Vertikalbewegungen bestimmt wird. Wenn diese auch infolge der festen Begrenzung durch den Erdboden nicht existieren, so müssen sich doch die vorgenannten Einflüsse durch ein Äquivalent an diesen darstellen lassen, wie Gl. (5) zeigt. Dieses darf daher auch so bestimmt werden, als ob es sich um einen isentropen Strömungsvorgang handele. Es wird also mit anderen Worten der durch die horizontalen PT-Solenoide zum Ausdruck kommende Einfluß des (nichtisentropen) Vorganges der Wärmeaufnahme und -abgabe in einer Strömung ohne Vertikalbewegungen dargestellt durch ein Äquivalent an Vertikalbewegungen, die unter der Voraussetzung isentroper Bewegungen aus dem Solenoidfeld resultieren. Mit diesem Äquivalent

$$w_0 = -\frac{1}{\Gamma_0}\left(U_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial x} + v_{g0} \frac{\partial \Theta_0}{\partial y}\right) \tag{6}$$

gehen wir in die von CHARNEY und ELIASSEN entwickelte Gl. (2) ein und berücksichtigen es noch neben den durch die Erhebungen der Erdoberfläche erzwungenen Vertikalbewegungen. Mit Hilfe von (2), (4) und (6) erhält (3) die Form

$$U \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial z}{\partial x}\left(\beta - \frac{f\,\varepsilon}{H\,\Gamma_0} \frac{\partial \Theta_0}{\partial y}\right) = -\frac{f^2}{g\,H}\, U_0 \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\Gamma_0} \frac{\partial \Theta_0}{\partial x}\right). \tag{7}$$

Verwendet man

$$\beta^* = \beta - \frac{\varepsilon f}{H \Gamma_0} \frac{\partial \Theta_0}{\partial y};\quad \varepsilon = \frac{v_{g0}}{v_g} \sim 0{,}5,$$

so folgt nach Division durch U und Integration über x

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + z \frac{\beta^*}{U} = -\mu \left\{h\,(x) - \frac{1}{\Gamma_0}\,\Theta_0\,(x)\right\} \tag{8}$$

mit der Bezeichnung

$$\mu = \frac{f^2}{g\,H} \frac{U_0}{U}.$$

Wiederum CHARNEY und ELIASSEN folgend, sei noch nach dem Vorgang von HAURWITZ [6] die meridionale Erstreckung der Störungen berücksichtigt, unter der Annahme, daß dieselben in der Nord- und Südrichtung

nach einer Cosinusfunktion abklingen. Wir ergänzen deshalb in (3) die bisher vernachlässigte horizontale Scherung des Grundstromes U

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} = -m^2 \frac{\partial z}{\partial x}, \tag{9}$$

wobei $m = \pi/D$ bedeutet.

Verwenden wir ferner einen von x unabhängigen vertikalen Gradienten der potentiellen Temperatur, so läßt sich $\Theta_0(x)/\Gamma$ leicht durch ein Erhebungsäquivalent der Erdoberfläche ausdrücken, welches vorhanden sein müßte, um die durch das Solenoidfeld hervorgerufenen (äquivalenten) Vertikalbewegungen gemäß dem Ansatz (4) zu erzeugen. Diese Vorstellung erscheint insofern günstig, als sie die Größe der beiden Einflüsse, nämlich der Topographie der Erdoberfläche einerseits und der Wärmeaufnahme und -abgabe am Erdboden anderseits gegeneinander abzuschätzen gestattet. Beide Höhen ergeben in ihrer Summenwirkung dann die effektive Höhe h^*

$$h(x) - h_\Theta(x) = h^*(x), \quad \text{wobei } h_\Theta(x) = \Theta_0(x)/\Gamma.$$

Setzt man ferner

$$\frac{\beta^*}{U} - m^2 = s^2, \tag{10}$$

so nimmt (8) die Form an

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + s^2 z = -\mu\, h^*(x), \tag{11}$$

wofür wir bei Charney und Eliassen auch die mittels eines Fourier-Ansatzes zu gewinnende Lösung finden:

$$z(x) = \mu \int_0^{2\pi} h^*(\alpha)\, \Phi_0(x - \alpha)\, d\alpha, \tag{12}$$

worin $\Phi_0(x)$ die Greensche Funktion

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n^2 - s^2} + \frac{1}{2\pi s^2} \tag{13}$$

bedeutet, die sich für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ und bei $\Phi_0(x) = \Phi_0(x + 2\pi)$ zu

$$\Phi_0(x) = -\frac{\cos(x - \pi)}{2s \sin s\pi} + \frac{1}{2\pi s^2} \tag{14}$$

summieren läßt.

Daß die nichtadiabatischen Einflüsse in einem Strömungsfeld wirklich zeitliche Änderungen hervorrufen bzw. im stationären Falle Richtung Krümmung usw. der Trajektorien beeinflussen, zeigt der von Ertel [7] für reibungslose Bewegungen abgeleitete hydrodynamische Wirbelsatz

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{\varrho} \mathfrak{W} \cdot \nabla \Theta = \frac{\mathfrak{W}}{\varrho} \nabla \frac{d\Theta}{dt}. \tag{15}$$

Dieser vermag jedoch in dem vorliegenden vereinfachten eindimensionalen Problem nicht verwendet zu werden. Daher beschränkt sich

die Berücksichtigung der nichtadiabatischen Einflüsse auch auf diejenigen der Bodenschicht, vornehmlich also auf Wärmeleitung und Austausch von der Unterlage her, sowie auf Strahlungseffekte. Nicht bzw. auch nur in den unteren Schichten werden die Kondensationsvorgänge berücksichtigt, die nach den bekannten Strahlungsbilanzen recht erhebliche Wärmequellen darstellen. Diese müssen als um so wirksamer angesehen werden, als sich diese Effekte noch auf bestimmte Areale beschränken, so wirksam schließlich, daß sie KLEINSCHMIDT [*8*] zur Erklärung der Genese von Frontalzyklonen verwenden konnte. Es läßt sich aber nur schwer überblicken, wie groß der Anteil der Kondensation an den nichtadiabatischen Effekten in bestimmten Höhen ist, und dies wieder im Mittel über einen Monat bzw. eine Jahreszeit, also im sog. „quasistationären" Falle. Statistische Ergebnisse von MÖLLER [*9*] über die Wärmezufuhr und -abgabe in der Luftschicht zwischen 0 und 3 km lassen in der räumlichen Verteilung diejenige von Land und Meer recht gut wiedererkennen, ein Resultat, das für den überwiegenden Einfluß der Erwärmung von der Unterlage her spricht.

Auf die Reibungseinflüsse wird an späterer Stelle einzugehen sein.

III.

Zur Berechnung der Höhenlage der 500-mb-Fläche wurden die geglätteten Höhenwerte der Erdoberfläche entlang des 55. nördlichen Breitenkreises bestimmt. Die Wahl fiel auf diesen, weil er in den von FLOHN [*10*] bearbeiteten Mittelkarten der absoluten Topographie der 500-mb-Fläche der südlichste, noch in allen Längen vom Kartenausschnitt erfaßte Breitenkreis ist. Diese Karten dürfen als die neueste Veröffentlichung dieser Art wohl den Anspruch erheben, die wirklichen Verhältnisse am zuverlässigsten wiederzugeben. Ferner sollte der oben gemachte Ansatz an anderen Bedingungen geprüft werden als diejenigen, die sich bei CHARNEY und ELIASSEN unter Verwendung des 45. Breitenkreises ergaben. Der hauptsächlichste Unterschied mag darin liegen, daß die hohen innerasiatischen Gebirge nicht mehr überströmt werden, sondern lediglich noch ihre nördlichen Ausläufer; ferner sind die Werte von f, β und U andere.

Zur Bestimmung des Erhebungsäquivalentes der Erdoberfläche für das horizontale Temperaturgefälle wurden aus den Januar- und Juliisothermenkarten im Lehrbuch von HANN-SÜRING [*11*, S. 175 und 176] die Werte auf 55° N für alle zehn Längengrade ermittelt und mit den vertikalen Gradienten der potentiellen Temperatur von 0,6°/100 m (0,4) im Winter (Sommer) in die entsprechenden Höhen umgerechnet. Die Bestimmung der — entlang des gesamten Breitenkreises als konstant angenommenen — Gradienten erfolgte unter Verwendung der von FLOHN [*12*] entworfenen Zonalschnitte, wobei diese allerdings für Verhältnisse gelten, die noch knapp 10° weiter nördlich angetroffen werden. Wegen der teilweise starken Inversionen, vornehmlich im Winter, mußte die Bestimmung dieser eigentlich in der Bodenschicht geltenden Gra-

dienten durch Mittelbildung zwischen 1 und 3 km über alle Längengrade vorgenommen werden, um der notwendigen Voraussetzung eines längs des Breitenkreises konstanten Gradienten einigermaßen gerecht zu werden. Aus ähnlichen Erwägungen mögen Bedenken gegen die Verwendung direkter Bodentemperaturen geltend gemacht werden, zumal diese die Verhältnisse (besonders im Winter) für die unterste Schicht zu kraß wiedergeben. Wenn auch hier eine Verwendung der relativen Topographie 700 über 1000 mb als angebrachter erscheint, so zeigen die einer derartigen Karte entnommenen Werte doch einen völlig gleichen Gang; der sich im Ergebnis lediglich in der Amplitude äußernde Fehler kann bei der Bestimmung des Reduktionsfaktors U_0/U berücksichtigt werden.

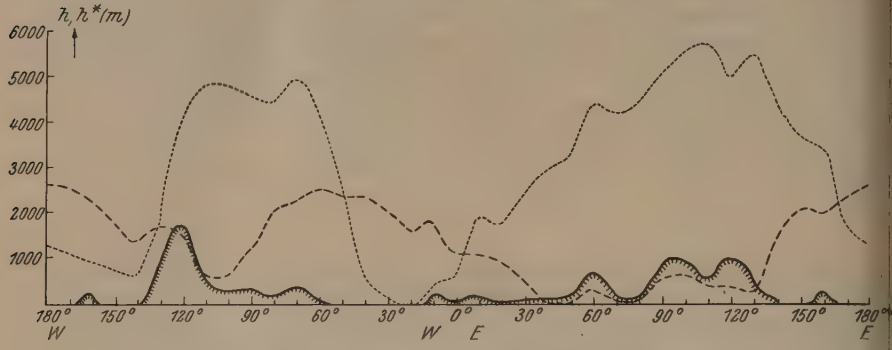


Abb. 1. Ausgeglichene wirkliche (mit schraffierter Begrenzung) und „effektive" Erhebungen der Erdoberfläche auf dem 55. nördlichen Breitenkreis für Sommer (gestrichelt) und Winter (punktiert).

An der Verwendung der mit solch markanten räumlichen Änderungen versehenen Bodentemperaturverteilung mag es auch liegen, daß sich effektive („wirksame") Erhebungen der Erdoberfläche ergeben (Abb. 1), die etwa das Dreifache der wirklichen ausmachen; jedoch auch die Verwendung ausgeglichenerer Verhältnisse zeigt, daß der thermische Einfluß in der Form des gewählten Ansatzes größer ist als derjenige der Erhebung der Erdoberfläche. Daß trotzdem und vor allem auch trotz der im Sommer und Winter inversen Verhältnisse Rechenergebnisse erzielt werden, die mit der Beobachtung in brauchbarer Übereinstimmung sind, zwingt zur Zurückhaltung gegenüber den Auffassungen, die dem thermischen Einfluß eine nur unbedeutende und lediglich etwas modifizierende Rolle zuschreiben wollen.

Aus den Mittelkarten von FLOHN [*10*] wurden die Werte für den Grundstrom U mit folgenden Zahlen bestimmt:

$$\text{Winter:}\quad U = 13{,}1\ \text{m/s} = 17{,}8\ \text{Längengrade/Tag},$$
$$\text{Sommer:}\quad U = 6{,}4\ \text{m/s} = 8{,}7\ \text{Längengrade/Tag}.$$

Zur Berechnung von β wird ferner der Wert für das ebenfalls entlang des Breitenkreises konstant angesetzte meridionale Temperaturgefälle am

Boden aus den Zonenmitteln im Lehrbuch von HANN-SÜRING [*11*, S. 180] bestimmt:

$$\text{Winter:}\quad \partial T/\partial y = -8°/1000\text{ km},$$
$$\text{Sommer:}\quad \partial T/\partial y = -3{,}5°/1000\text{ km}.$$

Die Größe s in Gl. (11) gibt die Zahl der stationären freien Wellen auf dem 55. Breitenkreis. Den Mittelkarten kann man für den Winter aus der Lage des westatlantischen Troges und desjenigen über dem europäischen Rußland (s. Abb. 3) eine Wellenlänge von 110 Längengraden entnehmen, entsprechend einem Wert von $s = 3{,}3$. Dieser würde unter Berücksichtigung der genannten Größe für das meridionale Temperaturgefälle eine Erstreckung der Störung in meridionaler Richtung von 54 Breitengraden verlangen, was mit den Beobachtungen zu vereinbaren ist.

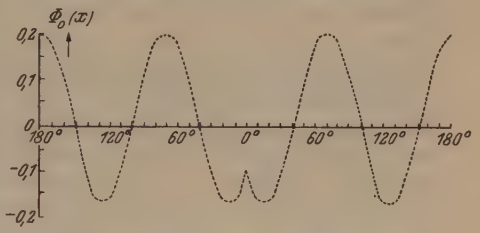


Abb. 2. Greensche Funktion für $s = 3{,}3$, die als stationäres Profil gedeutet werden kann, das unter dem Einfluß eines unendlich schmalen Gebirges im Punkte O entstanden ist.

Aus den Karten für den Sommer läßt sich die freie Wellenlänge wegen des Fehlens des osteuropäischen Troges nicht ermitteln. Setzt man in diesem Falle die Erstreckung der Störung in meridionaler Richtung mit 25 Breitengraden etwa halb so groß an wie im Winter, so ergibt sich mit dem entsprechenden Wert für das meridionale Temperaturgefälle und für den Grundstrom U für die Wellenzahl s wieder die Größe 3,3; dies wäre in Übereinstimmung mit den Beobachtungen, wenn man unter der Verflachung der Druckverteilung bei 50 bis 60° E im Sommer eine Andeutung des im Winter gut ausgebildeten Troges verstehen will. Sicherlich ist aber die Wellenlänge im Sommer nicht wesentlich kürzer als im Winter, was zur Verwendung des gleichen Wertes $s = 3{,}3$ auch in dieser Jahreszeit berechtigt.

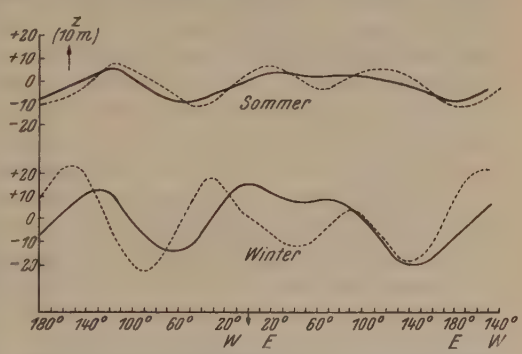


Abb. 3. Berechnete (punktierte Kurve) und beobachtete (ausgezogene Kurve) Höhenlage der 500-mb-Fläche auf dem 55. nördlichen Breitenkreis im Sommer und Winter.

Die Greensche Funktion für $s = 3{,}3$ ist in Abb. 2 wiedergegeben; die für die Höhe der 500-mb-Fläche ermittelten Ergebnisse für Sommer und Winter zeigt Abb. 3. Dabei ist die in dem Faktor

$$\mu = \frac{f^2}{gH}\,\frac{U_0}{U}$$

steckende Größe $\varkappa = U_0/U$ mit 0,15 angesetzt worden, ein Wert, der

dem Verhältnis von Bodenwind zu demjenigen im Niveau von 500 mb bestimmt nicht entspricht, dessen Berechtigung aber an späterer Stelle wegen der Nichtberücksichtigung der Reibung dargelegt werden soll.

IV.

Die Rechnung wurde zunächst nach dem Vorgang von CHARNEY und ELIASSEN nur unter Verwendung der wirklichen Höhe der Erdoberfläche durchgeführt, wobei letztere wie bei CHARNEY und ELIASSEN als ausgeglichene bestimmt wurde; das Ergebnis ist insofern unbefriedigend, als es überwiegend ein den Beobachtungstatsachen gerade entgegengesetztes Bild liefert. Selbst die Berücksichtigung der Reibung (nach dem Ansatz von CHARNEY und ELIASSEN) würde keine Phasenverschiebung der sich ergebenden Wellen um 180° bewirken.

Das Ergebnis bei Verwendung der effektiven Höhen ist im Winter nur im atlantischen Raum nicht ganz befriedigend, wo der errechnete Trog gegenüber dem beobachteten etwa 30 Längengrade zu weit westlich liegt. Ein Fehler von gleicher Größe zeigt sich aber auch — trotz Verwendung der Reibung — in dem Ergebnis von CHARNEY und ELIASSEN am ostasiatischen Trog. Im Sommer hingegen weist der westatlantische Trog eine um etwa 15 Längengrade nach Osten verschobene Lage auf. In dieser (errechneten) Bewegung in östlicher Richtung vom Winter zum Sommer um etwa 45 Längengrade spiegelt sich natürlich der thermische Einfluß wieder. Bei dem nicht ganz befriedigenden Vergleich mit den Mittelkarten sei jedoch daran erinnert, daß diese Jahreszeitenmittel sind, der thermische Effekt aber aus Mittelwerten der extremsten Monate erschlossen wurde. Diese Feststellung wird gestützt durch die neuen statistischen Untersuchungen von FLOHN [*13*], die für die einzelnen Monate tatsächlich eine zwischen 90° W und 55° W wechselnde Lage des Troges von Winter zu Sommer aufzeigen.

Die Lage des ostasiatischen Troges ist mit den Beobachtungen, denen auch eine Ostwärtsverlagerung um etwa 35 Längengrade zu entnehmen ist, in guter Übereinstimmung. Zu ausgeprägt ist in beiden Jahreszeiten der osteuropäische Trog, wobei aber das Ergebnis von CHARNEY und ELIASSEN vermuten läßt, daß eine Berücksichtigung der Reibung zu einer noch besseren Anpassung an die beobachtete Wirklichkeit führen würde. Da es im vorliegenden in erster Linie auf die Ermittlung der Lage von Trögen und Rücken ankam und hierin bereits eine befriedigende Übereinstimmung mit den Beobachtungsergebnissen gewonnen wurde, unterblieb eine Berücksichtigung der Reibung; diese muß in einem weniger stark vereinfachten, mehrdimensionalen Problem selbstverständlich in die Rechnung miteinbezogen werden. Die Nichtbeachtung der Reibung fand in dem obigen Rechnungsgang allerdings insofern eine Berücksichtigung, als der von CHARNEY und ELIASSEN mit 0,4 angesetzte Reduktionsfaktor U_0/U noch mit einem weiteren Faktor multipliziert wurde, der das Amplitudenverhältnis der Welle mit und ohne Reibung nach CHARNEY und ELIASSEN darstellt. Auf diese Weise ergab sich der

vorgenannte Wert von 0,15. Es soll damit in keiner Weise die volle Wirksamkeit der Reibung berücksichtigt sein, sondern lediglich die Amplitude eine wegen der Nichtberücksichtigung der Reibung erforderliche Anpassung an vernünftige Werte erhalten.

Literaturverzeichnis.

1. Charney, J. G. und A. Eliassen: Tellus **1**, no. 2, 38 (1949).
2. Bolin, B.: Tellus **2**, no. 3, 184 (1950).
3. Flohn, H.: Ber. Deutsch. Wetterd. US-Zone, Nr. 18 (1950).
4. Scherhag, R.: Neue Methoden der Wetteranalyse und Wetterprognose. Berlin 1948.
5. Charney, J. G.: J. Meteor. **4**, 135 (1947).
6. Haurwitz, B.: J. Marine Res. **3**, 35 (1940).
7. Ertel, H.: Meteorol. Z. **59**, 277 (1942).
8. Kleinschmidt, E.: Meteorol. Rdsch. **1**, 54 (1950).
9. Möller, F.: Experientia **6**, 361 (1950).
10. Flohn, H.: Deutsch. Wetterd. US-Zone, Großwetterlagen Mitteleuropas 1949, S. 63 u. 107.
11. Hann-Süring: Lehrbuch der Meteorologie, 5. Aufl.
12. Flohn, H.: Meteorol. Z. **60**, 325 (1943).
13. — Deutsch. Wetterd. US-Zone, Großwetterlagen Mitteleuropas 1950, S. 104.

551.509.317

(Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, Wien.)

Zur numerischen Methode der Vorhersage von Änderungen der 500 mb-Fläche nach Charney und Eliassen.

Von

H. Reuter.

Mit 4 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Eine Überprüfung der von Charney und Eliassen abgeleiteten Prognosenformel für Änderungen der 500 mb-Fläche entlang einer bestimmten geographischen Breite ergibt, daß in den untersuchten Fällen (Januar 1949) eine Verwendung im praktischen Wetterdienst noch fraglich ist. Nur bei verhältnismäßig einheitlicher zonaler Windkomponente und bei entsprechend kleinen Störungen scheint eine Vorausberechnung der Drucktendenz der „oberen" Druckwelle für einen bestimmten Ort mit Hilfe der Formel möglich zu sein.

Summary. A verification of the prognostic formula for predicting the height profile of the 500 mb pressure surface at a fixed latitude derived by Charney and Eliassen shows that a practical application is limited at least for the period under consideration (January 1949). Only in case of relatively small perturbations and rather uniform current along the latitude circle the formula seems to be successful in day-to-day forecast procedures.

Résumé. Une vérification portant sur le mois de janvier 1949 de la formule pronostique établie par Charney et Eliassen et applicable aux variations de la surface de 500 mb. le long d'un parallèle géographique déterminé montre que son emploi dans la pratique de la prévision du temps est encore douteux. Ce n'est que dans le cas d'une composante zonale du vent à peu près uniforme et lors de petites perturbations correspondantes qu'une prévision calculée de la tendance de pression de l'onde supérieure de pression en un lieu déterminé semble possible.

Einleitung.

Im Jahre 1949 erschien eine Arbeit von Charney und Eliassen [*1*] über die Möglichkeit einer Vorherberechnung der Änderungen der 500 mb-Topographie von einem Tag zum anderen. Es handelt sich dabei um

einen Versuch, für eine bestimmte geographische Breite die Integration der allgemeinen Wirbelgleichung *mit* Anfangsbedingungen durchzuführen. Da naturgemäß auch für die Verhältnisse in der freien Atmosphäre dabei gewisse Einschränkungen und Vereinfachungen notwendig sind, kann nicht erwartet werden, daß das Ergebnis den praktischen Anforderungen in allen Fällen gerecht wird. Die von den Verfassern am Schluß der Arbeit angegebenen praktischen Beispiele zeigen jedoch eine so gute Übereinstimmung zwischen vorherberechneten und tatsächlich eingetroffenen Änderungen der 500 mb-Topographie, daß der Methode unter Umständen auch im täglichen Prognosendienst bereits Bedeutung zukommt. Nach Rossby [2] kommt den „planetarischen Wellen der freien Atmosphäre" die Rolle der primären Druckstörungen in Fickers [3] Theorie der zusammengesetzten Depressionen zu. Wie der praktische Prognosendienst gezeigt hat, ist eine frühzeitige Erfassung der Änderungen in der primären „oberen" Druckwelle auch an einer Einzelstation von großer prognostischer Wichtigkeit.

Das wesentliche Ergebnis der Untersuchungen von Charney und Eliassen ist, daß die Änderung in der Höhe der Isopotentialen für eine bestimmte geographische Breite aus dem Ausgangszustand der Topographie innerhalb einer gewissen Region (im allgemeinen 50° Länge vor bzw. hinter dem betreffenden Punkt) berechnet werden kann. Bedeutet U die zonale Komponente der Windgeschwindigkeit entlang der betreffenden geographischen Breite und $z\,(x, t)$ die Höhe der Isopotentialen der 500 mb-Fläche an der Stelle x Grad Länge und zur Zeit t, so kann die Prognosenformel in folgender Form geschrieben werden:

$$z\,(x + U\,t, t) = z\,(x, 0) + \int_{x - x_1}^{x + x_2} z\,(\alpha, 0)\, I_{a\,2}\,(x - \alpha, t)\, d\alpha. \qquad (1)$$

Dabei bedeutet I_{a2} eine sehr komplizierte Funktion, die von den Autoren die „influence function" genannt wird. Sie hängt von einem Parameter a^2 ab, welcher in gewisser Hinsicht den Einfluß einer Störung der zonalen Strömung in der Nord-Süd-Richtung beinhaltet und zwischen Werten von 10 bis 18 schwankt. Zur praktischen Verwendung von (1) wird die Einflußfunktion durch eine Reihenentwicklung angenähert. Dies gelingt, wenn für die zonale Windgeschwindigkeit ein bestimmter konstanter Wert eingeführt wird. Die Autoren nahmen für U einen Betrag von 20° Länge pro Tag an und erhielten dann an Stelle von (1)

$$z\,(x + 20°, 1) = z\,(x, 0) + \sum_{N=-3}^{+7} A_N\, z\,(x + N \cdot 10°, 0). \qquad (2)$$

Die Zeit t ist hier in Tagen zu verstehen, so daß $t = 0$ den Ausgangszustand, $t = 1$ die Situation um 24 Stunden später bedeutet. Die Koeffizienten A_N sind in der erwähnten Arbeit für verschiedene Werte des Parameters a^2 tabuliert. Für mittlere Verhältnisse ergeben sich folgende Werte:

Tabelle 1.

N	-3	-2	-1	0	1	2
A_N	$-0{,}051$	$-0{,}080$	$-0{,}433$	$-0{,}182$	$+0{,}314$	$+0{,}112$
N	3	4	5	6	7	
A_N	$+0{,}149$	$+0{,}051$	$+0{,}065$	$+0{,}022$	$+0{,}030$	

Bei einer Überprüfung der Formel (2) in einem konkreten Fall erweist sich die Voraussetzung einer konstanten zonalen Komponente der Strömung von gerade 20° pro Tag als sehr einschränkend. Man kann jedoch leicht aus der Gestalt der (nicht angenäherten) Einflußfunktion I_{a2}, wie sie in Formel (1) aufscheint, erkennen, daß eine Änderung der zonalen Windgeschwindigkeit nur eine Änderung des Prognosenzeitraumes verursacht. Wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, läßt sich zeigen, daß Schwankungen in der zonalen Komponente der Windströmung zwischen 5 und 30° pro Tag nur eine Änderung des Prognosenzeitraumes von einem Tag um $\pm$ 2 Stunden zur Folge hätte, was also keine praktisch ins Gewicht fallende Einschränkung bedeutet. Eine zweite Frage ist natürlich diejenige, inwieweit überhaupt die Annahme einer konstanten zonalen Komponente der Windströmung bei der Ausgangslage den tatsächlichen Verhältnissen gerecht wird. Charney und Eliassen bemerken selbst, daß die richtige Anwendung ihrer Prognosenformel wesentlich auf der Wahl von U beruht und hier die Möglichkeit von Fehlerquellen vorhanden ist. Die Wahl der zonalen Komponente der Windgeschwindigkeit ist also eine mehr oder weniger empirische Angelegenheit. Die Summe der Koeffizienten A_N in Tabelle 1 ergibt Null, was besagt, daß eine streng zonale Strömung als Ausgangssituation überhaupt keine Änderung ergeben würde, was unmittelbar verständlich ist. Erst die Störung der Strömung führt zu Veränderungen, die sich gemäß der allgemeinen Wirbelgleichung fortpflanzen. Um die Formel (2) noch besser verstehen zu können, ist es zweckmäßig, sich klar zu machen, wie die vorausberechnete Höhe der Isopotentialen der 500 mb-Fläche an einer bestimmten Stelle zustande kommt. Nehmen wir nur die wichtigsten Werte von A_N, so kann Formel (2) auch so gedeutet werden, daß man sich die vorausberechnete Höhe der 500 mb-Fläche an einer bestimmten Stelle folgendermaßen zusammengesetzt denkt ($U = 20°$/Tag):

$+ 82\,\%$ der Höhe des Punktes, der einen Tag früher um den Betrag 20° zurücklag.
$- 43\,\%$ der Höhe des Punktes, der einen Tag früher um den Betrag 30° zurücklag.
$+ 31\,\%$ der Höhe des Punktes, der einen Tag früher um den Betrag 10° zurücklag.
$+ 15\,\%$ der Höhe des Punktes, der einen Tag früher um den Betrag 10° vorauslag.

Die Änderung der Höhe der Isopotentialen an einer bestimmten Stelle ist also nur eine Funktion der vor und hinter dieser Stelle liegenden Punkte, wobei aber die verschiedenen Höhen verschieden

stark ins Gewicht fallen. Aus der obigen Zusammenstellung ergeben sich gewisse Folgerungen für solche Punkte, die in der Entfernung U-Grade von Trog- bzw. Keillinien liegen.

Überprüfung der Prognosenformel in einzelnen Fällen.

Eine Überprüfung der Formel (2) in einem konkreten Fall ist sehr einfach, wenn es gelingt, die Größe U richtig abzuschätzen. Es wurde eine Reihe von Fällen aus dem Januar 1949 untersucht. Dabei fanden die vom Meteorological Office des Air Ministry London veröffentlichten täglichen Höhenwetterkarten im 500 mb-Niveau Verwendung. In allen Fällen standen hinreichend genaue Daten der Isopotentialen auf 45° Breite im Bereich 120° westlicher bis 50° östlicher Länge zur Verfügung. Hier seien nur vier ausgesuchte Fälle mitgeteilt, die über die praktische Verwendbarkeit der Formel Aufschluß geben bzw. die Grenzen der Verwendbarkeit aufzeigen.

Die Abb. 1 bis 4 zeigen das Ergebnis der Berechnungen. Es sind daraus der Anfangszustand, die tatsächlich eingetretenen und die vorherberechneten Änderungen zu entnehmen. Überdies ist noch bei jeder Abbildung die zonale Komponente der Windströmung in Grad Länge pro Tag angegeben[1]. Wie man sieht, ist die Übereinstimmung in Abb. 1 außerordentlich gut, in Abb. 2 und 4 herrscht im westlichen Teil Übereinstimmung, im östlichen keine, während von einer Übereinstimmung im Falle der Abb. 3 überhaupt nicht die Rede sein kann. Es ist in diesem Zusammenhang auch wichtig, zu bemerken, daß die Fälle der Abb. 2, 3 und 4 aufeinanderfolgende Tage darstellen. Was die allgemeine Beschaffenheit der 500 mb-Fläche in dem betrachteten Zeitraum anlangt, so ist zu erkennen, daß die Änderungen im Bereich 20° West bis 0° sehr gering sind, was mit einem quasistationären Hoch über den Azoren zusammenhängt. Man sieht auch, daß in allen Fällen in diesem Bereich die zonale Komponente der Windströmung sehr klein war. Da die Einflußfunktion mindestens 50° Länge nach beiden Seiten wirksam ist, darf eine mangelhafte Übereinstimmung in den Randgebieten nicht auffallen. Vergleicht man die Verhältnisse der Abb. 1 mit den anderen Fällen, so zeigt sich zunächst, daß im ersten Fall die tatsächlichen Änderungen innerhalb mäßiger Grenzen (plus oder minus 10 geodynamische Dekameter) bleiben, während in den anderen Fällen die doppelten oder dreifachen Beträge auftreten. Bezüglich der zonalen Windströmung besteht zwischen dem Fall 1 und den übrigen der Unterschied, daß bei diesem auch in Gebieten östlicher Länge eine westliche Windströmung vorhanden ist, während sonst keine oder eine schwach östliche Luftbewegung entlang des 45. Breitengrades festgestellt wurde. Aus jeder Abbildung ist auch zu entnehmen, mit welcher mittleren zonalen Komponente der Windströmung die Rechnung durchgeführt wurde. Eine Änderung dieser Größe bei den Berechnungen führt im Endergebnis nur zu einer Ver-

[1] Dabei entsprechen die positiven Werte einer West-, die negativen einer Ostströmung.

schiebung der Kurven entlang der Abszisse, jedoch nicht zu einer Verringerung oder Vergrößerung der Amplituden, die in Formel (2) von den Koeffizienten A_N abhängen, die durch eine Änderung der Translationsgeschwindigkeit nicht beeinflußt werden. Dies gilt insoweit, als wir die früher erwähnte Verschiebung des Prognosenzeitraumes um $\pm$ 2 Stunden pro Tag vernachlässigen. Eine schlechte Übereinstimmung zwischen

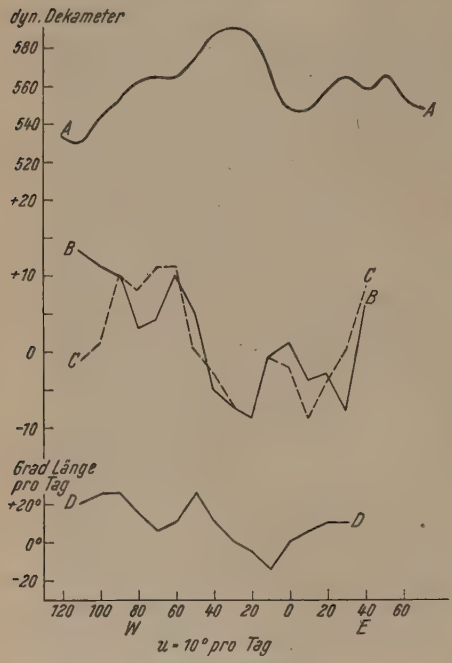


Abb. 1. 9. Januar 1949.

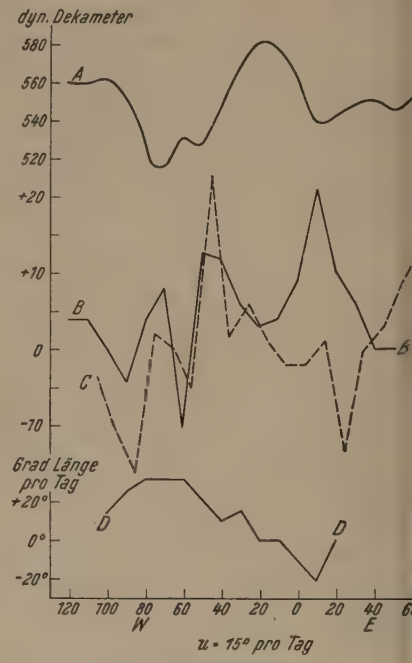


Abb. 2. 13. Januar 1941.

Abb. 1—4. AA = Höhe der 500 mb-Fläche in geodynamischen Metern entlang der geographischen Breite 45° N, BB = eingetretene Änderung der Höhe der 500 mb-Fläche in den darauffolgenden 24 Stunden, CC = nach Formel (2) berechnete Änderung derselben (strichliert) in den darauffolgenden 24 Stunden, DD = zonale Windkomponente in Grad Länge pro Tag.

vorherberechneten und eingetroffenen Änderungen der 500 mb-Fläche kann also nicht allein in einer unrichtigen Wahl der zonalen Windkomponente zu suchen sein. Dies gilt um so mehr, wenn die Abweichungen so groß sind, wie in Abb. 3. In diesem Fall, wo die Rechnung unrichtige Resultate liefert, müssen also andere Ursachen für die mangelhafte Übereinstimmung vorhanden sein. Dieser Fall zeigt allerdings im Randgebiet bei 110° West eine sehr starke Änderung, die möglicherweise die weitere Umgebung stärker beeinflußt.

Wie aus dem untersuchten Material und insbesondere aus den hier mitgeteilten vier Fällen zu erkennen ist, scheint die Brauchbarkeit der Prognosenformel für praktische Zwecke derzeit noch fraglich zu sein. Handelt es sich um eine verhältnismäßig einheitliche Westströmung

entlang der bestimmten geographischen Breite und sind dementsprechend die Störungen von geringer Amplitude, so dürfte die Formel eine recht gute Möglichkeit bieten, die Drucktendenz der „oberen" Druckwelle für einen bestimmten Ort vorauszuberechnen. In den meisten Fällen kann jedoch das Ergebnis zumindestens für die hier untersuchten Beispiele nicht befriedigen.

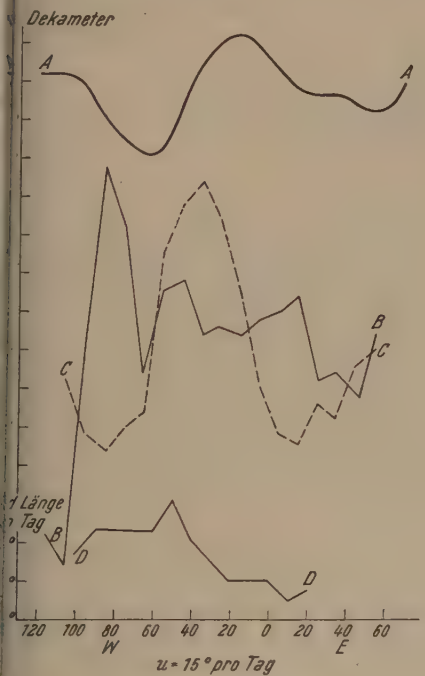


Abb. 3. 14. Januar 1949.

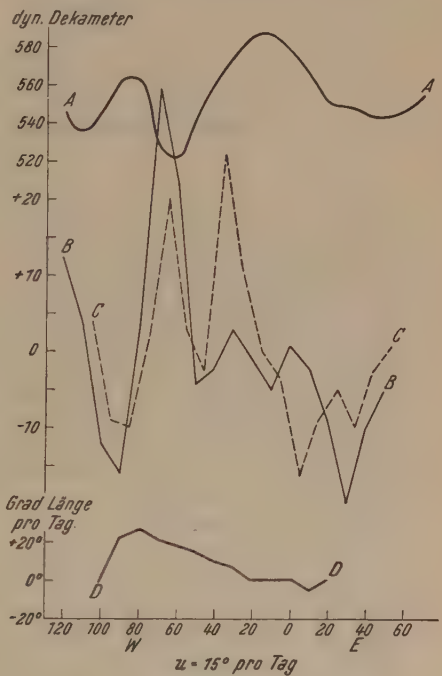


Abb. 4. 15. Januar 1949.

Literaturverzeichnis.

1. Charney, J. G. and A. Eliassen: A numerical method for predicting the perturbations of the middle latitude westerlies. Tellus **1**, no. 2, 38 (1949)
2. Rossby C. G.: On the dispersion of planetary waves in a barotropic atmosphere. Tellus **1**, no. 1, 54 (1949).
3. Ficker, H.: Beziehungen zwischen Änderungen des Luftdruckes und der Temperatur in den unteren Schichten der Troposphäre (Zusammensetzung der Depressionen). S.-B. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa **129**, 763—810 (1920).

551.511

(Det Norske Meteorologiske Institutt, Oslo.)

Mean Transport in the Atmosphere.

By

Th. Hesselberg.

Summary. The hourly values of the meteorological elements at the Observatory of Aas (Norway) in January and October 1929 are used for computation of the transport of various meteorological quantities. The transports with the mean monthly wind and those caused by the irregularities of the movements are computed separately. The transports with these eddy movements are in some cases (mass, heat) very small compared with the transports with the mean wind; in other cases (kinetic energy, water vapour) these two components of the transports are of the same order of magnitude, or even greater (specific momentum). An explanation of these facts is given. Applications on problems of the general circulation and the turbulence are suggested.

Zusammenfassung. Die stündlichen Werte der meteorologischen Elemente am Meteorologischen Observatorium in Aas (Norwegen) im Januar und Oktober 1929 wurden für die Berechnung des Transports verschiedener meteorologischer Größen benutzt. Die Transporte, die einerseits vom mittleren monatlichen Wind und anderseits von den Unregelmäßigkeiten der Luftbewegung herrühren, wurden getrennt berechnet. Diese Transporte, die von der Veränderlichkeit des Windes verursacht werden, sind in einigen Fällen (Masse, Wärme) sehr klein im Vergleich zu denjenigen durch den mittleren Wind; in anderen Fällen (kinetische Energie, Wasserdampf) sind sie von derselben Größenordnung oder sogar größer (spezifische Bewegungsgröße). Es wird eine Erklärung dieser Tatsachen gegeben und Anwendungen auf Probleme der allgemeinen Zirkulation und der Turbulenz werden erwähnt.

Résumé. Les valeurs horaires des éléments météorologiques à l'Observatoire de Aas (Norvège) en janvier et en octobre 1929 ont été utilisées pour calculer le transport de différentes quantités météorologiques. Les transports par le vent moyen mensuel et ceux produits par les irrégularités du vent ont été calculés séparément. Ces derniers sont dans certains cas (masse, chaleur) très petits comparés aux transports par les vents moyens; dans d'autres cas (énergie cinétique, vapeur d'eau) les transports dûs aux irrégularités du vent sont du même ordre de grandeur que les transports par les vents moyens ou même plus grands (quantité de mouvement spécifique). Une explication de ces faits est donnée et on suggère des applications aux problèmes de la circulation générale et de la turbulence.

Some of the most important transports will be computed. Those caused by the mean air currents and those due to the eddy movements shall be calculated separately.

1. The observation material and the calculations.

The chief observation material used is represented by the hourly values of:

p = air pressure,
T = air temperature,
U = relative humidity,
d = wind direction,
v = wind velocity

in January and October 1929 at the Meteorological Observatory of Aas ($\varphi = 59° 40'$, $\lambda = 10° 46'$ E).

From this observation material the hourly values of:

ϱ = density,
K = kinetic energy,
H = amount of heat,
W = amount of water vapour

were calculated by means of the equations:

$$\varrho = \frac{p}{R\,\vartheta}, \tag{1}$$

$$K = \frac{1}{2}\,\varrho\,v^2, \tag{2}$$

$$H = c_p\,\varrho\,\vartheta, \tag{3}$$

$$W = e\,(U, T)\,F\,(T), \tag{4}$$

where p is the air pressure in cbars, ϑ the absolute temperature, $e\,(U, T)$ is the pressure of the water vapour found from the psycrometric tables of the Prussian Meteorological Institute [*1*] and the values of $F\,(T)$ were taken from the psycrometric tables of JELINEK [*2*].

Further the hourly values of the following transports were calculated:

$\boldsymbol{F_V}$ = flux of volume,
$\boldsymbol{F_M}$ = flux of mass,
$\boldsymbol{F_S}$ = flux of specific momentum,
$\boldsymbol{F_K}$ = flux of kinetic energy,
$\boldsymbol{F_H}$ = flux of heat,
$\boldsymbol{F_W}$ = flux of water vapour.

For these computations a coordinate system with the positive X-axis towards east and the positive Y-axis towards north was used. The following equations were utilized:

$$\left.\begin{aligned} F_{V.x} &= v_x = v \cos \alpha, \\ F_{V.y} &= v_y = v \sin \alpha, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

where α is the angle between the wind and the positive X-axis.

$$\left.\begin{aligned} F_{M.x} &= \varrho\, v_x, \\ F_{M.y} &= \varrho\, v_y. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} F_{S.x.x} &= \varrho\, v_x v_x, \\ F_{S.x.y} &= \varrho\, v_x v_y, \\ F_{S.y.x} &= \varrho\, v_y v_x, \\ F_{S.yy.} &= \varrho\, v_y v_y. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} F_{K.x} &= \frac{1}{2} \varrho\, v^2 v_x, \\ F_{K.y} &= \frac{1}{2} \varrho\, v^2 v_y. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} F_{H.x} &= c_p \varrho\, \vartheta\, v_x, \\ F_{H.y} &= c_p \varrho\, \vartheta\, v_y. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} F_{W.x} &= W v_x, \\ F_{W.y} &= W v_y. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

All quantities defined by the equations (1)—(10) were computed for every hour from the observations in Aas in January and October 1929.

2. The mean values of the different elements and of transports.

The climatological means are as a rule simple time means, so that the mean value $\overline{Q}$ of a quantity Q is given by the equation:

$$\overline{Q} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} Q\, dt,$$

where t is the time. When hourly values of the element Q are available, the mean can be computed by means of the formula:

$$\overline{Q} = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} Q. \tag{11}$$

For each of the two selected months the means were computed from $24 \times 31 = 744$ hourly values.

The mean values were computed for p, ϑ, U, and all quantities defined by the equations (1)—(4). The units of the MTS-system have been used. The results are given in Table 1.

Table 1. *The mean values of the chief meteorological elements at Aas in January and October 1929.*

	January 1929	October 1929
$\overline{p}$	101.551	99.148
$\overline{\vartheta}$	265.91	279.07
$\overline{U}$	85.81	85.42
$\overline{\varrho}$	$1.3306\ 10^{-3}$	$1.2379\ 10^{-3}$
$\overline{K}$	$4.71\ 10^{-3}$	$10.49\ 10^{-3}$
$\overline{H}$	$8.49\ 10^{-2}$	$8.30\ 10^{-2}$
$\overline{W}$	$2.65\ 10^{-6}$	$6.19\ 10^{-6}$

Table 2. *The mean values of the various forms of energy at Aas in January and October 1929 (in toncalories per m³).*

	January 1929	October 1929
$\overline{P}$	$3.19\ 10^{-7}\ g\ z$	$2.97\ 10^{-7}\ g\ z$
$\overline{K}$	$11.30\ 10^{-7}$	$25.18\ 10^{-7}$
$\overline{H}$	$8.49\ 10^{-2}$	$8.29\ 10^{-2}$
$\overline{C}$	$1.59\ 10^{-3}$	$3.71\ 10^{-3}$
$\overline{F}$	$0.21\ 10^{-3}$	$0.50\ 10^{-3}$

Using these mean values we can easily find the mean amounts per m³ of the various forms of energy of the air, viz:

P = amount of potential energy of the air,
K = amount of kinetic energy of the air,
H = amount of heat of the air,
C = amount of condensation energy of the water vapour,
F = amount of freezing energy of the water vapour.

In calories we have approximately:

$$\left.\begin{aligned} \overline{P} &= 2{,}4\ 10^{-4}\,\overline{\varrho}\ g\ z, \\ \overline{K} &= 2{,}4\ 10^{-4}\,\overline{\tfrac{1}{2}\,\varrho\ v^2}, \\ \overline{H} &= c_p\,\overline{\varrho\ \vartheta} = \frac{c_p}{R}\,\overline{p}, \\ \overline{C} &= 600\ \overline{W}, \\ \overline{F} &= 80\ \overline{W}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

The values calculated by means of these equations are given in Table 2.

3. The transports with the mean wind and with the eddy movements.

The amount of an element per unit volume be A. The transport F of the element is then:

$$F_x = A\ v_x,$$
$$F_y = A\ v_y.$$

When we here put:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= v_x - \overline{v}_x, \\ u_y &= v_y - \overline{v}_y, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

where u is the difference between the actual wind $\boldsymbol{v}$ and the mean wind $\bar{\boldsymbol{v}}$, we find:

$$F_x = A\,\bar{v}_x + A\,u_x,$$
$$F_y = A\,\bar{v}_y + A\,u_y.$$

When the n transports are summed, we find for the mean transport:

$$\bar{F}_x = \bar{A}\,\bar{v}_x + \frac{1}{n}\sum_1^n A\,u_x,$$

$$F_y = \bar{A}\,\bar{v}_y + \frac{1}{n}\sum_1^n A\,u_y,$$

where the mean transport $\bar{\boldsymbol{F}}$ is given as the sum of the flux with the mean wind and the flux with the eddy movements.

If the first one is designated by the letter $\boldsymbol{T}$ and the second by $\boldsymbol{E}$, we have:

$$\bar{\boldsymbol{F}} = \bar{\boldsymbol{T}} + \bar{\boldsymbol{E}}, \tag{14}$$

where

$$\left.\begin{aligned} \bar{T}_x &= A\,\bar{v}_x, \\ \bar{T}_y &= \bar{A}\,\bar{v}_y, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

and:

$$\left.\begin{aligned} \bar{E}_x &= \frac{1}{n}\sum_1^n A\,u_x, \\ \bar{E}_y &= \frac{1}{n}\sum_1^n A\,u_y. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

In order to find the mean fluxes $\bar{\boldsymbol{F}}$ we first calculated the hourly values by means of the equations (5)—(10) and then the mean values given in Table 3 are easily found by means of equation (11).

The components of the transports with the mean wind, given in Table 3, were determined by using the equations (15), and finally the transport $\bar{\boldsymbol{E}}$ due to the eddy movements were calculated from equation (14):

$$\bar{\boldsymbol{E}} = \bar{\boldsymbol{F}} - \bar{\boldsymbol{T}}.$$

From Table 3 we see that the mean transports $\bar{\boldsymbol{E}}$ with the eddy movements in some cases (mass, heat) are so small compared with the transports $\bar{\boldsymbol{T}}$ with the mean wind, that they can be neglected, in other cases (kinetic energy, water vapour) the transport $\boldsymbol{E}$ is of the same order of magnitude as $\boldsymbol{T}$, or even greater (specific momentum).

Table 3. *The mean transport* $\boldsymbol{F}$ *and its components* $\boldsymbol{T}$ *and* $\boldsymbol{E}$ *at Aas in January and October 1929.*

	Mean total transport		Transport with the mean wind		Mean transport with the eddy movements	
	$\overline{F_x}$	$\overline{F_y}$	$\overline{T_x}$	$\overline{T_y}$	$\overline{E_x}$	$\overline{E_y}$
January 1929						
Transport of:						
volume	—0.124	—0.651	—0.124	—0.651	0	0
mass	—0.163 10^{-3}	—0.874 10^{-3}	—0.165 10^{-3}	—0.866 10^{-3}	0.002 10^{-3}	—0.008 10^{-3}
$\varrho\, v_x$	2.16 10^{-3}	—1.66 10^{-3}	0.02 10^{-3}	0.11 10^{-3}	2.14 10^{-3}	—1.77 10^{-3}
$\varrho\, v_y$	—1.66 10^{-3}	7.26 10^{-3}	0.11 10^{-3}	0.57 10^{-3}	—1.77 10^{-3}	6.69 10^{-3}
kinetic energy	—3.54 10^{-3}	—4.38 10^{-3}	—0.58 10^{-3}	—3.07 10^{-3}	—2.96 10^{-3}	—1.31 10^{-3}
heat	—1.066 10^{-2}	—5.513 10^{-2}	—1.053 10^{-2}	—5.532 10^{-2}	—0.013 10^{-2}	0.019 10^{-2}
water vapour	—0.80 10^{-6}	—0.43 10^{-6}	—0.33 10^{-6}	—1.72 10^{-6}	—0.47 10^{-6}	1.29 10^{-6}
October 1929						
Transport of:						
volume	0.006	1.238	0.006	1.238	0	0
mass	0.005 10^{-3}	1.493 10^{-3}	0.007 10^{-3}	1.533 10^{-3}	—0.002 10^{-3}	—0.040 10^{-3}
$\varrho\, v_x$	3.51 10^{-3}	—1.46 10^{-3}	0.00 10^{-3}	0.01 10^{-3}	3.51 10^{-3}	—1.47 10^{-3}
$\varrho\, v_y$	—1.46 10^{-3}	17.48 10^{-3}	0.01 10^{-3}	1.85 10^{-3}	—1.47 10^{-3}	15.63 10^{-3}
kinetic energy	—8.28 10^{-3}	70.53 10^{-3}	1.30 10^{-3}	12.99 10^{-3}	—9.58 10^{-3}	57.54 10^{-3}
heat	0.027 10^{-2}	10.155 10^{-2}	0.049 10^{-2}	10.275 10^{-2}	—0.022 10^{-2}	—0.120 10^{-2}
water vapour	—0.66 10^{-6}	11.19 10^{-6}	0.04 10^{-6}	7.66 10^{-6}	—0.70 10^{-6}	3.53 10^{-6}

This is clearly seen from Table 4, where the ratio between $|\overline{E}|$ and $|\overline{T}|$ is tabulated.

Table 4. *The ratio between the mean transport with the eddy movements and with the mean wind, at Aas in January and October 1929.*

	The ratio $\frac{\lvert\overline{E}\rvert}{\lvert\overline{T}\rvert}$	
	January 1929	October 1929
Transport of:		
volume	0	0
mass	0.01	0.02
ϱv_x	28	$\frac{0}{0}$
ϱv_y	12	12
kinetic energy .	0.95	0.22
heat	0.00	0.01
water vapour .	0.47	0.47

Table 5. *The mean eddy movements and the mean wind at Aas in January and October 1929.*

	January 1929	October 1929
$u_{x\,m}$	0.87	1.13
$u_{y\,m}$	1.55	2.77
$\overline{v}_x$	—0.12	0.01
$\overline{v}_y$	—0.65	1.24
u_m	1.78	2.99
$\lvert\overline{v}\rvert$	0.66	1.24
$\frac{u_m}{\lvert\overline{v}\rvert}$	2.7	2.4

In order to find an explanation of these facts we will mention some qualities of the eddy movements.

4. Remarks on the eddy movements.

In a previous paper [3]. I have published the results of a study of the eddy movements, where the same observation material was used as in the present paper.

From the hourly values of the wind direction and velocity at Aas in January and October 1929 the components u_x and u_y of the eddy movement were calculated from the equations (13):

$$u_x = v_x - \overline{v}_x,$$

$$u_y = v_y - \overline{v}_y.$$

The mean numerical values of these deviations were then computed:

$$u_{x\,.\,m} = \frac{1}{n}\sum_1^n |u_x|,$$

$$u_{y\,.\,m} = \frac{1}{n}\sum_1^n |u_y|.$$

The result of these calculations (given in Table 5) shows that the mean components $u_{x\,.\,m}$ and $u_{y\,.\,m}$ of the eddy movements are greater than the components of the mean wind, what is characteristic for regions with rapidly changing winds.

The values $u_{x.m}$ and $u_{y.m}$ are as a rule different. The mean magnitude of the eddy movements through a vertical plane σ_α perpendicular to the direction α thus varies with the direction of the axis α. In the paper mentioned above is further shown that with great accuracy:

$$u_{x.m}^2 + u_{y.m}^2 = \text{const.}, \tag{17}$$

so that $u_{\alpha.m}$ varies from a maximum value in a direction α_0 to a minimum value in the direction $\alpha_0 + 90°$. Through this plane that is orientated vertically we have $u_z = 0$, and consequently $u_{z.m}^2 = 0$.

In three dimensions we have:

$$u_{x.m}^2 + u_{y.m}^2 + u_{z.m}^2 = \text{const.}, \tag{18}$$

independent of the orientation of the co-ordinate system.

5. The ratio between the transports with the eddy movements and with the mean wind.

Through the vertical plane σ_α because of the eddy movements a volume:

$$\frac{1}{2} u_{\alpha.m}$$

passes per unit of area and time in the direction α and the same volume passes per unit of area and time in the opposite direction $\alpha + 180°$.

The air passing through σ_α in the direction α because of the eddy movements will as a rule have other qualities than the air passing in the opposite direction. The eddy movements therefore regularly cause a transport of qualities through the plan σ_α.

If the air passing in the direction α has an amount $\overline{A}_1$ of a quality and the air passing in the opposite has the amount $\overline{A}_2$, both reckoned per unit volume, the algebraic amount $\overline{E}_\alpha$ transported through σ_α by the eddy movements per unit of area and time in the direction α is:

$$\overline{E}_\alpha = \frac{1}{2} (\overline{A}_1 - \overline{A}_2) u_{\alpha.m}. \tag{19}$$

At the same time we have a flux $\overline{T}_\alpha$ through σ_α because of the mean wind:

$$\overline{T}_\alpha = \overline{A}\, \overline{v}_\alpha. \tag{20}$$

For the ratio between two fluxes we get

$$\frac{\overline{E}_\alpha}{\overline{T}_\alpha} = \frac{1}{2} \frac{u_{\alpha.m}}{\overline{v}_\alpha} \frac{\overline{A}_1 - \overline{A}_2}{\overline{A}}. \tag{21}$$

The expression:

$$\frac{1}{2} \frac{u_{\alpha.m}}{\overline{v}_\alpha}$$

is common for the transport of all quantities and only depending on the intensity of the eddy movements compared with the mean velocity.

In our case this factor is about 2, or generally of the order of magnitude 10°. We therefore have the order of magnitude of the ratio being the same as the order of magnitude $\frac{\bar{A}_1 - \bar{A}_2}{\bar{A}}$, and we get the following rule:

The magnitude of the ratio of the mean flux with the eddy movements to the flux with the mean wind is proportional to the ratio of the variations of the element A to its mean value.

For the amount of heat energy we have for instance:

$$\frac{\bar{A}_1 - \bar{A}_2}{\bar{A}} = \frac{c_p (\overline{\varrho \vartheta})_1 - c_p (\overline{\varrho \vartheta})_2}{c_1 \overline{\varrho \vartheta}} = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{p},$$

and this ratio is small because the variations of the pressure p are small compared with the value of the mean pressure itself. Consequently the heat transport with the eddy movements will be small compared with that with the mean wind.

The amount of water vapour, however, can be almost zero and the variations of this element therefore is of the same order of magnitude as the mean amount itself. In this case we consequently have that the transport with the eddy movements is of the same size as the transport with the mean wind.

Similar considerations can be made for the fluxes of the other quantities.

6. On the transport of heat.

The formulae (9):

$$F_{H.x} = c_p \varrho \vartheta v_x,$$
$$F_{H.y} = c_p \varrho \vartheta v_y$$

give for the mean transport of heat:

$$\bar{F}_{H.x} = \frac{c_p}{R} \overline{p v_x},$$
$$F_{H.y} = \frac{c_p}{R} \overline{p v_y}, \tag{22}$$

and the equations (14)—(16) give:

$$\bar{F}_{H.x} = \frac{c_p}{R} \overline{p v_x} + \frac{c_p}{R} \frac{1}{n} \sum_1^n p u_x,$$
$$\bar{F}_{H.y} = \frac{c_p}{R} \overline{p v_y} + \frac{c_p}{R} \frac{1}{n} \sum_1^n p u_y, \tag{23}$$

where the first term indicates the transport with the mean wind and the second that caused by the eddy movements.

From these equations we will draw some conclusions of general character.

1. As shown in the previous chapter the second term in the formula (23) is so much smaller than the first one that it in all practical calculations can be omitted. We therefore have with great approximation:

$$\bar{F}_{H.x} = \frac{c_p}{R} \bar{p}\,\bar{v}_x,$$

$$F_{H.y} = \frac{c_p}{R} \bar{p}\,\bar{v}_y.$$

Or for the arbitrary horizontal direction α:

$$\bar{F}_{H.\alpha} = \frac{c_p}{R} \bar{p}\,\bar{v}_\alpha. \tag{24}$$

This means a simplification of the practical calculations of the horizontal flux of heat, to which C. H. B. PRIESTLEY [4] has drawn the attention.

It is of course not necessary to use hourly values in order to obtain the mean transport for the month. It will be sufficient to calculate it by using four equidistant hours for each day, for instance the synoptic hours 00, 06, 12 and 18 G. M. T. The hourly values have been used in the calculations above only to obtain the highest possible accuracy in the examination of the material.

2. When the area of the surface σ_α through which we calculate the mean heat transport per unit area is increased to a considerable size so that it is crossed simultaneously of mean winds in different directions, the value of $\bar{v}_\alpha$ will diminish so that the flux of heat from the eddy movements no more can be neglected. This will for instance be the case if we calculate the mean transports through a vertical surface along a circle of latitude or a great part of such a circle. The fact that we can neglect the flux by the eddy movements in the practical computation of the mean heat flux through a plane of the size of one unit area therefore does not mean that it is insignificant for the transport of heat in the atmosphere.

The equation (19) gives:

$$\bar{E}_{H.\alpha} = \frac{1}{2} \frac{c_p}{R} (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)\, u_{\alpha.m}, \tag{25}$$

where p_1 is the mean pressure of the air passing σ_α in the direction α and p_2 is the mean pressure of the air passing in the opposite direction. The heat flux is therefore proportional to the difference between these pressures. This result leads to the following rules:

Over a circle of latitude the eddy movements cause a flux of heat to the north only when the warm winds from the south pass the circle under a higher pressure than the colder winds from the north.

Through a horizontal plane σ_α we have a downward flux of heat on account of the eddy movements because the warm descending airmasses of the anticyclones pass σ_α under a higher pressure than the cold ascending air of the cyclones.

3. In Table 6 we find the different transports of energy measured in heat units (ton calories per m² per second).

The largest flux F of energy is that of heat. It is however to be remarked that these transports almost entirely are caused by the mean wind, the transports with the eddy movements being insignificant. On the average for large surfaces where the mean wind is small, the fluxes of heat energy and potential energy therefore will be considerably smaller. This will for instance be the case if we compute the transports through a vertical surface along a circle of latitude or a great part of such a circle.

From the table we further see that the transport of kinetic energy is relatively small, it is however to a great extent caused by the eddy movements and therefore will not necessarily diminish on the average for large surfaces.

The main transport of energy caused by the eddy movements is that of condensation heat; the transport of water vapour therefore plays an important part in the transport of energy.

It is to be noticed that the transport of water vapour by the eddy movements was directed to the north even in January 1929, when the mean wind and consequently all the transports with the mean wind were directed to the south (see Table 3). The transport of water vapour because of the eddy movements will as a rule be directed to the north, because the amount of water vapour generally is larger towards south (in the northern hemisphere).

The water vapour transported to the north by the eddy movements will transfer to the air its condensation heat as soon as raindrops are formed, and also its freezing heat if the raindrops freeze or if the condensation takes place in the form of icecrystals. The water transported to the north by the eddy movements finally will have to be brought to the south again by the ocean currents.

4. As a consequence of the definition of the mean wind, there is no transport of volume with the eddy movements, but a transport of mass (see Tables 3 and 4). The transports of mass with the eddy movements are small, only 1—2 percent of the transport of mass with the mean wind, but it is evident that they can lead to compensating transports of mass with the mean winds.

Let us for instance consider a vertical surface surrounding the North Pole along a circle of latitude. The airmasses passing our surface from the north will then generally be cooler and heavier than those passing from the south side. The eddy movements therefore will cause a transport of mass from north to south. From Table 3 we see this transport from north even in the case when the mean wind is from south. We also see that this transport of mass with the eddy movements is only 1—2 percent of the transport with the mean wind. In our polar region this small but constant loss of mass must be compensated by a small surplus of the mean winds from south. These compensating winds will bring not only mass, but also heat energy, water vapour etc. to the north.

The transport of heat caused by these compensating winds is of the same order of magnitude as the transport of heat caused directly by the mean eddy movements. Both are very small compared with the flux

Table 6. *The mean transport of energy at Aas in January and October 1929 (in ton calories per m² and sec).*

	Mean total transport		Transport with the mean wind		Mean transport with the eddy movements	
	$\overline{F_x}$	$\overline{F_y}$	$\overline{T_x}$	$\overline{T_y}$	$\overline{E_x}$	$\overline{E_y}$
January 1929						
Transport of:						
Kinetic energy	$0.85\ 10^{6}$	$1.05\ 10^{6}$	$0.13\ 10^{6}$	$0.74\ 10^{6}$	$0.72\ 10^{6}$	$0.31\ 10^{6}$
Heat energy	$1.07\ 10^{2}$	$5.51\ 10^{2}$	$1.05\ 10^{2}$	$5.53\ 10^{2}$	$0.02\ 10^{2}$	$0.02\ 10^{2}$
Condensation energy ...	$0.48\ 10^{3}$	$0.26\ 10^{3}$	$0.20\ 10^{3}$	$1.03\ 10^{3}$	$0.28\ 10^{3}$	$0.77\ 10^{3}$
Freezing energy	$0.06\ 10^{3}$	$0.03\ 10^{3}$	$0.03\ 10^{3}$	$0.13\ 10^{3}$	$0.03\ 10^{3}$	$0.10\ 10^{3}$
Potential energy	$0.38\ 10^{6}\ z$	$2.06\ 10^{6}\ z$	$0.39\ 10^{6}\ z$	$2.04\ 10^{6}\ z$	$0.01\ 10^{6}\ z$	$0.02\ 10^{6}\ z$
October 1929						
Transport of:						
Kinetic energy	$1.99\ 10^{6}$	$16.93\ 10^{6}$	$0.31\ 10^{6}$	$3.12\ 10^{6}$	$2.30\ 10^{6}$	$13.81\ 10^{6}$
Heat energy	$0.03\ 10^{2}$	$10.16\ 10^{2}$	$0.05\ 10^{2}$	$10.28\ 10^{2}$	$0.02\ 10^{2}$	$0.12\ 10^{2}$
Condensation energy ...	$0.40\ 10^{3}$	$6.71\ 10^{3}$	$0.02\ 10^{3}$	$4.60\ 10^{3}$	$0.42\ 10^{3}$	$2.11\ 10^{3}$
Freezing energy	$0.05\ 10^{3}$	$0.90\ 10^{3}$	$0.00\ 10^{3}$	$0.61\ 10^{3}$	$0.05\ 10^{3}$	$0.29\ 10^{3}$
Potential energy	$0.01\ 10^{6}\ z$	$3.52\ 10^{6}\ z$	$0.02\ 10^{6}\ z$	$3.61\ 10^{6}\ z$	$0.01\ 10^{6}\ z$	$0.09 10^{6}\ z$

of heat by the mean air transport, i. e. 1—2 percent. For the transport of water vapour etc. the transport with the compensating winds is very small compared both with the transport with the mean wind and with the eddy movements.

5. The difficulties caused by these compensating winds are avoided if the mean wind is defined in such a way that there is a transport of mass only with the mean wind and not with the eddy movements. This is the case if we work with the specific momentum $\boldsymbol{V}$:

$$\boldsymbol{V} = \varrho\, \boldsymbol{v} \tag{26}$$

instead of $\boldsymbol{v}$ and with the amount a:

$$a = \frac{1}{\varrho} A \tag{27}$$

of a quantity per unit mass instead of the amount A of the quantity per unit volume.

For the transport F_α of the quantity in the direction α we then have:

$$F_\alpha = A\, v_\alpha = a\, V_\alpha.$$

If we introduce here:

$$U_\alpha = V_\alpha - V_{\alpha.m},$$

U_α is the difference between the actual specific momentum V_α and its mean value $V_{\alpha.m}$, and we find:

$$F_\alpha = a\, V_{\alpha.m} + a\, U_\alpha.$$

When the n transports are summed we get:

$$F_{\alpha.m} = a_m\, V_{\alpha.m} + \frac{1}{n} \sum_1^n a\, U_\alpha.$$

Through the plane α a mass:

$$\frac{1}{2} U_{\alpha.m}$$

passes per unit area and time in the direction α, and the same passes per unit area and time in the opposite direction $\alpha + 180°$ because of the eddy movements.

If the air passing in the direction α has a mean amount $a_{1.m}$ of a quantity and air passing in the opposite direction has a mean amount $a_{2.n}$ of the quantity we have for the transport with the eddy movements:

$$\frac{1}{n} \sum_1^n a\, U_\alpha = \frac{1}{2} (a_{1.m} - a_{2.m})\, U_{\alpha.m},$$

or:

$$F_{\alpha.m} = a_m\, V_{\alpha.m} + \frac{1}{2} (a_{1.m} - a_{2.n})\, U_{\alpha.m}. \tag{28}$$

In the case of heat transport we have:

$$F_{\alpha.m} = c_p\, \vartheta_m + \frac{1}{2} c_p\, (\vartheta_{1.m} - \vartheta_{2.m})\, U_{\alpha.m}.$$

The ratio between the two transports will then be:

$$\frac{1}{2}\,\frac{U_{\alpha.m}}{V_{\alpha.m}}\,\frac{\vartheta_{1.m}-\vartheta_{2.m}}{\vartheta_m},$$

that has an order of magnitude of 10^{-2}.

We now can see for instance that there will be a flow of heat with the eddy movements to north because the airmasses passing our surface x from south generally will have a higher mean temperature than the airmasses passing our surface from north, and the transport can easily be computed. It is very small compared with heat transported with the mean wind.

For the transport of the other quantities the difference between the two definitions of mean and eddy movements do not cause any perceptible change.

7. Remarks on the turbulence.

The equations in the preceding chapters have been developed without any assumptions regarding the size and periods of the eddy movements, and consequently they are also valid for the transport of heat and other quantities caused by the turbulence. In fact I have taken up the study of the transport of quantities with the mean winds and with the eddy movements with the idea of obtaining results regarding the turbulence and the transport of heat, water vapour, specific momentum, kinetic energy etc. caused by the turbulence. These questions will be taken up for discussion in a later paper.

Literature.

1. Aspirations-Psychrometertafeln. Herausgegeben vom Preußischen Meteorologischen Institut, S. 112—113. Braunschweig 1929.
2. Jelineks Psychrometer-Tafeln. Herausgegeben von F. M. Exner, Leipzig 1929, S. 18.
3. Hesselberg, Th.: Gesetzmäßigkeiten in der Windverteilung. Geofysiske Publikasjoner Vol. XI, No. 9, Oslo 1936.
4. Priestley, C. H. B.: Heat Transport and Zonal Stress between Latitudes. Union Géodés. Géophys. Internat. Assoc. Météor. Procès-verbaux Oslo 1948, II, 148 (1950).

551.524.7 : 551.571.7

(Meteorologisches Institut der Johannes-Gutenberg-Universität, Mainz.)

Der Wärme- und Wasserdampfhaushalt der freien Atmosphäre.

Von

F. Möller und **E. de Bary.**

Mit 2 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Die Zahlenwerte des horizontalen Wärmetransportes durch Großaustausch, die man bisher kennt, sind schwierig zu deuten; insbesondere gilt dies für die Umkehr des meridionalen Stromes in der mittleren Troposphäre. Es wird deshalb ein Verfahren angegeben, aus den Radiosondenaufstiegen eines Stationsdreiecks die Wärmebilanz in der freien Atmosphäre zu bestimmen. Für das Jahr von April 1949 bis März 1950 wird in einem England, die Nordsee und Nordwestdeutschland überdeckenden Gebiet eine Abkühlung der Troposphäre von 0,5°/Tag am Boden, zunehmend auf 1,8°/Tag bei 300 mb gefunden; die Stratosphäre zeigt eine leichte Erwärmung. Über dem Ozeangebiet westlich Englands besteht am Boden Erwärmung von 0,4°/Tag, in 300 mb Abkühlung von 1,3°/Tag. In beiden Gebieten ist der Wärmeentzug größer als nach den bekannten Abschätzungen der Wärmehaushaltsüberschüsse zu erwarten war.

Eine ähnliche Bestimmung des Feuchtigkeitshaushaltes erlaubt die Angabe der Differenz Verdunstung minus Niederschlag, die sich für das Nordseegebiet im Jahresmittel negativ, für den Nordostatlantik positiv ergibt; die Jahresgänge beider Gebiete sind nahezu entgegengesetzt. Die Verdunstung selbst hat über der Nordsee das Maximum im Sommer, das Minimum im Spätwinter, über dem NE-Atlantik das Maximum etwa im November, das Minimum im Mai und Juni.

Summary. The numerical values of the horizontal heat transport by large scale mass exchange, as known until now, are difficult to interpret; this is the case particularly for the reversal of the meridional stream in the middle troposphere. Therefore a method is described to determine the heat-balance in the free atmosphere from ascents of radio-sondes in a triangle of stations. A cooling of the troposphere of 0.5°/day at ground, increasing to 1.8°/day at 300 mb, is found in the period from April 1949 to March 1950 in an area covering England, the North Sea and northwestern Germany; the stratosphere shows a slight warming. Above the ocean west of England there is a warming of 0.4°/day at ground and a cooling of 1.3°/day at 300 mb. In both these areas loss of heat is greater than was to be expected from the hitherto known estimates of the balance of thermal economy.

A similar determination of the economy of humidity yields the difference between evaporation and precipitation which results, in the annual mean, to be negative for the North Sea area and positive for the northeastern Atlantic Ocean; the annual variation of these two areas is almost contrary. Evaporation over the North Sea has its maximum in summer, its minimum towards the end of winter; over NE-Atlantic maximum is roughly in November, minimum in May and June.

Résumé. Il est difficile d'interpréter les valeurs numériques du transport horizontal de chaleur dû à l'échange turbulent à grande échelle; cela est particulièrement vrai de l'inversion du flux méridien dans la troposphère moyenne. On expose donc ici un procédé capable de déterminer le bilan thermique dans l'atmosphère libre à partir de radiosondages de trois stations. On trouve que d'avril 1949 à mars 1950, dans une région comprenant l'Angleterre, la Mer du Nord et le Nord-Ouest de l'Allemagne, il y a eu refroidissement de la troposphère de 0,5° par jour au sol et atteignant 1,8° par jour au niveau de 300 mb; il y a eu léger réchauffement de la stratosphère. Sur l'Océan à l'Ouest de l'Angleterre, il y a eu au sol un réchauffement de 0,4° par jour et un refroidissement de 1,3° par jour à 300 mb. Dans les deux régions la perte de chaleur est plus grande que ne le voudraient les estimations connues des excédents du bilan thermique.

Une détermination analogue de l'humidité fournit la différence entre l'évaporation et les précipitations qui, dans la Mer du Nord, est négative en moyenne annuelle, positive pour le Nord-Est atlantique. Les marches annuelles des deux domaines sont à peu près contraires. L'évaporation présente un maximum en été sur la Mer du Nord et un minimum à la fin de l'hiver; sur le Nord-Est atlantique le maximum est à peu près en novembre et le minimum en mai et juin.

Bei Betrachtungen über den horizontalen Großaustausch ist es üblich, sich die Atmosphäre mittlerer Breiten als ein System vorzustellen, das sich mit der mittleren Strömung als Grundströmung bewegt, dem aber die großräumigen „synoptischen" Bewegungen als Turbulenz- oder Störungsbewegungen überlagert sind [*1*]. Die durch Hoch- und Tiefdruckgebiete bewirkten Nord- und Südwinde sind in diesem Sinne turbulente Störungen der Westdrift der allgemeinen Zirkulation. Die warmen Südwinde der Zyklonenvorderseite der Nordhemisphäre führen mehr Wärme nach Norden, als durch die kalten Rückseitenwinde von Nord nach Süd transportiert wird, so daß ein Wärmestrom nach Norden resultiert. Summiert man diese Strömungen über einen ganzen Breitenkreis, so heben sich die meridionalen Bewegungen gegenseitig auf, und man hat es daher mit einem echten — nämlich nicht mit Massentransport verbundenen — Austauschvorgang zu tun. Er wird gespeist durch den Wärmehaushaltsüberschuß der Tropen und ergießt sich in die großen polaren Wärmeabgabegebiete; doch ist dieses Bild zweifellos zu schematisch.

1. Wärmetransporte durch horizontalen Großaustausch.

Durch eine quantitative Bestimmung der Großaustauschvorgänge in der unteren Troposphäre auf der Nordhalbkugel konnte für den Winter gezeigt werden [*2*], daß es nicht nur meridionale Transporte gibt, sondern

daß als Folge der Temperaturunterschiede innerhalb einer Breitenzone, vornehmlich also der Temperaturunterschiede zwischen Kontinent und Ozean, auch *zonale Wärmeströme* auftreten. Das Gegeneinanderwirken von warmen West- und kalten Ostwinden an den Westrändern der Kontinente und der umgekehrte Vorgang an den Ostküsten führen in analoger Weise zu zonalen Wärmetransporten.

Diese konnten unter Heranziehung des Aufstiegsmaterials von Lindenberg schon vor längerer Zeit nachgewiesen werden [*3*] (Tabelle 1). Dabei wurde auch ein Umklappen der im Winter von West nach Ost gerichteten Wärmestromkomponente in die entgegengesetzte Richtung während des Sommers gefunden. Eine entsprechende Untersuchung für Japan oder die Ostküste von USA würde im Winter einen turbulenten Wärmetransport von Ost nach West, bzw. von SE nach NW ergeben. Aus der Konvergenz dieser Wärmeströme in die winterlichen Kontinente hinein und der Divergenz aus den Ozeangebieten heraus lassen sich zahlenmäßige Abschätzungen für den unterschiedlichen Wärmehaushalt dieser Gebiete geben [*2*]. Die Meere sind Wärmeüberschußgebiete, die Kontinente Defizitgebiete des Wärmehaushaltes. Die erhaltenen Zahlen wurden durch Stichproben von Wärmehaushaltsberechnungen ausgewählter Orte gestützt [*4*]. In einer die ganze Erde umfassenden Untersuchung der Wärmebilanz wies Albrecht [*5*] nach, daß in den gemäßigten Breiten die Meere sogar im Jahresmittel als Wärmeüberschuß-, die Kontinente als Defizitgebiete aufzufassen sind. Die von ihm gleichzeitig gefundene überragende Rolle der Tropenregen soll uns hier nicht beschäftigen.

Untersucht man also die Wärmeströme nur für einen bestimmten Ort, nicht für den ganzen Breitenkreis, dann verschwinden die zonalen Komponenten nicht, wie dies Tabelle 1 für Lindenberg bis 4 km Höhe zeigt. Im Januar ist die nach Ost gerichtete Wärmestromkomponente positiv, ebenso im Oktober bis 1 km Höhe, in den anderen Monaten und Höhen dagegen negativ.

Rechnerisch geht man hierbei so vor, daß man für einen nicht zu kurzen Zeitraum aus den ein- oder mehrmals am Tage verfügbaren Beobachtungen den Wärmetransport durch eine vertikale, senkrecht zum Wind stehende Flächeneinheit

$$\overline{\mathfrak{Q}} = c_p \, \overline{\varrho} \, \overline{\mathfrak{v}' \, T'} \tag{1}$$

bildet, wobei $\mathfrak{v}' = \mathfrak{v} - \overline{\mathfrak{v}}$ und $T' = T - \overline{T}$ die Abweichungen des horizontalen Windvektors bzw. der Temperatur vom Gesamtmittel des untersuchten Zeitraumes sind. Querstriche bedeuten zeitliche Mittelwerte. Die Dichte $\overline{\varrho}$ kann man als wenig veränderlich aus der Mittelbildung herauslassen.

Für Südengland fand Priestley [*6*] nach dem gleichen Verfahren ein weiteres überraschendes Ergebnis. Er berechnete nur die meridionalen Komponenten des Wärmestromes und fand, daß in jedem der von ihm untersuchten 24 Monate sich dessen Richtung in der oberen Troposphäre umkehrt, also nicht von Süd nach Nord, sondern von Nord nach Süd gerichtet ist. An der Tropopause tritt ein zweiter Vorzeichenwechsel ein

(Tabelle 2). Dieser zweite Wechsel ist scheinbar durch die Austauschvorstellung verständlich zu machen, denn an dieser Stelle kehrt sich der horizontale Temperaturgradient um. In etwa 400 bis 500 mb ist das aber nicht der Fall, der Temperaturgradient kann innerhalb der Troposphäre einheitlich angenommen werden. Der Austauschstrom ist hier also von Kalt zu Warm gerichtet; ebenso aber auch in der Stratosphäre, denn hier ist es im Mittel im Süden kalt, im Norden warm und der Wärmestrom ist von Süd nach Nord gerichtet. In der oberen Hälfte der Atmosphäre sind also die Vorgänge mit der Austauschvorstellung nicht mehr verträglich.

Man kann folgende Erklärung für diese Erscheinung versuchen: Die Zentren von Hoch- und Tiefdruckgebieten verlagern sich mit der Höhe nach Westen, während die Achsen der Warm- und Kaltluftvorstöße mit der Höhe etwas voreilen, bzw. weiter östlich liegen. Wenn sich daraus die Umkehr des Wärmestromes erklären soll, so muß die Phasenverschiebung der Druck- und Temperaturwellen

Tabelle 1. *Horizontale Wärmetransporte infolge Großaustausches [cal cm^{-2} sec^{-1}] durch eine nordsüdlich (Q_x) und eine westöstlich (Q_y) orientierte senkrechte Flächeneinheit.*
Lindenberg, 13jährige Mittel 1905 bis 1917, nach Möller [3].

Höhe	Januar		April		Juli		Oktober		Jahr	
	Q_x	Q_y	Q_x	Q_y	Q_x	Q_y	Q_x	Q_y	Q_x	Q_y
4000 m	(+ 0,20)	(+ 0,08)	— 0,14	+ 0,21	— 0,23	+ 0,04	— 0,06	+ 0,12	— 0,06	+ 0,11
3000 m	+ 0,26	+ 0,13	— 0,18	+ 0,25	— 0,25	+ 0,04	— 0,06	+ 0,15	— 0,06	+ 0,10
2000 m	+ 0,36	+ 0,17	— 0,20	+ 0,31	— 0,29	+ 0,05	— 0,03	+ 0,21	— 0,04	+ 0,19
1000 m	+ 0,57	+ 0,15	— 0,19	+ 0,36	— 0,33	+ 0,10	+ 0,05	+ 0,23	+ 0,03	+ 0,21
500 m	+ 0,82	+ 0,06	— 0,16	+ 0,28	— 0,38	+ 0,15	+ 0,22	+ 0,19	+ 0,12	+ 0,17
Boden	+ 0,52	+ 0,10	— 0,13	+ 0,16	— 0,19	+ 0,04	+ 0,15	+ 0,06	+ 0,09	+ 0,09

Tabelle 2. *Meridionale Austauschwärmeströme über Südengland, 1946 bis 1947.* Nach Priestley [6].

p [mb]	950	900	700	500	300	250	200	150	110	Ges. Atmosph.
Q_y [cal cm^{-2} sec^{-1}]	+ 0,28	+ 0,32	+ 0,15	+ 0,051	— 0,022	— 0,046	— 0,020	+ 0,040	+ 0,025	+ 1,12 · 10^5 cal cm^{-1} sec^{-1}

bereits in 400 mb so stark sein, daß beim Nordwind ein leichtes Überwiegen der warmen, beim Südwind ein Überwiegen der kalten Luftmassen eintritt. Beobachtungen zeigen, daß oberhalb einer Warmfront die Strömung aus NW, hinter einer Kaltfront deutlich aus SW kommt. Beides deutet darauf, daß der Phasenunterschied der Temperatur- und Druckwelle (am Boden 90°) in der Höhe bereits um mehr als 90° abgenommen hat. Auch müssen in der Stratosphäre die Drucktröge an ihrer Vorderseite etwas wärmer als an der Rückseite, die Hochdruckrücken an ihrer Vorderseite etwas kälter als an der Rückseite sein. Eine synoptische Bestätigung dieser Verhältnisse ist uns unbekannt.

Es erscheint nachteilig, daß bei der Untersuchung von Priestley die Zonalkomponente des Wärmestromes nicht mitberechnet wurde. Wir haben deshalb ein Beobachtungsmaterial aus den Jahren 1949/50 nach dem gleichen Verfahren untersucht, jedoch beide Komponenten bestimmt. Die Ergebnisse sollen hier nicht zahlenmäßig wiedergegeben werden, weil sich erstaunlicherweise dabei in einzelnen Monaten schon am Boden Wärmeströme mit einer Richtung von Nord nach Süd ergeben, obwohl das mittlere Temperaturgefälle dieser Monate durchaus von Süd nach Nord gerichtet ist. Bei Betrachtung der einzelnen Tageswerte zeigt sich, daß in diesen Monaten ausgesprochene Troglagen mit anhaltendem kalten Südwind in der einen Monatshälfte vorherrschen, in der anderen dagegen Nordwestlagen mit höheren Temperaturen. Es rufen also zwei verschiedene Großwetterlagen, die den kurzperiodischen Schwankungen überlagert sind, einen entgegengesetzt gerichteten Wärmestrom hervor, während die kleinen Schwankungen dabei noch die „richtigen" Koppelungen zeigen können. Trotzdem zeigt die mittlere Temperaturkarte des Zeitraumes ein von Süd nach Nord gerichtetes Gefälle. Vielleicht ist ein Monat mit 30 Einzelwerten eine zu kurze Zeitspanne für solche Untersuchungen. Es ist aber fraglich, ob eine Zusammenfassung längerer Beobachtungsreihen ein anderes Ergebnis zeigen würde.

Aus diesen Feststellungen ergibt sich, daß man für die hohe Troposphäre und die Stratosphäre die horizontalen Austauschwärmeströme nicht nach der Wärmeleitungsgleichung

$$\overline{\Omega} = - A_h \nabla_2 \overline{T} \tag{2}$$

bestimmen kann, wo A_h ein Austauschkoeffizient ist, der nach irgendwelchen Verfahren, z. B. aus der Windstruktur berechnet wird (wie es u. a. von Lettau und von Elliott und Smith [7] getan worden ist). Dabei kann sich nur ein Wärmestrom in Richtung des Temperaturgefälles, niemals entgegengesetzt ergeben. Auch für die untere Troposphäre ist die Berechtigung dieses Verfahrens nicht ganz sicher, während die Erfassung durch die einzelnen Turbulenzelemente nach Gl. (1) den Wärmestrom richtig liefert. Bei einer zusammenfassenden Betrachtung des ganzen Breitenkreises wie z. B. bei F. Defant [8] ist die Verwendung von Gl. (2) statthaft, weil die „falschen" Paarungen warmer Nordwinde mit kalten Südwinden nicht ausschlaggebend werden, sondern gegenüber den „richtig" gekoppelten Temperatur- und Windabweichungen anderer

Gebiete zurücktreten oder nur eine Verminderung des Austauschkoeffizienten bewirken.

2. Die Wärmebilanz.

Es liegt nahe, die Umkehr des Wärmestromes in 400 mb mit dem Vorzeichenwechsel des Wärmehaushaltsüberschusses in Verbindung zu bringen, der erstmalig 1935 aufgezeigt [9] und nach derselben Methode neuerdings von ALBRECHT [5] in geographischer Verteilung dargestellt wurde. Man kann aber den Wärmetransport *an einem Ort* nicht zur Wärmeproduktion in Beziehung setzen. Dagegen gibt die *horizontale Divergenz des Wärmetransportes* an, ob die Luftmassen, die über den betreffenden Ort hinweggeführt worden sind, dabei Wärme aufgenommen oder abgegeben haben. Man kann also unter Verwendung von (1) die Wärmeproduktion

$$w_1 = \mathrm{div}_2 \, \bar{\Omega} = c_p \, \bar{\varrho} \, \mathrm{div}_2 \, (\overline{\mathfrak{v}' \, T'}) \tag{3}$$

zu ermitteln versuchen und mit den anders gewonnenen Bestimmungen des Wärmehaushaltes vergleichen. Die Rechenarbeit vergrößert sich dabei auf das Dreifache, denn nur aus der Bestimmung von $\bar{\Omega}$ an mindestens drei Orten kann die Divergenz gefunden werden. Die Wärmeproduktion äußert sich aber auch in einer Divergenz des Wärmetransportes der ausgeglichenen Strömung, $\mathrm{div}_2 \, (\bar{\mathfrak{v}} \, \bar{T})$. Deshalb ist es zweckmäßig, etwas anders vorzugehen.

Die Wärmezufuhr oder der Wärmehaushaltsüberschuß in der Volumeneinheit an einer bestimmten Stelle ist gegeben durch die substantielle Änderung der potentiellen Temperatur mit der Zeit

$$w = c_p \, \varrho \, \frac{T}{\Theta} \, d\Theta/dt, \tag{4}$$

was sich in bekannter Weise zerlegen läßt in $w = c_p \, \varrho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathfrak{v} \, \nabla_2 \, T + \right.$ $\left. + v_z \cdot \frac{T}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)$. In den beiden ersten Gliedern der Klammer ist dabei die potentielle Temperatur durch die wahre Temperatur T ersetzt worden, was unbedenklich geschehen kann. Bildet man das Mittel über eine längere Zeitspanne, so wird

$$\bar{w} = c_p \, \bar{\varrho} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \overline{\mathfrak{v} \, \nabla_2 \, T} + \overline{v_z \cdot \frac{T}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial z}} \right). \tag{5}$$

Dabei ist wieder ϱ durch die mittlere Dichte $\bar{\varrho}$ ersetzt.

Das erste Glied rechts kann bei Betrachtung von Zeitspannen der Größenordnung eines Monats oder mehr meist vernachlässigt werden.

Für das letzte Glied gilt das gleiche nur dann, wenn man annehmen darf, daß Aufwärts- und Abwärtsbewegungen gleich häufig vorkommen und kein wesentlicher Unterschied des vertikalen Temperaturgradienten zwischen Wetterlagen mit aufsteigender und absteigender Bewegung, also zwischen Aufgleiten und Abgleiten, besteht. Dieses Vertikalbewegungsglied darf daher sicher nicht außer acht bleiben in Gebieten

mit ständiger Absinkbewegung, z. B. im Passatkreislauf oder in stationären Antizyklonen, und ebenso nicht in Gebieten mit überwiegender Aufwärtsbewegung, z. B. in ausgesprochenen Staulagen oder auch stationären

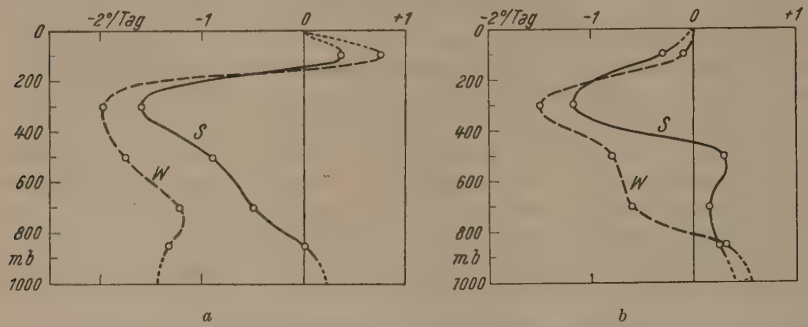


Abb. 1. Wärmebilanz der freien Atmosphäre. *a*: über dem Nordseegebiet (inklusive England und Nordwestdeutschland); *b*: über dem Nordostatlantik. *S* = Sommer, *W* = Winter.

Zyklonen. In dem veränderlichen Wetter der mittleren Breiten darf aber der dritte Term in erster Näherung vernachlässigt werden, so daß gilt*

$$\overline{w} = c_p \bar{\varrho}\, \overline{\mathfrak{v}}\, \overline{\Delta_2 T}. \tag{6}$$

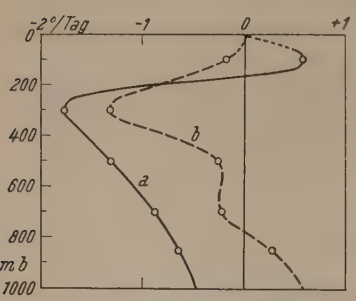


Abb. 2. Wärmebilanz der freien Atmosphäre im Jahresmittel. *a*: über dem Nordseegebiet (inklusive England und Nordwestdeutschland); *b*: über dem Nordostatlantik.

Für das Jahr von April 1949 bis März 1950 wurde nach (6) die Wärmeproduktion über einem Gebiet, das England, die Nordsee und Nordwestdeutschland umfaßt, und über einem Gebiet im östlichen Nordatlantik bestimmt. Hierzu wurden die Radiosendestationen A = Stornoway (Hebriden), B_1 = Wetterschiff ($\varphi = 60°$, $\lambda = 20°$ W), B_2 = Berlin, C = Camborne (Halbinsel Cornwall, SW-England) benutzt. Die Stationen Stornoway-Camborne-Berlin bilden das die Nordsee überdeckende und mehr kontinental gelegene Dreieck, die Stationen Stornoway-Camborne-Wetterschiff das für den Ozean westlich England charakteristische Dreieck. Für 850, 700, 500, 300 und 100 (96) mb wurden Temperatur T und Wind $\mathfrak{v}$ einmal täglich aus den Wetterkarten [*10*] entnommen. Die horizontalen Temperaturgradienten in jedem Isobarenniveau lassen sich aus den Temperaturdifferenzen zwischen je zwei Stationspaaren leicht rechnerisch oder graphisch durch Verwendung eines Nomogramms

* Führt man hier wieder $\mathfrak{v} = \bar{\mathfrak{v}} + \mathfrak{v}'$ und $T = \bar{T} + T'$ ein, so ergibt sich $\overline{\mathfrak{v}\, \nabla_2 T} = \bar{\mathfrak{v}}\, \nabla_2 \bar{T} + \overline{\mathfrak{v}' \nabla_2 T'} = \bar{\mathfrak{v}}\, \nabla_2 \bar{T} + \operatorname{div} \overline{\mathfrak{v}' T'} - \overline{T' \operatorname{div} \mathfrak{v}'}$. Man erkennt, daß die Divergenz der turbulenten Wärmeströme nach Gl. (3) durch das zweite Glied gegeben ist, daß aber exakt noch der erste und dritte Term berücksichtigt werden müssen. Gl. (5) bzw. (6) sind also vollständiger als (3).

bestimmen. Diese wurden dann mit der mittleren Windgeschwindigkeit der drei Stationen $v_x = \frac{1}{3}(v_{xA} + v_{xB} + v_{xC})$, $v_y = \frac{1}{3}(v_{yA} + v_{yB} + v_{yC})$ kombiniert, so daß für jeden Tag die Temperaturänderung $A = w/c_p \varrho = -v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y}$ vorlag. Die Mittelwerte sind in Tabelle 3 für Monate, Halbjahre und das ganze Jahr in grad/Tag angegeben, die Mittel für Sommer- und Winterhalbjahr sowie die Jahresmittel für die beiden Beobachtungsdreiecke außerdem in Abb. 1 und 2. Dabei erscheint die Angabe der individuellen Temperaturänderungen $\bar{A}$ in grad/Tag, als ein unmittelbar anschauliches Maß für die Wärmebilanz, recht brauchbar.

Die Zahlen für die einzelnen Monate zeigen noch ziemlich viel unregelmäßige Schwankungen, die durch die geringe Anzahl von nur 30 zugrunde liegenden Einzelwerten bedingt sind. Jedoch prägen sich einzelne markante Züge in allen Einzelmonaten aus.

Im Nordseedreieck sind positive Wärmebilanzen in der Troposphäre selten. Vorherrschend findet man Abkühlung, die ihren größten Betrag mit etwa 1 bis 3°/d in der oberen Troposphäre bei 300 mb erreicht. Von der Umkehrung des Vorzeichens, wie sie die Wärmestromrechnungen Priestleys zeigten, ist in unserem Material nichts zu erkennen. Nach den bisherigen Untersuchungen des Wärmehaushaltes [*9,5*] ist es aber unerwartet, daß in der Troposphäre ein Bereich mit positiver Bilanz, der durch die Kondensationswärme des Niederschlags hervorgerufen sein müßte, fehlt und durchweg Abkühlung überwiegt. Das Maximum

Tabelle 3. *Temperaturänderungen [grad/Tag] der Wärmebilanz der freien Atmosphäre.*

I. England, Nordsee, NW-Deutschland.

p [mb]	850	700	500	300	100
1949					
April	— 0,67	— 0,42	— 1,21	— 3,86	+ 0,11
Mai	+ 0,67	+ 0,18	— 0,54	— 0,29	+ 0,79
Juni	— 0,08	— 0,83	— 1,41	— 0,65	+ 0,08
Juli	— 0,09	— 1,11	— 0,70	— 0,65	— 0,08
August	+ 0,52	— 0,72	— 1,28	— 2,85	+ 0,56
September	— 0,22	— 0,09	— 0,22	— 1,21	+ 0,79
Oktober	— 0,38	— 0,19	— 0,47	— 1,68	+ 0,38
November	— 1,61	— 1,83	— 2,12	— 2,84	+ 0,83
Dezember	— 0,70	— 0,78	— 1,21	— 2,71	+ 0,46
1950					
Januar	— 1,82	— 1,26	— 2,72	— 1,84	— 0,14
Februar	— 1,32	— 1,38	— 1,74	— 0,92	+ 0,63
März	— 2,08	— 1,95	— 2,17	— 1,85	+ 2,40
Sommer 1949	+ 0,02	— 0,50	— 0,89	— 1,59	+ 0,38
Winter 1949/1950	— 1,32	— 1,23	— 1,74	— 1,97	+ 0,76
Jahr 1949/1950	— 0,65	— 0,87	— 1,32	— 1,78	+ 0,57

(Fortsetzung von Tabelle 3)

II. NE-Atlantik.

p [mb]	850	700	500	300	100
1949					
April	+ 1,96	+ 0,84	+ 1,89	— 1,03	— 1,35
Mai	+ 1,01	+ 1,09	+ 0,31	— 2,20	+ 0,06
Juni	— 0,04	— 0,05	+ 0,00	+ 0,69	+ 0,06
Juli	— 0,05	— 1,36	— 0,65	— 2,50	— 0,38
August	— 0,26	— 0,06	+ 0,40	— 1,01	+ 0,20
September	— 1,10	+ 0,39	— 0,11	— 1,00	— 0,38
Oktober	+ 0,07	+ 0,56	— 1,10	— 1,45	— 0,04
November	+ 1,62	— 0,17	+ 0,68	— 0,78	+ 0,59
Dezember	+ 1,68	— 0,66	— 2,70	— 0,82	+ 0,32
1950					
Januar	— 0,16	— 1,29	— 3,04	— 1,60	— 0,85
Februar	+ 0,73	+ 0,08	— 0,60	— 0,52	+ 0,86
März	— 2,09	— 2,06	+ 1,90	— 3,78	— 1,46
Sommer 1949	+ 0,25	+ 0,14	+ 0,31	— 1,18	— 0,30
Winter 1949/1950	+ 0,31	— 0,59	— 0,81	— 1,49	— 0,10
Jahr 1949/1950	+ 0,28	— 0,22	— 0,25	— 1,33	— 0,18

der Abkühlung in der Hochtroposphäre entspricht auch quantitativ den Erwartungen, da hier die stärksten Ausstrahlungseffekte auftreten.

Dagegen ist die fast ausnahmslos festzustellende positive Wärmebilanz im 100 mb-Niveau aus den bisherigen Wärmehaushaltsberechnungen nicht zu erwarten gewesen. Zwar ist verständlich, wie die positiven Werte aus den hier verwendeten Beobachtungen zustande kommen: An der Tropopause kehrt $\nabla_2 T$ sein Vorzeichen um, während $\mathfrak{v}$ keinen Vorzeichenwechsel erfährt; das Produkt muß also ebenfalls das Vorzeichen umkehren. Es ist aber zu bedenken, daß das Ergebnis durch die Nichtberücksichtigung des Vertikalbewegungsgliedes in Gl. (5) vorgetäuscht sein kann, das wegen des großen vertikalen Gradienten der potentiellen Temperatur hier sehr bedeutsam werden kann. Setzt man für die Stratosphäre Isothermie oder $\partial\Theta/\partial z = 1°/100$ m an, so würde eine ständige oder wenigstens im Mittel resultierende Absinkbewegung $v_z = 60$ m/d $= 0{,}07$ cm/sec genügen, um die Wärmebilanz von $+ 0{,}6°$/d des Jahresmittels zum Verschwinden zu bringen. Die gleiche Vertikalbewegung in der oberen Troposphäre liefert bei $\partial\Theta/\partial z = 0{,}2°/100$ m nur einen Fehler von $+ 0{,}1°$/d in der Temperaturänderung $\overline{A}$.

Die positiven Werte von $\overline{w}$ in der Stratosphäre kommen in dem ozeanischen Dreieck nicht vor. Hier ist $\overline{A}$ je in der Hälfte der Monate positiv und negativ, im Mittel bleibt eine geringe Abkühlung. Das würde besagen, daß über einem etwas kontinentaler gelegenen Gebiet solche vermuteten Absinkbewegungen häufiger sind als über dem Ozean. Es bedarf der Sammlung größeren Beobachtungsmaterials, um dies zu entscheiden.

In der Troposphäre zeigen sich sehr viel häufiger positive Bilanzen über dem Ozean als über der Nordsee. Im Mittel des Sommerhalbjahres herrscht bis 500 mb hinauf eine geringe Erwärmung von etwa + 0,3°/d gegen — 0,7°/d über der Nordsee. Im Winterhalbjahr ist der Unterschied ähnlich, die gesamte Troposphäre hat über der Nordsee im Mittel — 1,6°/d, über dem Atlantik — 0,6°/d.

Dieser Unterschied muß einesteils auf die stärkere Wärmezufuhr durch Übergang vom Untergrund an die Atmosphäre hervorgerufen werden, indem der Golfstrom in diesen Meeresgebieten einen Betrag abgibt, den ALBRECHT [*11*] für Scilly auf $7{,}2 \cdot 10^3$, für die Shetlands auf $5{,}5 \cdot 10^3$ cal/cm² Jahr berechnet hat.

Andererseits bewirkt auch die über dem Ozean größere Niederschlagsmenge eine größere Wärmezufuhr. Die gesamte Wärmebilanz der Troposphäre zwischen 1000 und 200 mb erhält man aus der mittleren Temperaturänderung durch Multiplikation mit dem Wasserwert der betrachteten Schicht $c_p M = c_p \Delta p/g$. Daraus ergeben sich die folgenden Zahlen:

Wärmebilanz der Troposphäre.

	Sommer	Winter	Jahr
NW-Europa . . .	— 23	$-54 \cdot 10^3$ cal/cm² Halbj.	$-76 \cdot 10^3$ cal/cm² Jahr
NE-Atlantik . .	— 4	$-22 \cdot 10^3$ cal/cm² Halbj.	$-25 \cdot 10^3$ cal/cm² Jahr

Der Unterschied zwischen beiden Meeresgebieten beträgt $51 \cdot 10^3$ cal/cm² Jahr. Zieht man davon die Wärmezufuhr aus dem Untergrund mit etwa $6 \cdot 10^3$ ab, so entspricht der Rest einem Überschuß von $45 \cdot 10^3/600 = 75$ g/cm² = 750 mm Niederschlag/Jahr. Der Betrag ist vielleicht etwas groß, aber doch in der richtigen Größenordnung; auch ist die Bestimmung durch die mittlere Temperaturänderung A nicht sehr genau.

Es ist aber bemerkenswert, daß in beiden Gebieten die Wärmebilanz der Troposphäre noch negativ ist, während in ALBRECHTS Darstellungen [*5*] beide im positiven Bereich liegen, das atlantische Dreieck sogar nahe dem Kern des nordatlantischen Wärmeüberschußgebietes.

Der Wert der hier durchgeführten Rechnungen liegt unseres Erachtens darin, daß dadurch erstmalig eine Nachprüfung der Wärmebilanzberechnungen [*9, 4, 5*] möglich wird. Diese wurden bisher im wesentlichen nur durch Berechnung der langwelligen Ausstrahlung mit dem Strahlungsdiagramm nach MÖLLER und Abschätzungen der Niederschlagsmenge festgestellt. Hier ist ein davon ganz unabhängiges Beobachtungsmaterial mit ganz anderen Bearbeitungsverfahren herangezogen worden und es ergibt qualitativ eine sehr schöne Stütze der bisherigen Ergebnisse. Quantitative Abweichungen müssen durch Erweiterung der Untersuchungen oder Nachprüfung der theoretischen Berechnungen geklärt werden. Es ist beabsichtigt, das Verfahren auf rein kontinental gelegene Dreiecke anzuwenden und auf solche im Polargebiet und in den Tropen. — Für die synoptische Meteorologie in aller Welt wird ein ungeheures Beobachtungsmaterial an Radiosonden und

Windpeilungen täglich gesammelt und es wäre erwünscht, dieses durch die hier vorgeschlagene Berechnungsweise auszuwerten. Ein vereinfachtes Verfahren läßt sich mit Hilfe der isobaren Flächen ausarbeiten.

3. Die Wasserdampfbilanz.

Das gleiche Verfahren wie für die Wärmebilanz läßt sich auch auf den Wasserdampfgehalt anwenden. Es wurden deshalb zusammen mit den Temperaturen in den verschiedenen Druckflächen auch die Taupunkte aus den Wetterkarten entnommen und daraus die Dampfdichten ϱ_w bestimmt. Zusätzlich wurde jetzt die 1000 mb-Fläche ausgewertet, während die 300 und 100 mb-Stufen wegen des verschwindenden Dampfgehaltes in Wegfall kommen. Man erhält dann die Wasserdampfbilanz*

$$\overline{B} = \overline{\frac{\partial \varrho_w}{\partial t}} + \overline{\mathfrak{v}\, \nabla_2 \varrho_w} + \overline{v_z \cdot \frac{\partial \varrho_w}{\partial z}}. \tag{7}$$

In gleicher Weise wie beim Wärmegehalt kann auch hier das erste und wahrscheinlich auch das letzte Glied der rechten Seite vernachlässigt werden, so daß nur das zweite Glied bestimmt zu werden braucht.

Die Feuchtigkeit ist ein Schmerzenskind der aerologischen Meßtechnik, und es ist nicht sicher, ob die Angaben der Radiosonden immer zuverlässig sind. Außerdem sind die Schwankungen infolge der Wetterlage sehr groß, so daß eine Vergrößerung des statistischen Materials nötig ist, um die mittleren Fehler im Ergebnis herabzudrücken. In der Tat sind auch die Schwankungen von $\overline{B}$ sehr erheblich. Deshalb sind in Tabelle 4 nur die Werte für die vier Quartale**, die Halbjahre und das Jahr angegeben.

Die — absolut genommen — größten Beträge von $\overline{B}$ ergeben sich meist im 850 oder 700 mb-Niveau, während darüber und darunter die Änderungen des Dampfgehaltes geringer sind. Überwiegend positive Werte von $\overline{B}$, also *Wasserdampfaufnahme*, ergeben sich im ozeanischen Dreieck, während die negativen Änderungen, also *Wasserdampfabgabe*, besonders im Winter in dem mehr nach dem Festland zu gelegenen Nordseedreieck erhebliche Beträge annehmen.

Wasserdampfvermehrung in der gesamten Lufthülle kann nur durch Verdunstung vom Erdboden bewirkt sein, während die Verminderung des Dampfgehaltes durch Kondensation zu flüssigem Wasser und Ausfallen von Niederschlag erfolgt. Integriert man die Werte $\overline{B}$ über die Höhe, so erhält man daher die Bilanz von Verdunstung V minus Niederschlag N im betrachteten Gebiet. Es ist

$$V - N = \int_0^\infty \overline{B}\, dz = \int (\overline{\partial \varrho_w / \partial t})\, dz + \int \overline{\mathfrak{v}\, \nabla_2 \varrho_w}\, dz + \int \overline{v_z\, \partial \varrho_w / \partial z} \cdot dz.$$

* Die Methode unterscheidet sich etwas von einer früher angegebenen [*12*], ist aber korrekter als diese; vgl. Anmerkung S. 148.

** Die Einteilung in die meteorologisch ungeeigneten Kalendervierteljahre ergab sich daraus, daß die englischen Wetterkarten nur quartalsweise gebunden zur Verfügung standen.

Tabelle 4. *Feuchtigkeitsbilanz [10^{-6} g/cm³ Monat] in der freien Atmosphäre.*

I. England, Nordsee, NW-Deutschland.

	1000 mb	850 mb	700 mb	500 mb
April bis Juni 1949	— 0,4	+ 10,6	+ 6,9	— 1,3
Juli bis September 1949	— 5,1	+ 1,2	+ 2,8	+ 0,1
Oktober bis Dezember 1949	— 6,3	— 15,9	— 1,7	— 2,9
Januar bis März 1950	— 13,5	— 4,2	— 2,0	— 2,2
April bis September 1949	— 2,8	+ 5,9	+ 4,8	— 0,6
Oktober 1949 bis März 1950	— 9,9	— 10,1	— 1,8	— 2,5
April 1949 bis März 1950	— 6,3	— 2,1	+ 1,5	— 1,6

II. NE-Atlantik.

April bis Juni 1949	+ 2,7	+ 3,2	+ 0,9	— 2,9
Juli bis September 1949	— 6,4	+ 4,0	+ 10,5	— 7,3
Oktober bis Dezember 1949	+ 7,3	+ 12,7	+ 9,8	— 2,3
Januar bis März 1950	— 0,6	+ 5,6	+ 11,9	+ 2,1
April bis September 1949	— 1,9	+ 3,6	+ 5,7	— 5,1
Oktober 1949 bis März 1950	+ 3,3	+ 9,1	+ 10,9	— 0,1
April 1949 bis März 1950	+ 0,7	+ 6,4	+ 8,3	— 2,6

Das letzte Glied ist gleich Null wegen des Verschwindens von v_z für $z = 0$ und von $\partial \varrho_w / \partial z$ für $z = \infty$. Man hat daher ohne Vernachlässigung

$$V - N = \int_0^\infty \overline{\partial \varrho_w / \partial t} \cdot dz + \int_0^\infty \overline{v \, \nabla_2 \, \varrho_w} \, dz, \tag{8}$$

wobei meist auch das erste Glied rechts außer acht gelassen werden darf.

Die nach Gl. (8) gewonnenen Werte gibt Tabelle 5 in Spalte 2 und 6. Ein sehr ausgesprochener Jahresgang zeigt sich für das halbkontinentale Dreieck. Im Sommer überwiegt die Verdunstung den Niederschlag, während im Winter die Verdunstung kleiner, der Niederschlag größer, $V - N$ also stark negativ wird. Das Maximum mag im Normaljahresgang, soweit man es nach diesem Einzeljahr beurteilen kann, im Mai liegen, das Minimum im Dezember. In der Jahressumme überwiegt der Niederschlag die Verdunstung um 76 mm.

Ganz entgegengesetzte Verhältnisse zeigt das ozeanische Dreieck. Hier hat das Sommerhalbjahr wesentlich niedrigere Werte als der Winter, was auf eine im Winter gegenüber dem Sommer besonders gesteigerte Verdunstung hindeutet. Auch in der Jahressumme ergibt sich ein Überwiegen der Verdunstung über den Niederschlag mit 255 mm.

Beim Vorhandensein von Niederschlagsbeobachtungen kann die Verdunstung selbst als Summe der Zahlen von $V - N$ und N abgeschätzt werden. Da beide Dreiecke größere Meeresgebiete enthalten, kann die Niederschlagsmenge nicht genau angegeben werden. Als Unterlagen dienten die Karten der Niederschlagssummen und Prozente vom Normalwert, die nach den „Climat"-Meldungen in den „Großwetterlagen Mittel-

Tabelle 5. *Gebietsverdunstung V, Niederschlag N und Differenz V — N von April 1949 bis März 1950. Angaben in mm.*

$V - N$ aus der Wasserdampfbilanz der freien Atmosphäre bestimmt; N nach [*13*]; V als Summe $(V - N) + N$. Spalte 5: Normalwerte der Verdunstung für das Flußgebiet der oberen Weser bis zur Diemelmündung, nach Friedrich [*14*].

	Nordsee			Weser	NE-Atlantik		
	$V - N$	N	V	V	$V - N$	N	V
April 1949	+ 24	41	65	36	+ 43	59	102
Mai	+ 29	50	79	86	+ 21	36	57
Juni	+ 27	17	44	86	— 59	38	(— 21)
Juli	+ 3	39	42	86	— 14	48	34
August	+ 21	62	83	67	+ 33	85	118
September	— 10	55	45	32	— 1	83	82
Oktober	— 54	90	36	18	+ 20	108	128
November	— 32	80	48	5	+ 72	80	152
Dezember	— 16	65	49	5	+ 23	91	114
Januar 1950	— 16	40	24	4	+ 46	67	113
Februar	— 26	100	75	9	+ 27	86	113
März	— 26	35	9	18	+ 44	44	88
2. Vierteljahr 1949	80	108	188	208	5	133	138
3. Vierteljahr 1949	14	156	170	185	18	216	234
4. Vierteljahr 1949	— 102	235	132	28	115	279	394
1. Vierteljahr 1950	— 68	175	108	31	117	197	314
Jahr	— 76	674	598	452	255	825	1080

europas" [*13*] veröffentlicht sind. Den Werten haftet natürlich eine gewisse Unsicherheit an, obwohl für die Bestimmung beide in den Karten angegebenen Zahlenwerte herangezogen wurden. Auch die Werte für $V - N$ sind noch mit Unsicherheit behaftet: Für Juni 1949 im Atlantikdreieck ergibt sich eine negative Verdunstung, weil zweifellos der auch sonst aus der Reihe fallende Wert $V - N = -59$ unrichtig ist*.

Der Gang der Vierteljahrssummen darf wohl als repräsentativ angesehen werden. Dann ergibt sich für das Gebiet der Nordsee und der umgebenden Kontinentalmassen das Maximum der Gebietsverdunstung im zweiten Vierteljahr und das Minimum im ersten Vierteljahr. Zum Vergleich sind in Spalte 5 die Zahlen angeführt, die Friedrich [*14*] für das Flußgebiet der oberen Weser gibt. Im Sommerhalbjahr sind die Werte der Verdunstung fast gleich groß, im Winter ist sie über dem die Nordsee umfassenden Gebiet etwa viermal so groß wie über dem Binnenlandgebiet. Das ist verständlich, denn durch Gefrieren des Bodens,

* Diese Abweichung hat ihre Ursache nicht in Rechenfehlern, sondern in der Aufteilung der individuellen Änderung in den lokalen und den advektiven Anteil in Verbindung mit der rechnerisch notwendigen Ersetzung der laufenden zeitlichen Integration durch die Summierung von Einzelwerten, die um 24 Stunden auseinanderliegen.

Schneebedeckung, Fehlen der Vegetation usw. wird über dem Land die Verdunstung erheblich herabgesetzt, während sie über den noch vom Golfstrom erwärmten Wasserflächen der Nordsee stark gesteigert ist, insbesondere wenn kalte wasserdampfarme Luftmassen die warme Wasserfläche überstreichen. In der Jahressumme ist die Verdunstung über der Nordsee 130% des Binnenlandbetrages.

Über dem ozeanischen Gebiet ist die Steigerung der Verdunstung im Winterhalbjahr noch wesentlich größer; der Jahresgang zeigt in dieser Jahreszeit sein Maximum, im Frühjahr das Minimum. Im ganzen sind die Beträge außerordentlich hoch, in der Jahressumme nahezu doppelt so groß wie über dem Nordseegebiet. Sie unterscheiden sich darin deutlich von den durch Albrecht [*11*] angegebenen Zahlen, der für Scilly 614, für Lerwik 412 mm/Jahr vermerkt. Dagegen stimmt die Lage des Maximums im letzten Vierteljahr recht gut mit Albrecht überein.

Zu einem Vergleich der hier bestimmten Werte der Gebietsverdunstung mit solchen, die auf dem üblichen hydrographischen Wege aus Abflußzahlen gefunden sind, ist die Lage der beiden Stationsdreiecke nicht günstig. Der Vergleich soll deshalb in einem weiteren, ganz über dem Festland gelegenen Stationsdreieck durchgeführt werden. Es dürfte aber aussichtsreich sein, das Verfahren weiter auszubauen und die Fehlerquellen zu verringern, eventuell durch Heranziehung der mehrmals täglich durchgeführten Radiosondenaufstiege. Dadurch ergibt sich die Möglichkeit, die Gebietsverdunstung *für einzelne Monate* oder wenigstens Vierteljahre zu bestimmen, was bisher bei Verwendung von Abflußzahlen der Flüsse nicht möglich war, weil die unbekannten Daten der Wasserspeicherung im Boden eingingen. Etwas Analoges gibt es in der Atmosphäre nicht, bzw. die Wasserdampfspeicherung ist mit dem Wasserdampfgehalt meßbar.

Literaturverzeichnis.

1. Defant, A.: Geogr. Annaler **3**, 209 (1921).
2. Möller, F.: Meteorol. Rundschau **3**, 97 (1950).
3. — Beitr. Phys. fr. Atm. **22**, 46 (1934).
4. — Long-wave Radiation. Compendium of Meteorology (im Druck); Experientia **6**, 361 (1950).
5. Albrecht, F.: Ber. Dtsch. Wetterd. US-Zone Nr. 17, Bad Kissingen 1950.
6. Priestley, C. H. B.: Quart. J. R. Met. Soc. **75**, 28 (1949).
7. Lettau, H.: Atmosphärische Turbulenz, Leipzig 1937. — R. D. Elliott und T. B. Smith, J. Meteorol. **6**, 67 (1949).
8. Defant, F.: Arch. Met. Geoph. Biokl. *A* **2**, 184 (1950).
9. Möller, F.: Meteorol. Z. **52**, 408 (1935).
10. Tägl. Wetterber. Dtsch. Wetterd. US-Zone, Bad Kissingen; Daily Weather Report London, Aerol. Sect.
11. Albrecht, F.: Wiss. Abhandl. R. f. W. **8**, Nr. 2, Berlin 1940.
12. Möller, F.: Ann. Meteorol. **4**, (im Druck), (1951).
13. Die Großwetterlagen Mitteleuropas, herausgegeben vom Dtsch. Wetterd. US-Zone, Bad Kissingen.
14. Friedrich, W.: Hydrographie. Naturf. u. Medizin in Deutschland 1939—1946, **18**, 215, Wiesbaden 1948.

551.513 : 551.557

(Aus dem Institut für Meteorologie und Geophysik der Universität Innsbruck.)

Die Änderungen des meridionalen Windprofils durch Kondensationswärme und Turbulenzvorgänge.

Von

F. Defant.

Mit 8 Textabbildungen.

Zusammenfassung: Siehe Abschnitt VI.

Summary. The mean meridional profile of temperature (up to 11 km.) can be considered essentially as an effect of vertical and horizontal mixing processes, of condensation processes in the troposphere, and of the radiation balance. The theoretical solution for the distribution of the mean potential temperature in the meridional section makes it possible to establish qualitatively and quantitatively the different factors determining the temperature profile. This paper gives an interpretation of the influence of these factors, theoretically and by calculating 6 special cases in which the factors are varied. The influence of the distribution of condensation heat in meridional direction appears to be decisive for the intensification of the jet stream in the upper troposphere.

Résumé. On peut considérer le profil méridien de température (jusqu'à 11 km.) essentiellement comme une résultante du processus de mélange vertical et horizontal et des phénomènes de condensation de la troposphère, ainsi que du bilan radiatif.

Le calcul théorique de la répartition de la température potentielle moyenne dans le profil méridien rend possible l'appréciation qualitative et quantitative de l'effet de chaque facteur déterminant l'allure de ce profil. Dans le présent article, l'étude théorique et la calcul de six cas particuliers permettent de mettre en évidence l'effet des différents facteurs en faisant varier ceux-ci.

L'effet de la distribution de la chaleur de condensation dans le plan méridien apparaît comme décisif pour le renforcement du «jet stream» de la haute troposphère.

I. Einleitung.

In einer früheren Untersuchung [*1*] konnte gezeigt werden, daß sich das mittlere meridionale Temperaturprofil (bis 11 km) im wesentlichen

als ein Effekt der vertikalen und horizontalen Durchmischungsprozesse (turbulenter Wärmeaustausch) und der in der Troposphäre auftretenden Kondensationsvorgänge erklären läßt. In dieser ersten Arbeit war die Ein- bzw. Ausstrahlung nur insofern berücksichtigt worden, als der mittlere meridionale Temperaturzustand am Erdboden vorgegeben und der Wärmegewinn bzw. -verlust durch Strahlung in der freien Atmosphäre als vernachlässigbar angesehen wurde. Eine weitere Arbeit [2] beseitigte durch Einbeziehung der Strahlungsbilanz diese Vernachlässigung und führte auch zur Ermittlung eines verständlichen Wärmehaushaltes der Troposphäre im Meridionalschnitt. Die theoretische Lösung für die Verteilung der potentiellen Temperatur im Meridionalschnitt lautet:

$$\Theta = M + \left(\gamma - \frac{\overline{Ko(z)} + \overline{Bi(z)}}{c_p A_\vartheta}\right) z + \sum_n \left\{ N_n e^{-\alpha_n z} + \right.$$
$$\left. + \frac{a^2}{c_p A_\vartheta} (u_n + v_n \cdot z) \right\} P_n. \quad (1)$$

z = vertikale Koordinate, ϑ = Poldistanz $(90° - \varphi)$.
M = Mittelwert der potentiellen Temperatur am Erdboden (holosphärisches Mittel).
N_n = Faktoren der Entwicklung der vorgegebenen Temperaturverteilung am Erdboden in zonale Kugelfunktionen P_n bis zum n-ten Gliede.
γ = trockenadiabatischer Temperaturgradient (zirka 1° C/100 m).
c_p = spezifische Wärme bei konstantem Druck.
A_z = vertikaler Austauschkoeffizient.
A_ϑ = horizontaler (meridionaler) Austauschkoeffizient.
$\overline{Ko(z)}$ = Mittelwert der Verteilung der mittleren Kondensationswärme $Ko(z)$.
$\overline{Bi(z)}$ = Mittelwert der mittleren Strahlungsbilanz $Bi(z)$.
[$Ko(z)$ und $Bi(z)$ als Mittel für die ganze Nordhalbkugel] in [1] $= m(z)$.
a = Erdradius.
u_n und v_n = Konstanten.

Für die Auswertung der theoretischen Lösung (1) wurden folgende Werte gewählt:

$$\left.\begin{array}{l} A_z = 106{,}3 \text{ g cm}^{-1} \text{ sec}^{-1},\ A_\vartheta = 5 \times 10^7 \text{ g cm}^{-1} \text{ sec}^{-1},\ c_p = \\ = 0{,}2405 \text{ cal g}^{-1} \text{ grad},\ \overline{Bi(z)} = +\,0{,}4004 \times 10^{-3} \text{ cal sec}^{-1} \text{cm}^{-2}, \\ \overline{Ko(z)} = +\,1{,}067 \times 10^{-3} \text{ cal sec}^{-1} \text{ cm}^{-2}. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Zu diesen tritt die Entwicklung der meridionalen Temperaturverteilung am Erdboden in zonale Kugelfunktionen (pot. Temp., ° C abs.):

$$\left.\begin{array}{l} \Theta = M + N_2 \cdot P_2 + N_4 \cdot P_4 + N_6 \cdot P_6 + N_8 \cdot P_8 + N_{10} \cdot P_{10} + \\ \qquad + N_{12} \cdot P_{12} = \\ = 291{,}54 - 25{,}57 \cdot P_2 - 4{,}38 \cdot P_4 - 1{,}39 \cdot P_6 - 1{,}28 \cdot P_8 + \\ \qquad + 1{,}21 \cdot P_{10} - 0{,}23 \cdot P_{12} \end{array}\right\} \quad (3)$$

und die Entwicklung der meridionalen Niederschlagsverteilung in zonale Kugelfunktionen (cm/Jahr):

$$\left.\begin{aligned}\text{Niederschlag} = +\,97{,}0 - 75{,}9\,P_2 + 17{,}4\,P_4 - 71{,}1\,P_6 + \\ + 58{,}4\,P_8 - 29.9\,P_{10} + 14{,}1\,P_{12}.\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Aus dieser Niederschlagsverteilung lassen sich alle u_n- und v_n-Werte bestimmen:

$$\left.\begin{aligned} &u_2 \text{ bis } u_{12} = 0, \\ &v_2 = -5{,}210 \times 10^{-16}, \qquad v_8 = +3{,}342 \times 10^{-17}, \\ &v_4 = +3{,}588 \times 10^{-17}, \qquad v_{10} = -1{,}120 \times 10^{-17}, \\ &v_6 = -6{,}974 \times 10^{-17}, \qquad v_{12} = +3{,}730 \times 10^{-18}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Eine neuerliche exakte Durchrechnung unter Verwendung der Zahlenwerte (2) bis (5) ergab als Resultat einen Meridionalschnitt der potentiellen Temperatur, der von dem aus den Beobachtungen ermittelten Meridionalschnitt (Palmèn, Ramanathan, A. Wagner) in allen Höhen und Breiten Abweichungen $< 1°$ C zeigte. Dies ist ein vorzügliches und befriedigendes Resultat.

Die potentielle Temperaturverteilung [s. Lösung (1)] setzt sich zusammen aus:

1. einem konstanten Wert M der potentiellen Temperatur für alle Höhen und in jeder Breite;

2. einer linearen *breitenunabhängigen* Zunahme der potentiellen Temperatur mit der Höhe in der Form

$$\left(\gamma - \frac{\overline{Ko(z)} + \overline{Bi(z)}}{c_p A_z}\right) z = +0{,}426°/100\,\text{m}$$

(normale Temperaturabnahme $-0{,}574°/100$ m), die nur abhängig vom vertikalen Austausch A_z und den Mittelwerten der mittleren Kondensationsverteilung bzw. Verteilung der Strahlungsbilanz (Ein—Aus) ist (s. dazu ausführliche Darlegung in [2]);

3. einer e-potenzförmigen Abnahme der potentiellen Temperatur mit der Höhe gemäß dem Koeffizienten α_n, der vom Verhältnis der Austauschgrößen A_ϑ/A_z abhängt und sich mit der Breite entsprechend den zonalen Kugelfunktionen P_n ändert.

4. einer Wirkung der meridionalen Unterschiede der in der Troposphäre freiwerdenden Kondensationswärme bzw. Strahlungsbilanz. Erstere resultiert aus der meridionalen Verteilung der Niederschlagsmengen (in Abweichung vom Jahresmittel + 97,0 cm/Jahr). Dieser gesamte Teil der Lösung ist in charakteristischer Weise nur vom meridionalen Austausch A_ϑ abhängig.

Die Hauptrolle für die Lösung spielt dabei das Glied P_2, für welches v_2 weitaus am größten ist und somit als Funktion der Höhe starke Beiträge zur potentiellen Temperatur liefern kann. Schon allein unter Berücksichtigung dieses Gliedes und unter Vernachlässigung aller weiteren Glieder entsteht ein potentielles Temperaturprofil, das nur in den unteren Schichten und in den hohen bzw. niedrigen Breiten etwas größere Ab-

weichungen vom beobachteten Profil zeigt. Jedoch bleiben auch diese Abweichungen $< 5°$ C, was an sich noch kein sehr beachtlicher Fehler ist.

Die Theorie ist somit imstande, das mittlere meridionale Temperaturprofil zu erklären. Sie berücksichtigt die mittlere Temperaturverteilung am Boden, die eine Folge des Gleichgewichts zwischen Ein- und Ausstrahlung am Boden ist, den aus der meridionalen Niederschlagsverteilung resultierenden Wärmegewinn an latenter Kondensationswärme und den Gewinn bzw. Verlust an Wärme durch die Strahlungsbilanz (Ein—Aus) innerhalb der Troposphäre. Sie berücksichtigt ferner die Wirkung der turbulenten Wärmeleitung mit den größenordnungsmäßig verschiedenen Austauschkoeffizienten, die die vorstehend genannten Wärmegewinne bzw. -verluste in vertikaler und meridionaler Richtung transportiert.

II. Berechnung des meridionalen Windprofils.

Die meridionale Temperaturverteilung gestattet es, bei vorgegebener Druckverteilung am Erdboden unter Anwendung der statischen Grundgleichung (barometrische Höhenformel) die entsprechende meridionale

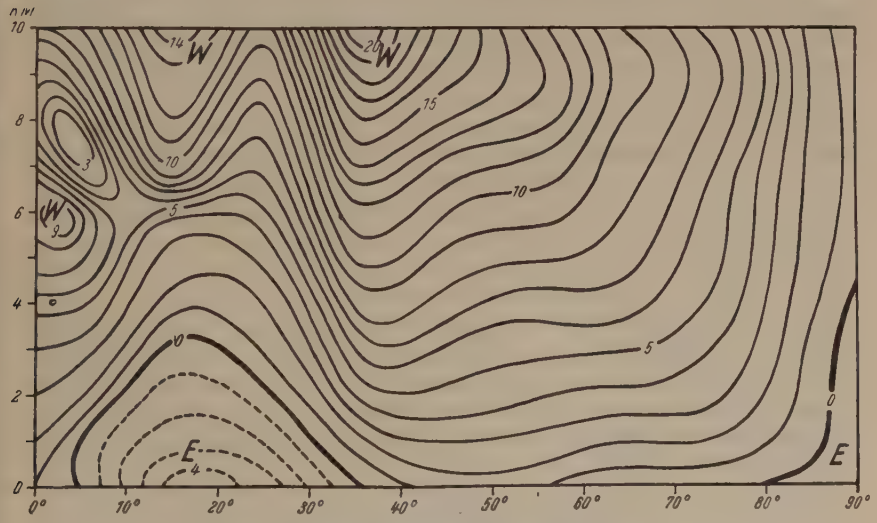


Abb. 1. Mittleres meridionales Windprofil (m/sec).
Ausgezogene Linien = Westwind.
Gestrichelte Linien = Ostwind.

Druckverteilung zu rechnen. Mit dieser und der mittleren Temperaturverteilung läßt sich auch die mittlere Dichte im Meridionalschnitt bestimmen und schließlich kann man mit Hilfe der berechneten Druckgradienten zwischen zwei Breiten in meridionaler Richtung und in allen Höhen eine Auswertung der geostrophischen Windformel vornehmen. Eine solche Bestimmung des meridionalen Windprofils zeigt die Abb. 1. Sie stellt

durch positive Werte (m/sec) Westwind, durch negative Werte Ostwind dar. Letzterer tritt zwischen 35° und 10° Breite auf und nimmt mit der Höhe ab. Er endet in 3 bis 4 km Höhe. Dies ist die Passatwindzone. Eine weitere schwache Andeutung von Ostwind ist auch in den untersten Kilometern zwischen 80° und dem Pol zu erkennen und deutet die polare Ostwindzone an, die für einen mittleren Wind- bzw. Temperaturschnitt nicht stärker in Erscheinung treten kann. Jedoch zeigen die darüber vorhandenen schwachen Westwinde an, daß im speziellen Fall diese Ostwinde sowohl weiter südlich als 80° als auch höher vorhanden sein und auch hinaufreichen können. Das übrige Feld des meridionalen Windschnittes zeigt Westwind, der mit der Höhe zunimmt. Eine Konzentration des Westwindes in 35° bis 40° Breite mit Stärken von über 20 m/sec in 10 km Höhe zeigt die bekannte Erscheinung des „Jet stream". Das weitere Maximum des Westwindes weiter südlich in 7 bis 11 km Höhe ist eine Ausweitung des Jet stream nach Süden, die auf fast allen beobachteten Windprofilen angedeutet ist ([*3*], s. Fig. 7, Windprofil über Nord- und Zentralamerika nach Seymour L. Hess). Die teilweise Zweiteilung des Jet stream ist ebenfalls in Meridionalschnitten beobachtet worden ([*4*], s. Fig. 17 und S. 270). Besonders deutlich markiert sich auch der starke Abfall des Westwindes von 35° Breite äquatorwärts bis 25° (scharfe Südgrenze des Jet stream). Dagegen nimmt der Westwind nur langsamer und stetig gegen den Pol zu ab. Bemerkenswert ist auch der in 4 bis 6 km Höhe über den äquatorialen Breiten vorhandene Westwind, doch wird dort eine Anwendung der geostrophischen Windformel problematisch. Dieser obere Westwind ist jedoch durch die Beobachtung nachgewiesen (Struktur der Passate nach Kuhlbrodt, s. Hann-Süring, Lehrbuch der Meteorologie, 5. Aufl., S. 641). So gibt das errechnete Windprofil die bekannten Grundzüge der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre wieder.

Der Aufbau dieses mittleren Windprofils wird durch die turbulente Wärmeübertragung in vertikaler und horizontaler Richtung sowie durch die Kondensationswärme bzw. die meridionale Niederschlagsverteilung und die Strahlungsbilanz in der Troposphäre bestimmt. Diese Größen fixieren die Konzentration des Westwindes auf ein schmales Band in den höheren Troposphärenschichten der mittleren Breiten, also den Jet stream.

III. Problemstellung.

Das Windprofil ist somit eine Folge aller vorstehend erwähnten Größen. Variiert man diese Größen, so ändert sich entsprechend dem Lösungsausdruck (1) das mittlere Profil der potentiellen Temperatur und damit die Druck- und Windverteilung. Es erhebt sich nun die Frage, inwieweit die Veränderung einzelner Größen das Windprofil in entscheidender Form abzuwandeln vermag und welchen von den Faktoren entscheidender Einfluß für die Gestaltung des meridionalen Windprofils bzw. im besonderen des Jet stream zugeschrieben werden muß. Die Klärung dieser Fragen soll im folgenden versucht werden.

IV. Diskussion der Wirkung der einzelnen Faktoren.

1. Variation des vertikalen Austauschkoeffizienten A_z.

Der vertikale Austauschkoeffizient A_z besitzt nach allen bisherigen Untersuchungen, abgesehen von einer Grundschicht vom Boden bis 1 km, eine mehr oder weniger ausgeprägte Konstanz seines Wertes. Meist werden Werte um 100 g cm^{-1} sec^{-1} genannt. Eine allgemeine extreme Schwankungsweite von 50 bis 200 darf als gesichert gelten [5]. Ändert man in der Lösung den Wert von A_z, so ändert sich einerseits das *mittlere* vertikale Temperaturgefälle, anderseits die Größe α_n, wobei $\alpha_n^2 = n\,(n+1)\,\frac{1}{a^2}\cdot\frac{A_\vartheta}{A_z}$ ist. Einer Zunahme von A_z entspricht eine Verkleinerung des mittleren vertikalen Temperaturgefälles. Das bedeutet, daß die höheren Schichten wärmer werden. Einer Abnahme von A_z entspricht eine Vergrößerung der mittleren Abnahme der Temperatur mit der Höhe, d. h. die höheren Schichten werden kälter. Dies ist an sich verständlich, da eine Steigerung von A_z Wärme nach oben transportiert. Dieser Einfluß von A_z modifiziert also nur die mittlere Temperaturschichtung innerhalb der Troposphäre, bedeutet aber keine Breitenunterschiede der Temperatur und ist somit für die Erzeugung meridionaler Druckunterschiede bzw. für die Erzeugung einer Windkonzentration (Jet-stream-Phänomen) nicht maßgebend. Nur durch seinen Einfluß auf die Größe des Wertes α_n gewinnt der vertikale Austausch A_z auch Einfluß auf die meridionalen Temperatur- und Druckunterschiede. Die Größe α_2 (diese ist wegen der Form der Kugelfunktion P_2 die wichtigste zur Erzeugung meridionaler Temperaturunterschiede) nimmt von einem Wert $0{,}385 \times 10^{-5}$ bis zu einem Wert $0{,}192 \times 10^{-5}$ ab, wenn man bei konstantem meridionalem Austauschkoeffizienten $A_\vartheta = 5 \times 10^7$ den Wert A_z von 50 bis 200 steigert. Das entsprechende Glied der Lösung [1], in welchem α_2 enthalten ist, lautet $N_2 \cdot e^{-\alpha_2 z} \cdot P_2$. Da die e-Potenz für diese Werte α_2 rasch mit der Höhe abnimmt, ist der Einfluß in meridionaler Richtung in den höheren Schichten trotz des hohen Wertes $N_2 = -25$, 57° C am Boden relativ unbedeutend. Auch dieser Einfluß von A_z kann nicht für die Erzeugung starker Winde in den oberen Troposphärenschichten verantwortlich sein. Lediglich in den unteren Kilometern entstehen meridionale Temperaturunterschiede, die wegen des Vorzeichens von P_2 eine Temperaturerhöhung am Äquator (+12,78°) und eine Temperaturerniedrigung am Pol (—25,57°) zeigen. So klein also der Einfluß von A_z für meridionale Unterschiede der Temperatur in den oberen Schichten der Troposphäre ist, um so bedeutender ist sein Einfluß auf die *mittlere* Abnahme der Temperatur mit der Höhe (s. Tabelle 1). Eine Variation von A_z kann somit zur Klärung der Fragen der Jet-stream-Entstehung wenig beitragen und führt nur zu einer von den wirklichen Verhältnissen abweichenden *mittleren* Abnahme der Temperatur mit der Höhe, die doch in allen Fällen mehr oder weniger nahe am Wert von —0,6°/100 m bleibt. Über die Möglichkeit einer Schwankung von A_z soll später noch diskutiert werden (s. S. 162).

2. Variation des mittleren Niederschlags der Erde.

Der mittlere Niederschlag auf der Erde beträgt zirka 100 cm Jahr. Unterzieht man die mittlere meridionale Niederschlagsverteilung der Nordhalbkugel einer exakten Kugelfunktionsanalyse (s. [2]), so erhält man einen Mittelwert von 97 cm Jahr. Daß dieser Mittelwert großen Schwankungen nicht unterliegen kann, ist wohl selbstverständlich, trotzdem soll eine Schwankungsweite von 60 bis 120 cm Jahr angenommen werden. Aus dem *mittleren* Jahresniederschlag wird die der Troposphäre zukommende Kondensationswärme $Ko\,(z)$ berechnet und damit tritt der mittlere Niederschlag im Gliede $\left(\gamma - \frac{Ko\,(z) - Bi\,(z)}{c_p A_z}\right)$ der Lösung (1) auf. Dieses Glied bedeutet die mittlere Abnahme der Temperatur mit der Höhe, die sich im Falle $A_z = 106{,}3$ und $Ko\,(z) - Bi\,(z) = 1{,}47 \times 10^{-5}$ cal sec^{-1} cm^{-2} mit einem der Wirklichkeit entsprechenden Wert von $-0{,}574°$ C/100 m errechnet [2]. Für eine Variation von A_z und des mittleren Niederschlages ergeben sich die in Tabelle 1 enthaltenen Temperaturgradienten (pro 100 m):

Tabelle 1.

Niederschlag / A_z	60	97	120 cm/Jahr
	$0{,}97 \times 10^{-5}$	$1{,}47 \times 10^{-5}$	$1{,}81 \times 10^{-5}$ cal sec^{-1} cm^{-2}
50	**−0,807°**	−1,220°	−1,51°
106,3	−0,380°	**−0,574°**	−0,708°
200	−0,202°	−0,305°	**−0,376°**

Man sieht, daß eine Erhöhung bzw. Erniedrigung des mittleren Niederschlages eine stärkere bzw. schwächere Abnahme der Temperatur mit der Höhe ergibt. Eine Steigerung des Niederschlages bzw. der Kondensationswärme in allen Schichten geht immer parallel mit einer Steigerung des vertikalen Austausches, eine Verminderung des Niederschlages mit einer Abnahme des vertikalen Austausches. Somit kommt von den Variationen der Tabelle 1 nur die Diagonalreihe von links oben nach rechts unten (dick umrandet) in Frage und man erkennt, daß diese Werte zwischen $-0{,}8$ und $-0{,}4°$ C/100 m liegen und somit der Wirklichkeit entsprechen. Es ist daher eine Koppelung von zugeführter mittlerer Kondensationswärme in der gesamten Troposphäre und vertikalem Austausch vorhanden, da für die Herstellung der *mittleren* Abnahme der Temperatur mit der Höhe nur das Verhältnis $Ko\,(z) : A_z$ in die Lösung (1) eingeht. Die konstante mittlere Abnahme der Temperatur in der Troposphäre ist hinreichend erforscht und bekannt. Schwankungen in der mittleren Niederschlagsmenge der ganzen Erde spielen also, genau so wie solche von A_z, für eine Intensivierung bzw. Abschwächung des Jet steam keine wesentliche Rolle.

2. Variation der konstanten (zweiter) Ableitungskoeffizienten A_k.

Der konstante (d. h. zeitlich konstante) Ableitungskoeffizient A_k kann nach 1. Lösung (5) größenordnungsmäßig um $\delta / 10^k$ ungenauer werden, wenn δ die Ungenauigkeit mit der $\delta / 10^k$ im $\delta / 10^k$ gemacht werden. Wenn der letzte konstante Wert $\delta / 10^k$ war, muß δ gemacht werden, wenn der letzte konstante Wert $\delta / 10^k$ war, muß δ gemacht werden. Wenn man also A_k in zweifacher Weise variiert, kann man A_k in zweifacher Weise variieren. Eine Variation von A_k ändert nämlich wieder die Größe x_k, die $x_k^2 - x_{k-1} x_{k+1}$ ist. Ändert man A_k in Größe $x^2 = x_k$, A_k der letzte Faktor der Lösung (1) und Δx_k von $\delta / 10^k$ bis $\delta / 10^k$, so nimmt x_k die wichtigsten Werte x_k Werte von $\delta / 10^k$ und $\delta / 10^k$ an. Man erkennt, daß man auf einfachste numerische Ausgangsbedingungen $x_k \gg \delta / 10^k$ durch die langsame Änderung der x-Größe und die Größe von β_k in Größe $\beta_k = \text{const}$ β_k in der Lage ist, größere Temperaturunterschiede Δ genau — β in der Größe x_k einzuregeln und so während x_k einen Zustand der ungestörten Lösung herzustellen. Dies ist auch verständlich, denn ein einzelner numerischer Ausdruck bedeutet, daß ein gewisser Transport von Wärme in numerischer Richtung erfolgt und daher der Temperaturunterschied Δ genau — β vermindert wird. Dagegen kommt bei numerischem Ausdruck die x-Größe nur über β in Größe x_k in Größe x_k in der Größe x_k einzuregeln, daß nur in der Größe eine numerischen Temperaturunterschied erzeugt wird, weil die Wärme durch numerischen Ausdruck transportiert wird und Temperaturunterschiede Δ genau — β ausgleicht.

Der Einfluß von A_k in Größe x_k A_k ist leichter zu übersehen. Ist A_k groß, so wird dieses Glied klein und umgekehrt. Diese Variation in der Temperatur **störende Wärme durch das letzte Glied der Lösung (1)**. Der in Betracht kommende und mit diesem Faktor multiplizierte wird bei großem A_k verkleinert bzw. bei kleinem A_k vergrößert. Da dieses letzte Glied ebenfalls mit der Eigenfunktion β_k zu multiplizieren ist, vergrößert ein kleines A_k die Temperaturunterschiede Δ genau — β in allen Punkten und umgekehrt verkleinern sich große A_k Werte. Also genaue Werte wie früher.

Eine Zunahme von A_k wirkt im ersten Glied der Lösung (1) gleichartig wie eine Abnahme von A_k. Abnahme der Größe der Temperatur in der Größe Richtung und eine Abnahme von A_k gleichartig wie eine Zunahme von A_k (Vergrößerung der Größe Größe — β, also Verringerung).

Da die Änderung von A_k wegen ihrer Kopplung mit dem zweiten Lösungsglied und der zeitlichen Änderung der Temperatur mit der Größe nur numerisch ausgeführt werden kann und da Größe x_k und mit der die β-Funktion-Änderung in Größe $x_k = \text{const}$ β_k eine Größe Temperaturunterschiede haben, wenn A_k einen Wert $\delta / 10^k$ und die Variation $A_k A_k$ mehrere Größenordnungen ändern kann, so müssen sich einige Regelmäßigkeiten angeben lassen, die sich auf die Wirkung von A_k im Falle x_k, A_k und auf das letzte Glied der Lösung (1).

4. Variation der meridionalen Verteilung des Niederschlages.

Das letzte Glied der Lösung (1) enthält den Einfluß der meridionalen Unterschiede des Jahresniederschlages. Die Größe der Konstanten v_n (wenn u_n am Boden gleich 0 gewählt wird) enthält diesen Einfluß. Sie ist errechnet aus der Kugelfunktionsentwicklung der Niederschlagsverteilung [s. Gl. (4)], von welcher jeder Faktor der Kugelfunktionen P_2 bis P_{12} die entsprechenden v_n zu errechnen gestattet (über die Methodik der Bestimmung der v_n-Werte s. [*1*] und [*2*]). Die Verteilungen $v_n \cdot z \cdot P_n$ stellen dann die der Troposphäre durch die Kondensation der meridionalen Unterschiede des Niederschlags (*in Abweichung vom Mittel* 97 cm/Jahr) zukommenden Wärmemengen dar. In [*1*] wurde gezeigt, daß diese Glieder im allgemeinen Mittel mit der Höhe bis zirka 8 km linear entsprechend $v_n \cdot z$ zunehmen und dann bis zirka 11 km abnehmen. Ihre Berücksichtigung ist notwendig, da die e-potenzartige Abnahme der Temperaturunterschiede Äquator—Pol mit der Höhe die wahren Verhältnisse in der Troposphäre nicht anzunähern vermag und besonders in den höheren Troposphärenschichten beträchtliche Abweichungen von der beobachteten Temperaturverteilung bedingen würde.

Eine Steigerung der Niederschlagsunterschiede Äquator—Pol ergibt größere v_n-Werte und wegen der Form von P_2 besonders in den oberen Troposphärenschichten einen größeren Temperaturunterschied Äquator—Pol, also auch ein verstärktes Windprofil. Der gegensätzliche Effekt ist in gleicher Weise verständlich. Man kommt zu dem Schluß, daß die Größe dieser Schwankungen in der meridionalen Niederschlagsverteilung durch die freiwerdende Kondensationswärme innerhalb der Troposphäre besonders wichtig für die Erzeugung des Jet-stream-Phänomens ist und bei der Form des letzten Gliedes der Lösung (1) nicht allein durch den P_2-Anteil beträchtliche Temperaturunterschiede Äquator—Pol hervorzurufen vermag, sondern auch durch die Form der weiteren Glieder P_4 bis P_{12} dafür maßgeblich mitwirkt, über welcher Breite sich das Windmaximum der oberen Troposphäre einstellt. In den Größen v_n sind aber auch alle jene Wärmeanteile enthalten, die sich aus Unterschieden der Wärmebilanz mit der geographischen Breite ergeben. Solche sind zwar in Abweichung von der *mittleren* Strahlungsbilanz in der freien Troposphäre nicht groß. Letztere wurde schon bei der Bestimmung der mittleren Temperaturabnahme mit der Höhe voll berücksichtigt.

Die Multiplikation dieser Glieder, die in der Hauptsache von der meridionalen Niederschlagsverteilung in Abweichung vom Jahresmittel herrühren, mit dem Faktor $a^2/c_p \cdot A_\vartheta$ bewirkt weiter, daß die Kondensationswärme, die in breitenmäßiger Differenzierung der Troposphäre zugeführt wird, durch die Wirkung von A_ϑ meridional verfrachtet wird. Bei großem A_ϑ werden diese Wirkungen verkleinert und der Jet stream geschwächt, bei kleinem A_ϑ können sie gewaltig gesteigert werden und der Jet stream erscheint wesentlich verstärkt.

So übersieht man an Hand der vorstehenden Ausführungen die Mechanik der Wirkungsweise aller Faktoren der Lösung (1) recht klar.

Eine genauere Abschätzung aber, und diese ist besonders interessant und wünschenswert, kann im Anschluß an diese Diskussion nur noch die exakte Durchrechnung des Temperatur-, Druck- und Windprofils für einzelne besonders wirksame Variationen der Austauschkoeffizienten sowie der meridionalen Niederschlagsverteilung liefern.

V. Ergebnisse der Berechnung einzelner Fälle.

Die der Wirklichkeit entsprechenden Bilder des mittleren Zustandes der Temperatur und des Druckes in der Troposphäre bis 10 km Höhe darf ich als bekannt voraussetzen. Sie sind allen einschlägigen Werken der Meteorologie zu entnehmen. Das mittlere Windprofil ist eingangs

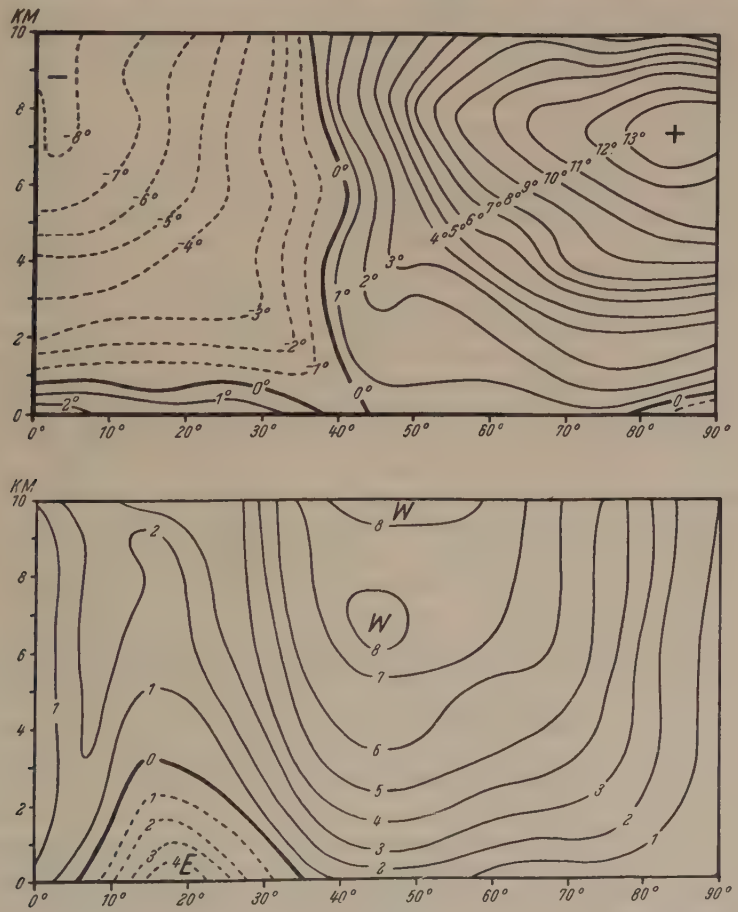


Abb. 2. *Fall 1* (meridionale Niederschlagsverteilung ausgeglichen überall 97 cm/Jahr).
Oben: Abweichungen der theoretisch ermittelten Temperaturverteilung von der wahren mittleren meridionalen Verteilung.
Unten: Theoretisch ermitteltes Windprofil (m/sec). West- und Ostwind wie in Abb. 1.

in Abb. 1 abgebildet. In der Literatur sind mittlere Profile nur in der „Physikalischen Hydrodynamik“ von V. Bjerknes und seinen Mitarbeitern zu finden, sonst sind nur Meridionalschnitte der Windverteilung für einzelne Zeiträume und für verschiedene Meridiane in größerer Zahl vorhanden.

Der *Fall 1* behandelt die Verhältnisse gleichförmigen Niederschlages auf der ganzen Erde. Überall zwischen Äquator und Pol sei der Jahresniederschlag von 97 cm/Jahr, der dem mittleren Jahresniederschlag der ganzen Erde entspricht, vorhanden. A_z sei 106,3, $A_\vartheta = 5 \times 10^7$, also die Normalwerte der Austauschkoeffizienten. Die Abweichung des unter diesen Voraussetzungen nach der Theorie errechneten Temperaturprofils vom wahren mittleren meridionalen Temperaturprofil sowie das Windprofil sind in Abb. 2 dargestellt.

Eine Ausgleichung des Niederschlages in meridionaler Richtung bedeutet eine Hebung der Niederschlagshöhen in den polaren, eine Senkung derselben in den äquatorialen Gebieten. Dies bedeutet eine starke Zufuhr von Wärme (zirka $+13°$) in den hohen und einen Entzug von Wärme (zirka $8°$) in den niederen Breiten der Erde. Aus der Abb. 2 ist dieser Effekt deutlich erkennbar. Besonders stark ist dieser Einfluß in den oberen Kilometern der Troposphäre. Damit kann man erwarten, daß auch der Jet stream im Windprofil eine Schwächung erfährt. Das in Abb. 2 dargestellte Windprofil zeigt, daß die Jet-stream-Geschwindigkeit im Vergleich zu Abb. 1 von 20 m/sec auf 8 m/sec herabgeht. Der Jet stream ist nicht nur geschwächt, sondern hat sich um volle 10 Breitengrade (von $35°$ bis $45°$) nordwärts verlagert. Auch ist er teilweise in seiner Höhe herabgesetzt. Besonders auffällig ist, daß seine scharfe Geschwindigkeitsbegrenzung an seinem Südrand erheblich aufgelockert ist. Die Merkmale der Passatzone sind jedoch geblieben und dies beweist, daß diese eine Folge der unteren, durch geänderte Niederschlagsbedingungen bzw. Kondensationsbedingungen nicht gestörten Schichten der Troposphäre sind. Die Kondensationswärme wandelt das Temperaturprofil in der Hauptsache in den oberen Kilometern der Troposphäre ab, wobei der turbulente Wärmeaustausch mitspielt, und beeinflußt so die Windverhältnisse dieser Schichten.

Der *Fall 2* behandelt den Fall gänzlichen Fehlens von Niederschlag. Entsprechend dem ersten Fall sind wieder die Temperaturabweichung vom wahren Profil der Temperatur sowie das Windprofil in Abb. 3 dargestellt. Das Ausbleiben jeglicher Wärmezufuhr durch Kondensation muß sich, wie Abb. 3 zeigt, in einer enormen Abkühlung der gesamten Troposphäre auswirken. Stärker als die an und für sich niederschlagsarmen polaren Gebiete werden die niederschlagsreichen äquatorialen Gebiete abgekühlt, was seinen Ausdruck in der Schiefstellung der Linien der Temperaturanomalien vom Äquator abfallend gegen den Pol findet. Dieser letztere Umstand ist es, der seinen Einfluß auf das Windprofil hat und eine Abschwächung des Jet stream (bis 8 m/sec) ausmacht, die in ihrem Ausmaß und ihren Merkmalen ähnlich derjenigen des Falles 1 ist. Die Gesamtabkühlung der Troposphäre hätte hierfür

keine entscheidende Bedeutung. Sie ist durch die verstärkte Abnahme der Temperatur mit der Höhe bedingt. Aber die Breitenänderung des Niederschlages und damit die breitenunterschiedliche Zufuhr von Kondensationswärme bzw. in diesem Falle deren Ausbleiben ist es, was die

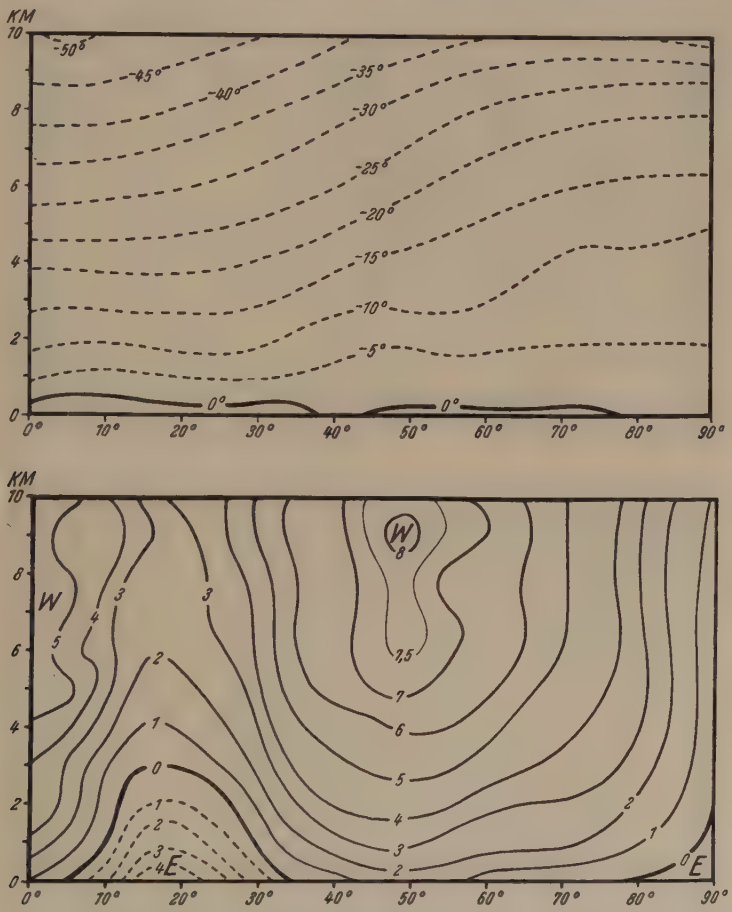


Abb. 3. *Fall 2* (überhaupt kein Niederschlag).
Oben: Abweichungen der theoretisch ermittelten Temperaturverteilung von der wahren mittleren meridionalen Verteilung.
Unten: Theoretisch ermitteltes Windprofil (m/sec). West- und Ostwind wie in Abb. 1.

Form des oberen Geschwindigkeitsmaximums abwandelt und in diesem Fall schwächt. Dieser Fall hat jedoch wegen der Unmöglichkeit seines Eintretens rein informatorischen Charakter.

Wesentlich interessanter ist der *Fall 3*. Hier wird der mittlere Niederschlag beibehalten (97 cm/Jahr), der Niederschlag in den niederen Breiten aber um die Hälfte gesenkt, derjenige in den polaren Breiten entsprechend

der Kugelfunktion P_2 um den doppelten Betrag der äquatorialen Senkung gesteigert. Dies ist also keine so starke Niederschlagsausgleichung wie im Fall 1, jedoch immerhin eine bedeutende Schwächung des Niederschlagskontrastes Äquator—Pol. A_z und A_ϑ bleiben ungeändert. Das

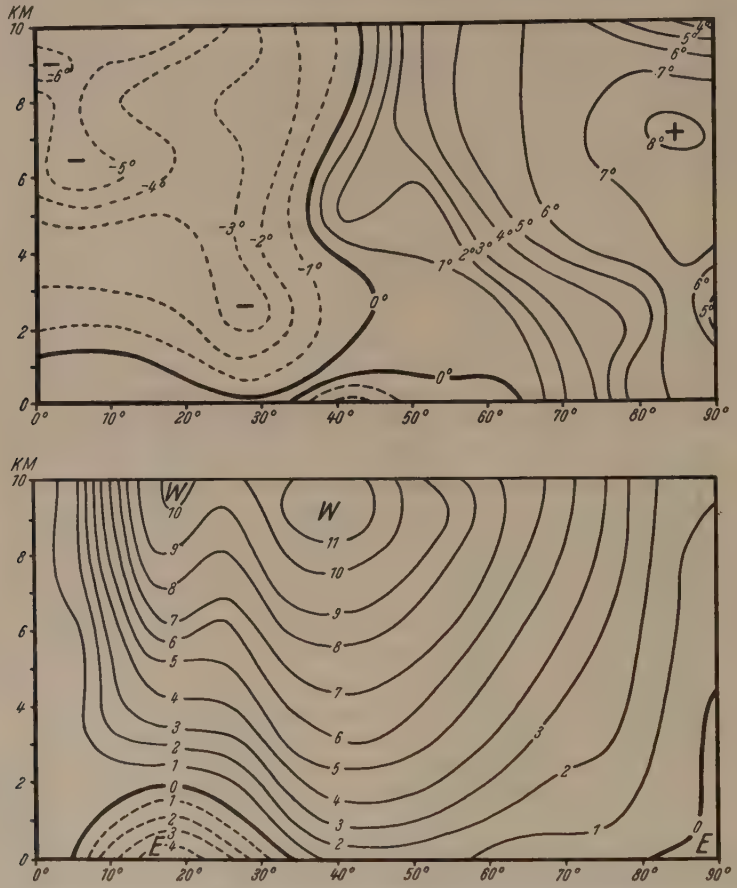


Abb. 4. *Fall 3* (Niederschlag am Äquator um die Hälfte erniedrigt, Niederschlag am Pol um das Doppelte der äquatorialen Erniedrigung erhöht).
Oben: Abweichungen der theoretisch ermittelten Temperaturverteilung von der wahren mittleren meridionalen Verteilung.
Unten: Theoretisch ermitteltes Windprofil (m/sec). West- und Ostwind wie in Abb. 1.

Ergebnis zeigt die Abb. 4. Wieder tritt in der Temperaturanomalie die zu erwartende Abkühlung in der Höhe über dem Äquator (bis —6° maximal) und die Erwärmung über den hohen Breiten (bis +8° maximal) ein. Dementsprechend geht der Jet stream auf die halbe Stärke des normalen Windprofils (11 m/sec) herab, besitzt aber in seiner Form noch die charakteristischen Merkmale der wahren Windverteilung. Auch die

südliche Ausweitung des Jet stream in der Höhe ist noch vorhanden, aber seine scharfen Begrenzungen sind ebenfalls geschwächt. Eine Andeutung ist vorhanden, daß das Windmaximum hier bereits voll am Bildausschnitt ist, was bei der Abb. 1 nicht der Fall war. Dies bedeutet, daß

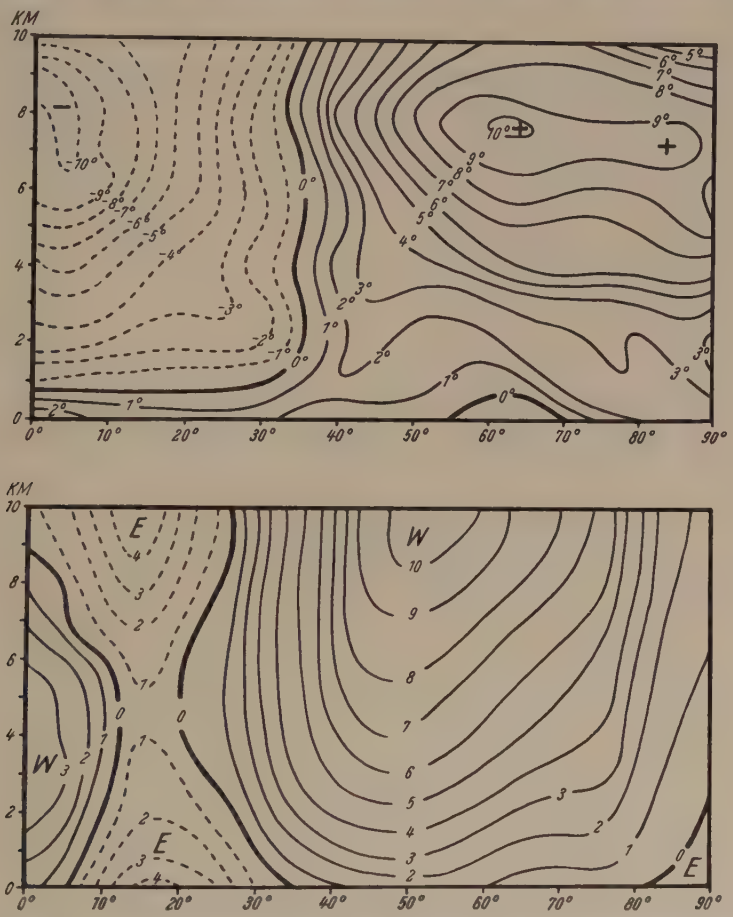


Abb. 5. *Fall 4* (Niederschlagsmaximum in 40° Breite, von dort Abfall des Niederschlages gegen den Pol und Äquator, am Pol Niederschlag = 0).
Oben: Abweichungen der theoretisch ermittelten Temperaturverteilung von der wahren mittleren meridionalen Verteilung.
Unten: Theoretisch ermitteltes Windprofil (m/sec). West- und Ostwind wie in Abb. 1.

bei einer Schwächung der Temperaturgegensätze das Windmaximum wie im Fall 2 und 3 tiefer rückt. Verständlich wird dies, wenn man an die Dichteabnahme mit der Höhe denkt. Die Dichte geht in die geostrophische Windformel im Nenner ein und für die Höhenlage des Jet stream kommt das Verhältnis von Druckgradient zur Dichte zur Wirkung. Die starke Schwächung des Gradienten mit der Höhe einerseits und die

fast konstante Dichteabnahme mit der Höhe für alle berechneten Fälle anderseits erzielen diesen Effekt. Auch die breitenmäßige Verschiebung des Jet stream nach Norden ist nur schwach, aber doch erkennbar (von 35° bis 40°). Für diese ist nicht nur der meridionale Druckabfall vom Äquator zum Pol verantwortlich, sondern auch der Abfall der Niederschlagsmenge in meridionaler Richtung. Um diese letztere wichtige Einwirkung der Niederschlagsverteilung auf die Form und Lage des Jet stream besonders deutlich zu machen, wurde für die Niederschlagsverteilung ein weiterer *Fall 4* gewählt, der den Abfall des Niederschlages in den mittleren Breiten zerstört und das Maximum des Niederschlages in 40° Breite zeigt. Ein scharfer Abfall des Niederschlages von 40° bis zum Pol sei vorhanden. Am Äquator wurde der Niederschlag stark geschwächt und zeigt einen Anstieg von dort bis 40° Breite. Das Resultat dieses Falles 4 zeigt die Abb. 5.

Diesmal weist das Bild der Temperaturanomalien charakteristische Züge auf. Ein scharfer Wechsel von Erwärmung der polaren Gebiete zu Abkühlung in den Gebieten im äquatorialen Gürtel zwischen 30° und 40° tritt auf. Bis über den 50. Breitengrad stellt sich durch die Form der gewählten Niederschlagsverteilung Erwärmung bis zu + 10° C von zirka 4 bis 10 km Höhe ein. Die niederen Breiten zeigen entsprechend der Niederschlagssenkung starke Abkühlung (bis —10°). Das resultierende Windprofil weist einwandfrei eine starke Nordverlagerung des Jet stream auf, der in diesem Fall bei 55° Breite (10 m/sec) auftritt und in der Höhe bis 70° noch Windstärken bis 8 m/sec aufweist. So ist die Form der Niederschlagsverteilung in meridionaler Richtung, deren Abfall zum Pol im Vergleich mit der tatsächlichen Verteilung weit nach Norden gerückt ist, für die Lage des Jet stream von entscheidender Bedeutung. Ein weiteres Merkmal dieser besonderen Form der Niederschlagsverteilung ist der durchweg vom Boden bis 10 km auftretende Ostwind vom Äquator bis 25° Breite. Ja, derselbe nimmt sogar von 4 bis 5 km aufwärts mit der Höhe wieder zu. Dies scheint auch in [*3*], Fig. 5 und S. 19, beobachtet worden zu sein. Auch dafür ist allein die freiwerdende Kondensationswärme bzw. die Form der Niederschlagsverteilung längs des Meridians verantwortlich. Man erkennt, daß die Kondensationswärme großen Einfluß auf die Form des Jet stream hat, und es soll nun untersucht werden, wie die Wirkung des meridionalen Austausches den Jet stream abzuwandeln vermag.

Der *Fall 5* soll bei Beibehaltung der wahren mittleren meridionalen Niederschlagsverteilung der Erde die Wirkung eines stark herabgeminderten meridionalen Austausches (5×10^6) untersuchen. Die Resultate zeigen die Abb. 6 und 7. Die Abweichung der theoretisch ermittelten Temperaturverteilung von dem wahren mittleren Temperaturprofil zeigt ein ausgeprägtes Resultat. Die äquatorialen Breiten weisen eine enorme Erwärmung (bis zu 80°) auf und die Temperatur zeigt eine Zunahme mit der Höhe. Dies beweist, daß das Fehlen bzw. der stark abgeschwächte Horizontalaustausch nur sehr geringe Wärme aus diesen niedrigen Breiten nach Norden abtransportiert und es daher zu einer starken Kumulierung

der Wärme in den oberen Troposphärenschichten über diesen Breiten kommt. Eine enorme Stabilisierung ist dort die Folge. Die gegensätzlichen Verhältnisse zeigen aus den gleichen Gründen die polaren Breiten, die eine enorme Abkühlung um 140° maximal in 8 bis 10 km aufweisen. Die

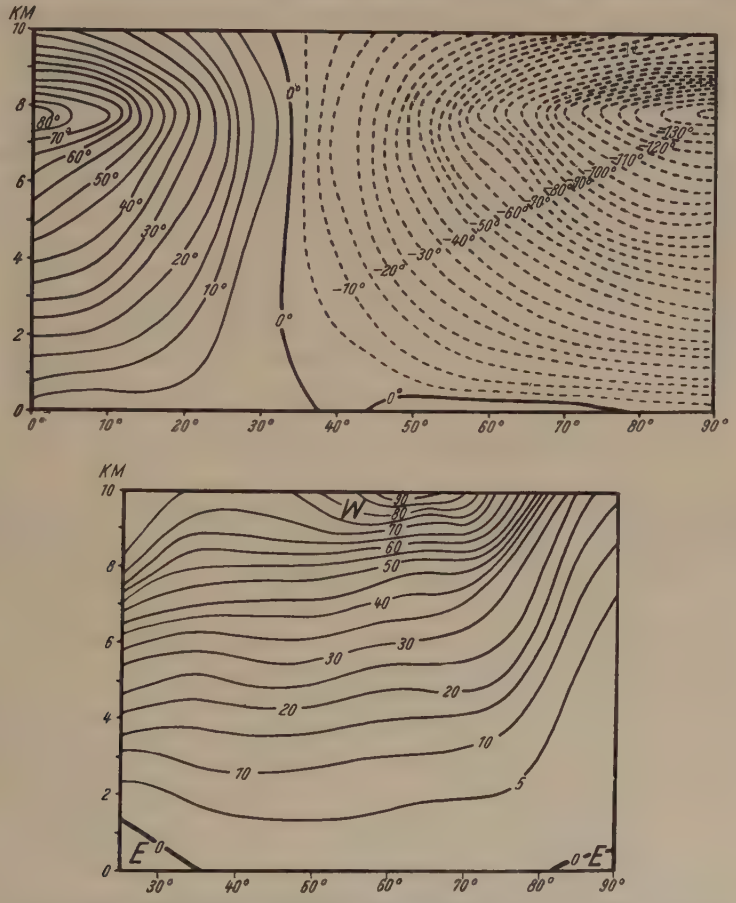


Abb. 6. *Fall 5* (meridionaler Austauschkoeffizient vermindert auf den Wert 5×10^6).
Oben: Abweichungen der theoretisch ermittelten Temperaturverteilung von der wahren mittleren meridionalen Verteilung.
Unten: Theoretisch ermitteltes Windprofil (m/sec). West- und Ostwind wie in Abb. 1.

Schichtung der Troposphäre wird dort außerordentlich instabil. Es ist klar, daß ein solcher Temperaturkontrast zu einer gewaltigen Steigerung der meridionalen Druckgegensätze und damit zu einer Steigerung der Windstärke führt. Das Windprofil zeigt diese enorme gesteigerte Windbewegung, die ein sehr nach Norden verschobenes Windmaximum (bei 60 bis 65° in 10 km Höhe mit 90 m/sec) aufweist. Dieses hat einen fast fünfmal so starken Wind wie der normale Jet stream. Die niederen

Breiten südlich von 30° wurden in die Abbildung nicht aufgenommen, da in diesen Breiten Druckgradienten von 10 mb zwischen zehn Breitengraden erscheinen, für die eine Anwendung der geostrophischen Wind-

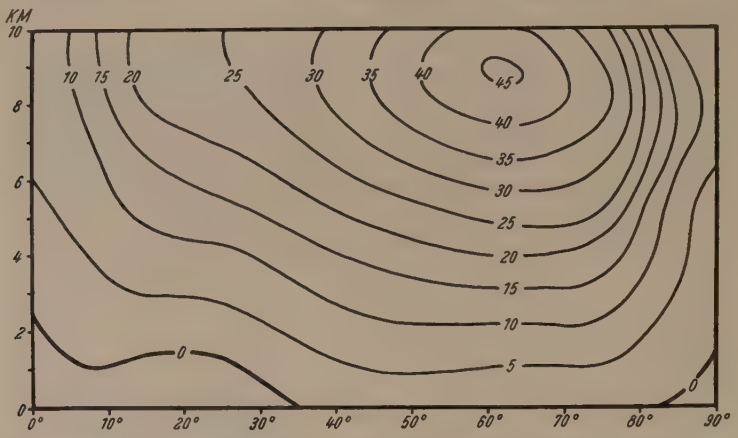


Abb. 7. Verteilung des Druckgradienten für den *Fall 5*; Angaben in mb pro 10° Breitendifferenz.

formel unmögliche Werte liefert. Lediglich informatorisch soll dieses Bild des gesteigerten Westwindes bei einem $A_\vartheta = 5 \times 10^6$ betrachtet werden, um zu verstehen, daß auch der horizontale Austausch in Wahrheit nicht

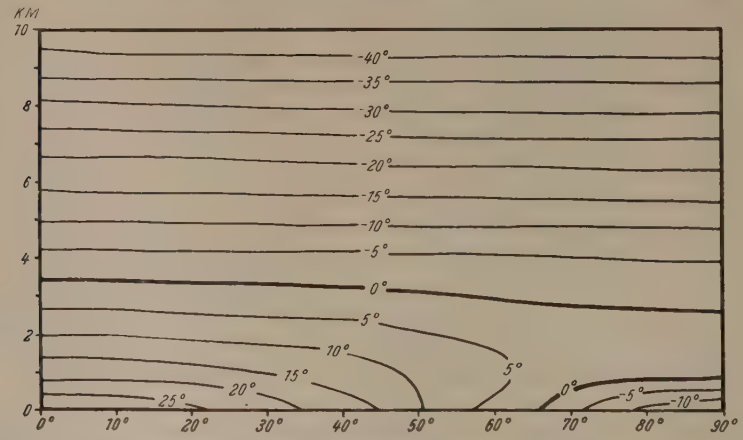


Abb. 8. *Fall 6* (meridionaler Austauschkoeffizient verstärkt auf den Wert 5×10^6). Theoretisch ermitteltes Temperaturprofil (° C).

derartige Schwankungen erleiden kann, sondern an einigermaßen eingeschränkte Grenzen gebunden ist. Die Konzentration der Druckgegensätze bzw. die Lage des Jet stream zeigt in diesem Falle, wo die Anwendung der

geostrophischen Windformel nicht ganz gerechtfertigt ist, die Abb. 7. Diese bringt den Druckgradienten für je 10° Breitendifferenz zur Darstellung. Sie zeigt einwandfrei, wo die stärkste Westwindbewegung resultieren muß und zeigt weiter die starke Nordverlagerung des oberen Windmaximums.

Der letzte *Fall 6* untersucht den Fall des verstärkten Horizontalaustausches. Er liefert das gegensätzliche Bild wie der Fall 5. Die enorm gesteigerten Austauschvorgänge in meridionaler Richtung verwischen nahezu jeden Temperaturkontrast, wie die Abb. 8 zeigt. In ihr ist im Gegensatz zu den früher behandelten Fällen die theoretisch errechnete Temperaturverteilung dargestellt, um diese Temperaturausgleichung zwischen Äquator und Pol deutlich zu machen. Das Bestehen der wahren Niederschlagsgegensätze und des vorgegebenen Temperaturkontrastes am Boden zwischen Äquator und Pol, deren Effekt sich entsprechend der statischen Grundgleichung nach oben fortpflanzt, bedingen in diesem Fall ein sehr abgeschwächtes Windprofil, das trotz des wärmeausgleichenden und jeden Temperaturkontrast zerstörenden verstärkten Austausches bestehen bleibt.

VI. Zusammenfassung.

Der Einfluß der im Abschnitt IV der vorliegenden Arbeit diskutierten Faktoren der theoretischen Lösung (1) ist nach der Durchrechnung spezieller Fälle unter Variation dieser Faktoren gut zu überblicken. Zur Entstehung des Windmaximums in der oberen Troposphäre ist vor allem die Wirkung der Kondensationswärme von Bedeutung, die gemäß der Verteilung des Niederschlags in meridionaler Richtung in der Troposphäre frei wird. Eine Verschärfung des Niederschlagskontrastes hat eine Verschärfung des Jet stream zur Folge. Der am Boden durch das Wärmegleichgewicht zwischen Ein- und Ausstrahlung vorhandene Temperaturgegensatz zwischen Äquator und Pol bedingt schon einen Westwind in den oberen Schichten der Troposphäre, indem sich dieser Gegensatz gemäß der statischen Grundgleichung nach oben fortpflanzt und verstärkt. Das Vorhandensein breitenmäßiger Unterschiede des Niederschlags und damit Unterschiede in der Verteilung der Kondensationswärme bedingt eine Konzentration des Westwindes in der oberen Troposphäre. Die mittlere meridionale Verteilung des Niederschlags bewirkt eine solche Konzentration zwischen 35 und 40° Breite, bekannt unter dem Namen Jet stream. Abwandlungen dieser mittleren Verteilung verändern dieses mittlere Bild des Windfeldes. Rückt das stärkste Gefälle des Niederschlags weiter nach Norden, so folgt auch das Jet stream-Band dieser Nordverlagerung. Eine Schwächung des meridionalen Austausches bewirkt eine allgemeine Verstärkung des gesamten Windprofils und scheint eine Nordverlagerung des Jet stream in der oberen Troposphäre zu verursachen. Eine Abschwächung des meridionalen Austausches schwächt das Windprofil enorm ab, vermag aber nicht den Westwind in der Troposphäre gänzlich zu zerstören. Die Gegensätze der Temperatur

Äquator—Pol an der Erdoberfläche sind doch so groß, daß keine Abwandlung des meridionalen Niederschlags und des Horizontalaustausches den bestehenden Westwind in der oberen Troposphäre gänzlich zu zerstören oder ihn in Ostwind umzuwandeln vermag. Für gewisse Teile der Troposphäre, besonders über den äquatorialen und polaren Teilen, können Variationen der meridionalen Niederschlagsverteilung den oberen Westwind in Ostwind umwandeln. Die Schwankungen des meridionalen Austausches können nicht so extrem sein und müssen größenordnungsmäßig zwischen 2×10^7 und 8×10^7 liegen, damit noch Windprofileresultieren, die vernünftige Windstärken besitzen. Man kann annehmen, daß das Verhältnis des horizontalen zum vertikalen Austauschkoeffizienten ebenfalls in nicht zu weiten Grenzen variiert. Der Einfluß der vertikalen Austauschgröße auf die Jet stream-Bildung ist nur von untergeordneter Bedeutung. Jedoch reguliert sie aus dem vorstehend erwähnten Grunde auch die Schwankungsweite des horizontalen Austausches. Da der vertikale Austausch im Zusammenwirken mit der mittleren in der Troposphäre freiwerdenden Kondensationswärme, die aus dem mittleren Jahresniederschlag der ganzen Erde resultiert, die mittlere Abnahme der Temperatur mit der Höhe erzwingt und dabei nur in geringem Maße die mittlere Strahlungsbilanz mitwirkt, kann der vertikale Austausch keiner großen Änderung unterliegen. Dies ist besonders der Fall, da die mittlere Niederschlagshöhe der ganzen Erde ebenfalls nahezu unveränderlich ist. Abschließend läßt sich feststellen, daß insbesondere den meridionalen Unterschieden im Niederschlag eine große Bedeutung für das Auftreten einer Windkonzentration, eines Jet stream, in der oberen Troposphäre zukommt.

Obige Ausführungen betreffen nur *mittlere* meridionale Verhältnisse der Temperatur- und Niederschlagsverteilung bzw. Verteilung der Kondensationswärme und deshalb auch nur *mittlere* Verhältnisse des Windfeldes. Inwieweit die Kondensationswärme Lageänderungen und Intensitätsschwankungen des Jet stream im Einzelfalle zu erzwingen vermag, läßt sich aus dieser Betrachtung *mittlerer* Verhältnisse nicht beurteilen. Aber ihre Wirkung dürfte auch im Einzelfalle recht erheblich sein, da bei auftretenden zonalen Druckgradienten in der unteren Troposphäre auch die meridional gerichteten Luftströmungen Wärmetransporte in meridionaler Richtung verursachen. Im einzelnen ist aber sicherlich das Zusammenspiel aller Faktoren viel verwickelter. Stärkere Änderungen im mittleren Niederschlagszustand der Erde für einen längeren Zeitraum rufen aber wesentliche Änderungen im mittleren Strömungszustand der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre hervor.

Literaturverzeichnis.

1. Defant, F.: Das mittlere meridionale Temperaturprofil in der Troposphäre als Effekt von vertikalen und horizontalen Austauschvorgängen und Kondensationswärme. Arch. Met. Geoph. Biokl., Ser. A **2**, 184—205 (1950).

2. Defant, F.: Kondensationswärme und Strahlungsbilanz in einem mittleren Meridionalschnitt der Troposphäre. Arch. Met. Geoph. Biokl. Ser. A **3**, 268—289 (1951).
3. Rossby, C. G.: On the nature of the General Circulation of the lower atmosphere. The atmospheres of the earth and planets. G. P. Kuiper, Univ. Chicago Press. 1949.
4. University of Chicago, Department of Meteorology: On the General Circulation of the atmosphere in middle latitudes. Bull. Amer. Met. Soc. **28**. 255—280 (1947).
5. Lettau, H.: Atmosphärische Turbulenz. Leipzig, Akad. Verlags-Ges. 1939.
6. Defant, A.: Die Zirkulation der Atmosphäre in den gemäßigten Breiten der Erde. Geografiska Annaler **3**, 209 (1921). Die Austauschgröße der atmosphärischen und ozeanischen Zirkulation. Ann. Hydr. u. mar. Meteorol. **54**, Sept.-Beih. 12 (1926).

551.541

(Imperial College of Science and Technology, London.)

Gravity Waves in the Atmosphere.

By

R. S. Scorer.

With 2 Figures.

Summary. Mathematical discussion is restricted to gravity waves of period short enough for the earth's rotation to be neglected, propagated horizontally through air whose horizontal velocity and static stability vary with height in the layers near the ground. The differential equation (15) is derived, describing how the vertical velocity of the wave motion varies with height for waves, of length $2\pi/k$, at rest relative to the coordinate system. Boundary conditions are then applied—at the ground where the motion is horizontal, and above where the kinetic energy is finite—to give the relationship between k and the velocity of the wave relative to the air above $(-W)$.

This relationship is illustrated for all possible stable waves in fig. 2 for four different airstreams whose profiles of stability and velocity are set out in fig. 1. Remarkably different results are obtained; conclusions about the wave-properties of an airstream therefore depend very much on the model chosen.

Two intervening chapters discuss the circumstances under which gravity waves are possible. Some of the conclusions are applicable to long waves also. Unstable waves are a very unusual occurrence, and very special circumstances are necessary to produce them, if they occur at all; they cannot lead to any phenomenon in which one wavelength predominates. Observable stable waves are not propagated over the ground but are at rest relative to their cause, except in the case of compression waves which are accompanied by no phenomena of the weather and travel with about the speed of sound. The most important stable waves are waves in the lee of mountains.

Zusammenfassung. Die mathematische Erörterung beschränkt sich auf Gravitationswellen, deren Periode kurz genug ist, um die Erdrotation unberücksichtigt zu lassen, und zwar speziell Wellen, die sich horizontal durch die Luft ausbreiten, deren horizontale Geschwindigkeit und statische Stabilität in den bodennahen Schichten von der Höhe abhängig sind. Es wird die Differentialgleichung (15) abgeleitet, die beschreibt, wie die Vertikalgeschwindigkeit der Wellenbewegung mit der Höhe bei Wellen variiert, die $2\pi/k$ lang und relativ zum Koordinationssystem unbewegt sind. Ferner werden

Grenzbedingungen aufgestellt, wonach die Bewegung an der Erdoberfläche horizontal und darüber die kinetische Energie begrenzt ist, um die Beziehung zwischen k und der Wellengeschwindigkeit $-W$ relativ zur oberhalb liegenden Luft anzugeben.

Diese Beziehung wird in Abb. 2 für alle möglichen stabilen Wellen für vier verschiedene Luftströme veranschaulicht, deren Stabilitäts- und Geschwindigkeitsprofile in Abb. 1 dargestellt sind. Dabei ergeben sich auffallend verschiedenartige Resultate; Folgerungen über die Welleneigenschaften eines Luftstromes hängen somit stark von dem gewählten Modell ab.

In zwei Zwischenkapiteln werden die Bedingungen besprochen, unter denen Gravitationswellen möglich sind. Mehrere Folgerungen daraus sind auch für lange Wellen gültig. Instabile Wellen kommen nur äußerst selten vor, da sie überhaupt nur durch ganz spezielle Bedingungen hervorgerufen werden; dabei können sie zu keiner Erscheinung führen, bei der eine einzelne Wellenlänge überwiegt. Stabile Wellen, die sich über der Erdoberfläche ausbreiten, können nicht beobachtet werden, da sie relativ zu ihrem Ursprung unbewegt sind, mit Ausnahme von Kompressionswellen, die sich ungefähr mit Schallgeschwindigkeit bewegen und keine Witterungserscheinungen verursachen. Die bedeutendsten stabilen Wellen sind auf der Leeseite von Gebirgen zu finden.

Résumé. La discussion mathématique se borne aux ondes de gravité de période assez courte pour qu'on puisse faire abstraction de la rotation de la terre et qui se propagent horizontalement dans l'air dont la vitesse horizontale et la stabilité statique varient avec l'altitude dans les couches voisines de la surface terrestre. On obtient l'équation différentielle (15) qui décrit la façon dont la vitesse verticale du mouvement des ondes varie suivant l'altitude dans le cas d'ondes d'une longueur de $2\pi/k$ en repos relativement au système des coordonnées. On tient compte des conditions aux limites — sur le sol d'une part où le mouvement est horizontal, et en haut d'autre part où l'énergie cinétique a une valeur finie — pour donner une relation entre k et la vitesse de l'onde $(-W)$ relativement à l'atmosphère supérieure. Ces relations sont illustrées pour toutes les ondes stables possibles par la fig. 2 pour quatre courants d'air différents dont les profils de stabilité et de vitesse sont représentés dans la fig. 1. On obtient des résultats très variés. Aussi les conclusions que l'on peut tirer à propos des ondes formées dans un courant dépendent-elles beaucoup du modèle choisi.

Deux chapitres concernent les conditions dans lesquelles les ondes de gravité peuvent se produire. Quelques-unes des conclusions auxquelles on aboutit s'appliquent également aux ondes longues. Les ondes instables ne se produisent que très rarement et résultent de circonstances tout à fait spéciales; elles ne mènent à aucun phénomène où prédomine une seule longueur d'onde. Les ondes stables que l'on peut observer ne se propagent pas relativement à la terre; au contraire, sauf les ondes de compression qui ne sont accompagnées d'aucun phénomène visible du temps et se propagent à peu près à la vitesse du son, elles sont en repos relativement à leur cause. Les ondes stables les plus importantes sont celles qui naissent à l'abri des montagnes.

1. The Waves to be Discussed.

The pressure of the atmosphere is the most accurately measurable of all meteorological observations and disturbances of pressure from the

mean value are readily observed either to remain over fixed geographical places or to move across the earth's surface. Gravity waves are a well known phenomenon of theoretical hydrodynamics and are often seen on water, and so we ask whether any of the atmospheric disturbances may be explained by them. It is not enough to find a similarity between a moving pressure form and theoretical gravity waves, we must discover whether it is a train of gravity waves by asking how it can be set up.

There are two kinds of gravity waves. First those of period comparable with a day, in whose motion the earth's rotation is as important as gravity. These will not be discussed here, except when the conclusions reached apply to them. The second, those of period so small compared with a day that the earth's rotation can be neglected, are to be studied. It is interesting that all possible stable waves are either of the first or second kind; none of an intermediate period can occur.

We consider only disturbances of airstreams which have no horizontal gradient of velocity. Then we need only to consider two-dimensional motion because any motion perpendicular to the plane of the disturbance does not affect it. It is possible to deduce the properties of a disturbance that is not two-dimensional by superposition of two-dimensional ones provided that there remains no horizontal gradient of velocity in the undisturbed stream.

The analysis and notation is made to conform with previous published work of the author [8, 9], and departs from the classical studies only where necessary.

In chapters 2 and 3 we show how the possible waves may be discovered by application of boundary conditions. Chapters 4 and 5 discuss whether gravity waves do exist in the atmosphere. Some of the conclusions can be applied to any wave motion even if gravity is not the main stabilising force. Chapter 6 presents some particular examples, showing how the propagation of waves may be greatly affected by small changes in the airstream.

2. The Fundamental Equation.

We consider two-dimensional motion only. The waves discussed are of period small compared with a day so that the earth's rotation is ignored. The co-ordinate system is at rest relative to the wave, with z upwards and x horizontal. The undisturbed stream has velocity U, and ϱ_0, p_0, and T_0 are its density, pressure and absolute temperature.

The stream is disturbed by a wave of length $2\pi/k$, and (u, w) is the disturbance of velocity. p, ϱ, and T are the disturbance of pressure, density, and temperature. We also define τ and ω by

$$\tau_0 + \tau = \frac{1}{T_0 + T}\left(\frac{p_0 + p}{p_{01}}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}; \quad \omega_0 + \omega = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} R \left(\frac{p_0 + p}{p_{01}}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \tag{1}$$

where p_{01} is some standard pressure. Then $1/\tau_0 = \Theta_0$ = potential temperature, and

$$\omega = p\,\tau_0/\varrho_0 \tag{2}$$

when the disturbance is small so that products of the co-ordinates of the disturbance are neglected (i. e. all the equations are linearised). Because we choose a co-ordinate system moving with the wave, the motion is steady, and we suppose that all the co-ordinates of the disturbance $(u, w, p, \varrho, \tau, \omega, T)$ contain the factor e^{ikx} and retain only the real part, so that $\partial/\partial x = ik$. We also denote $\partial/\partial z$ by a prime (e. g. $U' = \partial U/\partial z$).

$$D/Dt = (U + u)\,\partial/\partial x + \omega\partial/\partial z,$$

and the equation of motion is

$$\frac{D}{Dt}(U + u, w) = -\frac{1}{\varrho_0 + \varrho}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(p_0 + p) + (0, -g). \tag{3}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varrho_0 + \varrho}\frac{D}{Dt}(p_0 + p) &= (U + u, w)\cdot\left(-\frac{D}{Dt}(U + u, w) + (0, -g)\right)\\ &= -ikU^2 u - (g - UU')\,w \text{ (linarised)}\\ &\doteq -ikU^2 u - gw \end{aligned}\tag{4}$$

because in the atmosphere $UU' \ll g$.

The adiabatic equation is

$$\frac{1}{\varrho_0 + \varrho}\frac{D}{Dt}(p_0 + p) = \frac{c^2}{\varrho_0 + \varrho}\frac{D}{Dt}(\varrho_0 + \varrho) \tag{5}$$

where $c = [\varkappa R\,(T_0 + T)]^{1/2}$ = velocity of sound.

The equation of continuity is

$$\frac{D}{Dt}(\varrho_0 + \varrho) = -(\varrho_0 + \varrho)\,\mathrm{div}\,(U + u, w)$$

or

$$\frac{c^2}{\varrho_0 + \varrho}\frac{D}{Dt}(\varrho_0 + \varrho) = -c^2(ik u + w'). \tag{6}$$

Eliminating p and ϱ from (4), (5), (6)

$$ik\,(1 - U^2/c^2)\,u = (g/c^2 - \partial/\partial z)\,w.$$

We are discussing waves which travel with a speed comparable with the wind, and so $U \ll c$, and

$$ik u = (g/c^2 - \partial/\partial z)\,w. \tag{7}$$

The potential temperature of an air element is constant through the motion, and so

$$\frac{D}{Dt}(\tau_0 + \tau) = 0$$

i. e. $ikU\tau + \tau_0' w = 0$ (linearised)

and

$$\tau = \beta\tau_0 w/ikU \tag{8}$$

if we assume that

$$\tau_0'/\tau_0 = -\beta. \tag{9}$$

This is almost equivalent to assuming a constant lapse rate if β is constant. β is a measure of the static stability.

But

$$\frac{1}{\varrho_0+\varrho}\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)(p_0+p)=\frac{1}{\tau_0+\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)(\omega_0+\omega)$$

(to satisfy this relationship τ and ω were defined) and so the components of the equation of motion (3), when linearised, are

$$i\,k\,U\,u+U'w=-i\,k\,\omega/\tau_0 \tag{10}$$

and

$$\tau_0\,i\,k\,U\,w=-\omega_0'-\omega'-(\tau_0+\tau)\,g. \tag{11}$$

But in the undisturbed state

$$0=-\omega_0'-\tau_0\,g \tag{12}$$

and so using (8), (12), equation (11) becomes

$$w=-i\,k\,U\,\omega'/\tau_0\,(g\,\beta-k^2\,U^2). \tag{13}$$

Eliminating u from (7) and (10)

$$\omega=\frac{\tau_0\,U}{i\,k}\left[w'-\left(\frac{g}{c^2}+\frac{U'}{U}\right)w\right]. \tag{14}$$

Differentiating (14) and eliminating ω' from (13) we obtain

$$w''-(g/c^2+\beta)\,w'+\left\{\frac{g\,\beta}{U^2}-\frac{U''}{U}-k^2+\frac{2\,g\,c'}{c^3}+\frac{U'^2}{U^2}-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{U'}{U}+\frac{g}{c^2}\right)\left(\frac{U'}{U}-\beta\right)\right\}w=0.$$

For the values of U and k to be discussed

$$(0\leqq|U|<10^4\ \text{cm.}\cdot\text{sec.}^{-1},\ 10^{-6}<k<5\times10^{-3}\ \text{cm.}^{-1})$$

the only terms that are important are

$$\boxed{w''+(g\,\beta/U^2-U''/U-k^2)\,w=0.} \tag{15}$$

This is the fundamental equation which determines the variation with height of the wave coordinate w. The disturbance of pressure may be obtained from (14).

3. Boundary Conditions.

The vertical displacement from the undisturbed position is

$$\int_{\pi/2\,k}^{\infty}(w/U)\,dx=w/i\,k\,U.$$

At the ground

$$\boxed{w=0.} \tag{16}$$

At any other surface of discontinuity at which U, ϱ_0, or β is discontinuous, the solution of (15) changes, and the vertical displacement and the pressure disturbance are continuous functions of z.

If we denote the values in the upper layer by suffix s and in the lower layer by suffix i, then at a discontinuity

$$w_s = w_i\, U_s/U_i, \tag{17}$$
$$p_s + (\varrho_{0i} - \varrho_{0s})\, g\, w/i\, k\, U_s = p_i$$

or, using (2) and (14), [and assuming that at the discontinuity $U' = 0$, or at any rate $w\,U'/U$ can be neglected together with $w\,g/c^2$ in comparison with ω' in (14), which is equivalent to the assumptions on which (15) was simplified if U''/U is neglected] then

$$w_s' = -(\mu - 1)\, g\, w_i/U_s\, U_i + \mu\, w_i'\, U_i/U_s \tag{18}$$
$$\mu = \varrho_{0i}/\varrho_{0s}.$$

It is possible to consider many superposed layers but for simplicity we will consider only two, and suppose that β and U are constant in the upper layer so that (15) has solution

$$w_s = A\, e^{\lambda_s z} + B\, e^{-\lambda_s z} \tag{19}$$
$$\lambda_s = +\,(k^2 - g\,\beta_s/U_s^2)^{1/2}.$$

A boundary condition must be imposed in order to determine A/B. It is common in meteorological literature to show that the equations for wave motion in the air are in some way analogous to those for water, and the upper boundary condition is chosen to be analogous to having a free surface (constant pressure) or a horizontal surface (rigid boundary). Neither of these conditions is correct, for the atmosphere has no upper boundary capable of containing the wave motion. In studying the semi-diurnal oscillations Weekes and Wilkes [*15*] assumed that if the waves could not be propagated horizontally then energy is only propagated upwards for the thermal and tidal energy is mainly put in near the ground and dissipated at very great heights. Queney [*7*] and Scorer [*8*], in calculating the disturbance of an airstream due to a mountain ridge applied the same condition for then the disturbance was found to lie on the downstream side of the mountain, but it is not the appropriate one here. If a solution can be found in which the energy and waves are propagated horizontally then following Pekeris [*6*] we assume that if the wave is to exist its kinetic energy must be finite, i. e.

$$\int^{\infty} \frac{1}{2}\, \varrho_{0s} \cdot 2\, U_s\, u_s\, dz$$

must be finite.

But $\varrho_{0s} \propto \exp(-\varkappa\, g\, z/c_s^2)$, and since U_s is constant and $u_s \propto w_s$ [by (7)], then

$$\int^{\infty} \exp\{(\pm\,\lambda_s - \beta_s - \varkappa\, g/c_s^2)\, z\}\, dz$$

is finite, and only the negative sign is permissible since $\lambda_s \gg \beta_s + \varkappa g/c_s^2$, and so $A = 0$. Therefore $\omega_s'/\omega_s = -\lambda_s$, and (17) and (18) may be combined to give

$$\boxed{w_i'/w_i = -\lambda_s U_s^2/\mu U_i^2 + (1 - 1/\mu) g/U_i^2} \tag{20}$$

which must be true at the top of the lower layer.

On the other hand if no solution can be found with a real value of λ_s then the energy is either propagated upwards or downwards and the wave fronts are not vertical. Since there is no energy source at high level, energy can only be propagated upwards, and then the disturbance will rapidly cease to be observable at the ground. In that case we have no further interest in the waves. It is found that there is always a "cut-off" value of the wavelength beyond which horizontal propagation is impossible for stable waves.

The solution of (15) must therefore satisfy (20) at the top of the layer and (16) at the bottom. Now U is only given to within a constant, and, if k is given, then the application of the boundary conditions to (15) will determine this constant. The velocity of the air relative to the wave will thus be determined. If we know the velocity of the air relative to the ground we then know the velocity of the wave relative to the ground.

In the cases to be discussed we will assume that the temperature in the upper layer decreases upwards, for the whole motion is confined to the troposphere when the wavelength is less than a few kilometres. If the waves reached into the stratosphere it would only be necessary to take a different value for β_s. From now on the suffix i will be omitted because the discussion will be of the lower layer only.

Before considering some examples in detail we will consider what we can expect to learn from a theory of gravity waves.

4. The Existence of Unstable Gravity Waves.

In each numerical example the velocities of all possible stable waves have been calculated. However it must be recognised that waves of some lengths may be unstable, corresponding to complex values of U. If we write

$$U = l + i\,m \tag{21}$$

then l may depend upon z, and l_s may differ from l, but m is independent of z, and the waves grow at a rate proportional to $e^{k\,m\,t}$. These solutions have not been evaluated in the numerical examples, and so their significance will be discussed. The classical example is the case of two homogeneous streams of fluid with a discontinuity of density and velocity between them. In the atmosphere this is equivalent to having no static stability ($\beta = 0$) with $U =$ constant. Then

$$\lambda_s = \lambda = k. \tag{22}$$

If the ground is at $z = 0$, then (16) is satisfied by

$$w \propto \sinh k\,z.$$

If the discontinuity is at $z = h$, then (20) is

$$k \coth k h = -k U_s^2/\mu U^2 + (1 - 1/\mu) g U^2. \quad (23)$$

If h is large compared with the wavelength then $\coth k h \doteqdot 1$ and

$$\mu U^2 + (U + S)^2 = (\mu - 1) g/k \quad (24)$$

where $S = l_s - l$ = the discontinuity of velocity.

(24), regarded as an equation for U, has solutions

$$U = l + i m = -S/(\mu + 1) \pm (-\mu S^2 + (\mu^2 - 1) g/k)^{1/2}/(\mu + 1) \quad (25)$$

which are complex ($m \neq 0$) if

$$k > (\mu^2 - 1) g/\mu S^2 \doteqdot 2 (\mu - 1) g/S^2. \quad (26)$$

For example, if $h = 1$ km., $S = 300$ cm. $\sec_i^{-1}$, $\mu = 21/20$, then waves are unstable if $k > 10^{-3}$ cm.$^{-1}$, i. e. if the wavelength is less than 60 metres. Since $\mu \doteqdot 1$, $l \doteqdot {}^1/_2 S$, so that the waves travel approximately with the mean velocity of the two layers.

In this case the unstable waves are of such short length that it would be difficult to find a "*discontinuity*" in the atmosphere that was not a gradual change of velocity and density over a depth equal to several wavelengths. The argument then becomes invalid. On the other hand, if $\mu = 1$ and there is no discontinuity of density, waves of all lengths are unstable. This is not true in the atmosphere because the static stability affects the longer wavelengths; also $\coth k h \neq 1$.

The argument often given is that if waves of certain lengths are unstable, then if there exists an infinitesimal arbitrary disturbance it will consist partly of these wavelengths which will therefore grow. Now

$$k m = (\mu S^2 k^2 + [\mu - 1] g k)^{1/2}$$

and since the waves grow like $e^{k m t}$ the waves of shortest length will grow quickest. Also the lower limit to the unstable wavelengths is always zero when there is a discontinuity of velocity; so that as soon as any discontinuity was created, according to this argument it would immediately be destroyed by the growth of waves of very short length. It may be that the very short waves are excluded from the unstable range by the "discontinuity" being in fact a zone of transition, so that for some value of k, $k m t$ will have a maximum; it can then be argued that these waves which grow fastest will appear to the exclusion of others. In this way one wavelength is selected, and we obtain a possible explanation of "billow" clouds, where one wavelength obviously seems to predominate. In order to complete this "explanation" it is necessary to show that in fact the growth rate has a very pronounced maximum at one wavelength for the selection will not take place otherwise. Such calculations have never been performed, and since they are very laborious no conclusions will be suggested at present. But even supposing that one wavelength did grow preferentially it will appear immediately that it is not a good explanation of billow clouds.

The waves that are unstable travel with a velocity that is not the velocity of a finite amount of air, therefore it is impossible for the infinitesimal arbitrary disturbance to possess that velocity. In order to grow the initial disturbance must be composed not only of waves of the correct length but also waves travelling with the correct velocity. If the stream is disturbed by flow over a mountain stable waves, which will be discussed later, can be set up, but although the mountain profile may be composed of wave forms of all lengths, those that are unstable do not appear in the solution [*8*] for the reason just given.

If there is a layer in which the air is statically unstable and the velocity varies continuously through it, any overturning due to the static instability might produce a disturbance travelling with the velocity of the unstable waves if that velocity was the velocity of the air at some level in the layer. But it has been shown [*11*] that the motion is more likely to develop into a row of parallel vortices whose kinetic energy of rotation is equal to the potential energy released. This motion is a better description of billow clouds because the cloud forms do not change much when they have been created: if they were unstable waves they would continue to develop when they became visible.

In view of these criticisms it would only be possible to explain billow clouds by showing that if a shearing layer replaces a discontinuity then the shorter wavelengths are not unstable; if there is no shear no waves are unstable so that as the shear increases one wavelength will be the first to become unstable. This will grow (so we must suppose) and will to some extent decrease the shear so that it will become stable and be destroyed gradually by friction. Until very long calculations have been performed it is impossible to say whether the wavelengths obtained in this way agree with observation, but there is one serious objection to applying this to the atmosphere. It has been shown [*10*] that stable waves cannot travel with the same speed as the air, at any level, because when $\beta \neq 0$, $g\beta/U^2 \to \infty$ as $U \to 0$ and the equations have no solution. If unstable waves were set up this difficulty is avoided because even if $l = 0$ at some level $m \neq 0$ and so $g\beta/U^2$ remains finite at all levels. However, if we are discussing the case of the first waves that become unstable as the shear increases then m is an infinitesimal quantity and the difficulty is not overcome.

For these reasons unstable waves are not regarded as being relevant in the study of the atmosphere. This conclusion does not apply to very long waves which are affected by the earth's rotation, which have been shown [*1*, *2*] to be unstable under certain circumstances. These unstable waves travel with a mean speed which is the speed of the wind somewhere because the growing wave must always consist mainly of the same particles of air—otherwise it could not grow. They therefore appear to travel with the wind—in other words they are advected.

It is not being argued that we have no further need to study the phenomenon of unstable short gravity waves. Although we cannot expect any motion of a wavy nature to appear, we can hope to explain

some of the phenomena of turbulence. If in an airstream some waves are unstable, and if that airstream is maintained by the pressure field in spite of the dissipation of stream energy into a disorderly motion, then since a wide range of wavelengths will be unstable, if any disturbances grow then they will all grow simultaneously until the dissipation by molecular and eddy viscosity balances the supply of energy. This possible application of unstable waves will not be further discussed in this paper, but it is mentioned because it may help to explain how disorderly small-scale motions occur in clear air in statically stable airstreams at great distances from the ground [e. g. *4*].

5. The Existence of Stable Gravity Waves.

Three kinds of stable waves have been observed. First, waves in the lee of mountains, often exploited by glider pilots, have been discussed by Lyra [*5*] and Queney [*7*] who solved the problem of the flow of a uniform airstream over a two-dimensional mountain ridge. Both these solutions required that the wave amplitude should increase with height indefinitely; and it was later shown [*8*] that if the airstream were not uniform and the velocity increased with height in at least one layer, or if the static stability was much greater in some lower layers then higher up waves could occur which were confined to the lower layers—in accord with observation. Waves of this kind of very great length can occur under the influence of the earth's rotation but in all cases where the mathematics is complete these waves are caused by some corrugation of the boundary and are at rest relative to that corrugation; they do not move across the surface of the earth.

These waves travel through the air with a speed comparable with the wind, whether their wavelength be very long or not. It has therefore often been suggested that disturbances that are seen to move across weather charts may be waves of this nature. It is, however, a feature of stable gravity waves that they transmit energy, and an energy source is required to set them up, and this difficulty has never been overcome. In order to be transmitted horizontally they must travel through an atmosphere whose conditions of stability and wind speed vary with height; for otherwise, since the vertical velocity is zero at the ground and must die away upwards it must be zero everywhere, and so there are no waves, unless the coefficients of equation (15) are not constant. It is found that the most favourable circumstance is an increase in wind speed with height; but even then the waves can only travel in the opposite direction to the shear, or slower than the wind at all heights. Furthermore it is found that the velocity varies with the wavelength so that a solitary disturbance composed of waves of all lengths would be dispersed into a long train of waves that would soon become unobservable. When the boundary condition that the kinetic energy of the waves is finite cannot be satisfied then clearly the condition that the waves are set up by a finite energy source cannot be satisfied. What this means is that if

oscillations are set up in the troposphere with a frequency such that the waves cannot be propagated horizontally then the energy of the waves is propagated upwards indefinitely. It is useful to describe this phenomenon in the language of optics: if the waves cannot travel horizontally it means that they are not reflected at the regions where the coefficients in equation (15) change, i. e. at the discontinuity or region of large shear of wind, or at a discontinuity of temperature gradient.

The second kind of gravity waves, those which travel with about the speed of sound, are not much affected by winds, but may be reflected at the tropopause if their period is long enough. If the period is too short (less than about two minutes) their energy is dissipated in the stratosphere unless they are reflected at some region of change of temperature gradient as sound waves from big explosions are. The waves of longer period are "internally reflected" at the tropopause; and their velocity does not vary very much over the whole range of periods (or wavelengths) so that a solitary disturbance of pressure is only slowly dispersed. Such disturbances have, in fact, been propagated over great distances, and have been discussed by Taylor [*13*], Pekeris [*6*], and Scorer [*9*]. The theory based on the linearised equations was quite adequate. The two cases studied were the air waves caused by the eruption of Krakatoa in 1883 and by the fall of the Great Siberian Meteorite in 1908. The only other evidence of waves of this nature is the semi-diurnal pressure oscillations, which are long period waves of a different type because most of their energy is carried in the higher levels of the stratosphere.

Observation of these waves would be practically impossible if their energy source were a normal tropospheric meteorological phenomenon on account of the slow rate of supply of energy. Observation has only been possible when the source was a most exceptionally violent explosion; but there is no doubt that such waves are set up every time energy is supplied to the atmosphere in the form of heat, and that they travel out radially from the source. Their velocity is the maximum possible "signal velocity" in the atmosphere, but they are accompanied by no observable meteorological phenomenon (except possibly the pressure pulse).

The first type of slow-moving stable waves may also be set up by an energy source, but there is no evidence that any observable effect—not even pressure variations—has ever been produced by them. This is not surprising when we recall that of the component waves, most lose their energy upwards into the stratosphere, and the remainder are rapidly dispersed by their differences of velocity and by the variations of wind and temperature through which they must pass, and can only be propagated in a small fraction of all possible directions from the source.

Meteorologists recognise that the "signal velocity" is about the velocity of sound when they use the hydrostatic equation to calculate the pressure, for then they assume it to be infinite. But when we consider what may be expected to determine the pressure and velocity at any point in the future, and try to determine the region from which information must be obtained in order to make a forecast, we need not bother about

the signal velocity because no signals of meteorological importance travel at that speed. The slow-moving gravity waves are either negligible or are stationary relative to the ground. Therefore the only factors that can affect the air pressure and velocity at a point are influences that are carried there by the wind. This includes unstable waves (if they exist) for they travel with the wind at some level.

Before accepting this conclusion it would be well to enquire whether there is any other mechanism whereby disturbances of pressure or velocity can be propagated through the air at a different speed from the wind. One could only exist if it is not permissible to linearise the equations. There can be no doubt that the pressure, density, and temperature are only disturbed by a small fraction in any meteorological phenomenon; but it might be wrong to assume that the velocity is only slightly disturbed. The theory makes no attempt to treat problems like convection where the vertical velocity is comparable with, or may even exceed, the horizontal velocity. On the other hand, the more nearly the motion is inclined towards the vertical, the more necessary is it that the disturbance shall travel with the same horizontal velocity as the surrounding air because masses of air cannot be projected through their surroundings. Freeman [*3*] has suggested that pressure jumps may be analogous to "hydraulic jumps" or "bores" in streams of water, or to shock waves in air. The analogy is based on a very much simplified model atmosphere and could only be acceptable if the disturbance were at rest relative to the orographic feature which causes it. In that case, however, gravity waves appear to offer an equally satisfactory description of the phenomena. Tepper [*12*] has quoted the cases of pressure jumps at squall lines, but since in all the examples documented by him the pressure jump travelled with the same speed as the wind at the level where heavy rain was being produced it seems probable that the weight of the rain was responsible for the pressure jump. Furthermore it is impossible to sustain the analogy for a more realistic model atmosphere.

The third kind of stable gravity wave is that associated with billow clouds. It has been suggested [*11*] that the overturning of a statically unstable layer causes the appearance of a row of vortices, above and below which the air moves as if it had a corrugated boundary, and its motion is described by the equations for stable waves. These waves are produced when the static instability appears in a shearing layer; the whole system moves with the wind at the level of the instability. These waves are of little consequence for they disappear in the course of a few minutes because the row of vortices is an unstable configuration and if slightly disturbed the cells become "wound up" on each other and the motion soon becomes purely horizontal again.

The study of gravity waves thus leads us to the conclusion that no disturbance of pressure or velocity of meteorological importance moves over the earth's surface unless it is carried by the wind at some level. This is a most useful principle for forecasting, but it is not new, indeed it has been used implicitly by forecasters for many years. Disturbances

due to unlevel ground remain stationary, and it is only recently that these have become generally recognised as almost permanent features of weather charts.

Consequently, if a disturbance of pressure is seen to move across the chart without diminution, we know that it must be maintained continuously, either by rotation (so that a region of warm air is not displaced upwards by surrounding colder air because the centrifugal force maintains a region of low pressure), or by some other means such as heavy rain or a continuous supply of heat.

6. The Velocity of Stable Waves.

In this final chapter we discuss the wavelengths and velocities of the various possible stable waves, and the reason why different model airstreams possess such remarkably different properties.

In the examples the following units are used:

Unit of length = 1 km.
Unit of time = 100 secs.
Unit of velocity = 10 m. sec.$^{-1}$.

The method is to choose a velocity profile and a temperature distribution for an airstream; a wavelength is then chosen and the boundary conditions are applied to find the wave velocity. We denote by $-W$ the velocity of the waves relative to the upper layer and the total velocity of the air relative to the co-ordinate system by $U + W$. Thus U is given as a function of z when the velocity profile is given, and if we put $U_s = 0$, then the calculations will determine W, which is independent of z. We notice that the velocities of the air and the wave relative to the ground do not enter the discussion; but if we imagine that the waves are stationary relative to the ground, e. g. lee waves, so that the co-ordinate system is fixed to the ground, then W will be a constant, determined by k, which will give the velocity of the upper layer relative to the ground. In the diagrams all the velocities will be given relative to the upper layer. Fig. 1 shows the velocity and temperature profiles considered. Fig. 2 shows the possible stable waves.

Example 1. This is a realistic example in that the velocity, the velocity gradient, the temperature and temperature gradient are all continuous functions of height, and the lapse rate approaches the adiabatic lapse rate towards the ground. For convenience the base of the upper layer is taken at $z = 0$ and the ground at $z = -h$. In the upper layer $U_s = 0$, $g\beta_s = 2$, and equation (15) is

$$w_s'' = (k^2 - 2/W^2)\, w_s = \lambda_s^2\, w_s.$$

Since we are only concerned, in applying (20), with the ratio w'/w we may put $w = 1$ at $z = 0$. The profiles chosen are, in the units given above,

$$U = -2z^2 + z^4/2 - z^6/15,$$
$$g\beta = 2 + 5z^3 - 3z^5$$

and are illustrated in Fig. 1. The ground is at $z = -1$. At $z = 0$, (20) gives

$$w'/w = -\lambda_s = -(k^2 - 2/W^2)^{1/2}. \tag{27}$$

This is an initial condition for the numerical integration of equation (15) for the lower layer, viz:

$$w'' = \{k^2 + U''/(U + W) - g\beta/(U + W)^2\} w. \tag{28}$$

A value of W was chosen and the numerical integration carried to $z = -1$ where the boundary condition $w = 0$ must hold. It was therefore necess-

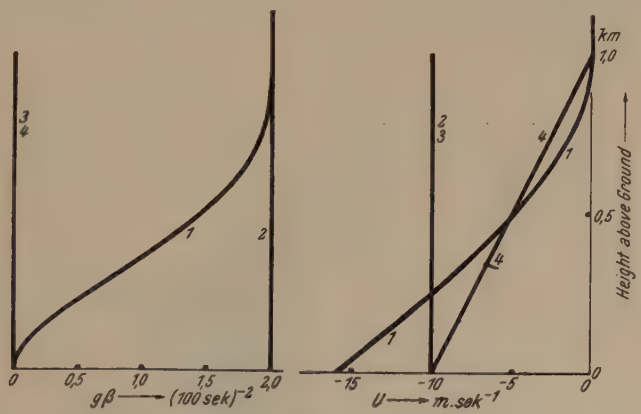


Fig. 1.

Stability profiles.

In all examples $g\beta_s = 2$ (upper layer) corresponding to a lapse-rate of 4.9° K km.$^{-1}$. When $g\beta = 0$ (lower layer in examples 3 and 4) the lapse-rate is adiabatic. $\beta T_0 = -T_0' - (\varkappa - 1) g/\varkappa R$ = the difference between the lapse-rate and the adiabatic lapse-rate.

Velocity profiles.

In all examples the velocity is constant in the upper layer above 1 km. from the ground. Velocities are given in m. sec.$^{-1}$ relative to the upper layer.

ary to make two or three trial values of k before the boundary condition at $z = -1$ was satisfied. The solutions thus obtained are displayed in Fig. 2.

We note that waves are possible only in a small range of lengths and velocities. This is because $w' < 0$ if $W < 0$ and w is therefore monotonic and cannot have a zero at $z = -1$. The theorem of Sekera and Scorer [*12, 10*] shows that we cannot have $U + W = 0$ anywhere and so $-W > U_{-1}$ (the value of U at the ground). As W increases from this value (1.56 units = $15^2/_3$ m. sec^{-1}) k decreases until $k^2 = 2/W^2$ and after that no waves are possible because horizontal propagation would be impossible, for λ_s becomes imaginary.

In order that waves in the lee of a mountain could occur with this velocity and temperature profile the wind speed at the ground would have to lie between 0 and 0.0867 units (= 0.867 m. sec^{-1}). Also, in this airstream no second mode is possible in which $w = 0$ somewhere between

$z = 0$ and $z = -1$ for if k is increased it merely tends to increase the coefficient of w in (28), the effect opposite to what is required for an extra mode. It is also readily seen that no values of W are possible

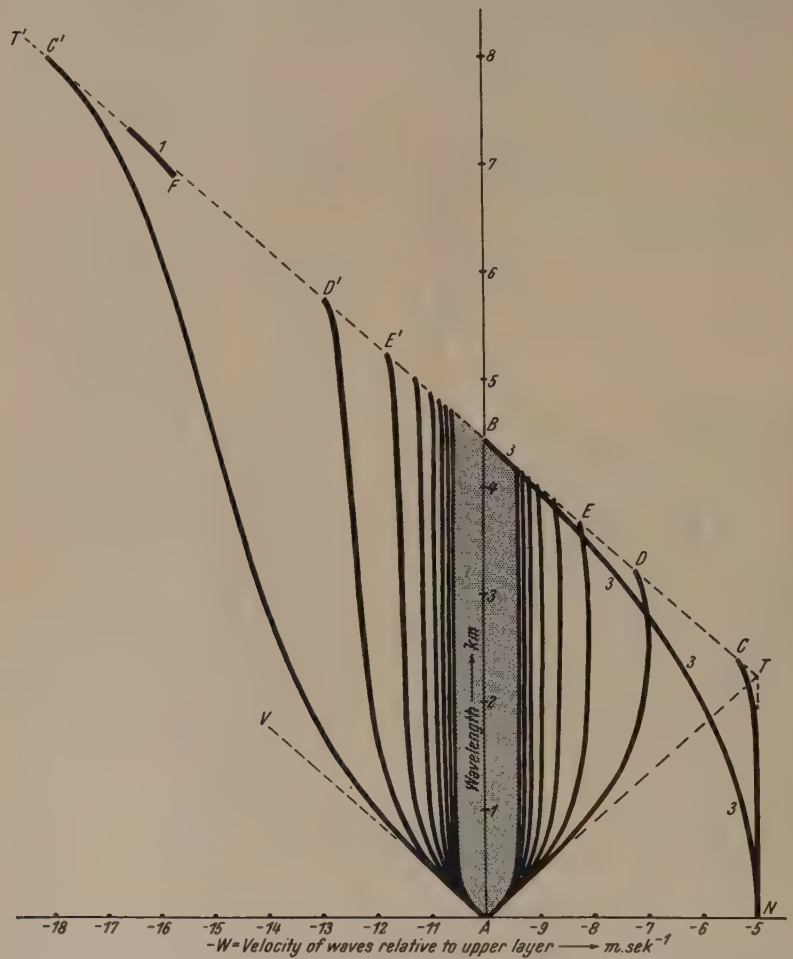


Fig. 2. The curves show the relation between wavelength and wave velocity for all possible stable waves in examples 1—4. The curves for examples 1 and 3 are marked with the number 1 or 3, appropriately. The unmarked curves are for example 2. No stable waves are possible in example 4. All the curves touch the line TT' [given by $k = (g\beta_s/W)^{1/2}$] at the cut-off wavelength. TN, AT, and AV are also tangents to the relevant curves. Velocities are given in m. sec.$^{-1}$ relative to the upper layer. In examples 2 and 3 curves to the right of AB represent waves travelling with a velocity between the velocities of the upper and lower layers. At F, example 1, the wave velocity is equal to the velocity of the air at the ground. Example 2 contains infinitely many curves which crowd upon the line AB in the shaded region. The continuous velocity distribution of example 1 makes only a small range of solutions possible, corresponding to the end part of the curve terminating at C'. The absence of static stability in the lower layer of example 3 means that only one curve, BN, corresponding to the part of CN below AT, is possible. Example 4 combines the circumstances of 1 and 3 so that no waves are possible.

outside the range explored. This difference from the next example arises because U is not constant in the lower layer and the terms in $1/(U + W)$ in (28) cannot be large over a great depth.

Example 2. Not so realistic, but much more like the models often chosen for study than example 1, is the case of two layers, in each of which the velocity and stability are constant (see Fig. 1). Now the ground is taken at $z = 0$ and the discontinuity at $z = h$. As before we have $g\beta_s = 2$, and put $g\beta = 2$ in the lower layer. We assume the density to be continuous at $z = h$. In the lower layer the solution of (15) satisfying $w = 0$ at $z = 0$ is

$$w \propto \sinh \lambda z, \quad \lambda = + [k^2 - 2/(U + W)^2]^{1/2}$$

so that (20) gives

$$\lambda \coth \lambda h = - \lambda_s W/(U + W).$$

In this example we put $h = 1$ km., $U = -10$ m. sec^{-1} $= -1$ unit. Then

$$[k^2 - 2/(W - 1)^2]^{1/2} \coth \{[k^2 - 2/(W - 1)^2]^{1/2}\} =$$
$$= - (k^2 - 2/W^2)^{1/2} W/(W - 1). \qquad (29)$$

This is the form taken by the equation when $k^2 > 2/(W - 1)^2$. Otherwise it is written in the form

$$(2/(W - 1)^2 - k^2)^{1/2} \cot \{(2/(W - 1)^2 - k^2)^{1/2} + n\pi\} =$$
$$= - (k^2 - 2/W^2)^{1/2} W/(W - 1). \qquad (30)$$

Always λ_s is real so that $k^2 > 2/W^2$. The solutions of (29) and (30) are displayed in Fig. 2. The contrast with example 1 is so striking that some explanation is called for. In example 2 there is an infinite number of solutions crowding close to the line AB. Only the first 8 solutions which begin at A have been shown in Fig. 2. On the lines terminating at C and C' the solutions have no nodal surface of w in the lower layer besides the one at the ground. On those terminating at D and D' there is one nodal surface of w. On those terminating at E, E' there are two nodal surfaces; and so on, with an ever increasing number as the end point approaches B. This means that the coefficient of w in (15) must be positive over a considerable range of z, otherwise as A or N is approached it is dominated by k^2 and the solution is not oscillatory and there are no nodal surfaces, not even at the ground. In example 1 $g\beta/(U + W)^2 - - U''/(U + W)$ varied rapidly as z varied so that extra nodes were impossible, but in example 2 it was constant. We note that the higher the mode the more nearly does the wave travel with the same velocity as the lower layer, i. e. in equation (15) U is small, [in (28) $U + W$ is small].

The solution terminating at N is possible because at N, $k = \infty$, and $- W = W - 1$ and (29) is satisfied. No solution of this nature is possible in example 1 because the solution is terminated when the wave velocity is equal to the velocity of the air at the ground. All the solutions to the right of AB would be impossible if the velocity varied continuously

with height because no waves can travel with the same speed as the air. It shows how a highly artificial example which the wind velocity is constant over a layer near the ground may produce misleading results.

Given a small wavelength, however small, in example 2, there is always a stable wave motion corresponding to it; nevertheless there may be a solution in which waves of this length are unstable. We must remain ignorant of the possibility of unstable waves for the present.

We have assumed throughout that the upper layer has a constant stability and wind. To assume otherwise would make the problem almost insoluble, but it would introduce no new properties into the results. It would merely alter the value of λ_s in (20) and perhaps make it depend slightly differently upon k, but it would not change the character of the results.

Example 3. This is the case of a convective layer, $\beta = 0$, of constant velocity, $U'' = 0$, below a stable layer of different velocity with $g\beta_s = 2$.

The solution of (15) in the lower layer is, as in example 2,

$$w \propto \sinh kz$$

and if $h = 1$, and the discontinuity of velocity is 1 unit, then the equation (20) becomes

$$k \coth k = -(k^2 - 2/W^2)^{1/2} W/\mu(W-1) + (1 - 1/\mu)\, g/(W-1)^2.$$

The nature of the solutions are not affected in any important characteristic if we put $\mu = 1$; and in practice μ is very near to 1 and so we solve

$$k \coth k = -(k^2 - 2/W^2)^{1/2} W/(W-1). \tag{31}$$

Solutions are only possible if $^1/_2 \leqq W \leqq 1$ so that the waves travel with a velocity between the velocities of the two layers. Therefore we might expect that if the velocity changes continuously no waves would be possible. This is true in *example 4* where the velocity increases linearly in the convective layer. Though this is an obvious example to choose for its mathematical simplicity its solutions are as misleading on account of their absence as those of example 2 on account of their abundance.

7. Conclusion.

It is as well to emphasise in a brief concluding chapter the warnings that must be given as a result of this study of gravity waves.

(1) We must not conclude that any phenomenon is gravity waves unless we know certainly what boundary conditions set them up.

(2) On the basis of present knowledge the properties of unstable waves, indeed their possible existence, is a matter of speculation. It is unlikely that they would cause any phenomenon with a simple wavelike appearance.

(3) In studying any wave phenomenon it will be necessary to choose particular examples, and we must be sure that any properties we discover are not properties of the model chosen which the real atmosphere does

not possess. This is difficult enough with stable waves and has never been attempted with unstable waves.

There are considerable mathematical difficulties attendant upon taking a realistic model such as that of example 1 in order to obtain qualitative results: but on the basis of the present study we could say that any properties of the model of example 2 that are derived from waves corresponding to a portion of the curve AC' ending at C', and equal in length approximately to the curve of example 1, would be found in a real airstream. Any properties derived from the remaining curves of example 2 must be ignored as being of no practical interest. It may be that proceeding on these lines we will be able to investigate the properties of unstable waves in real airstreams by finding a simple model which possesses all the necessary characteristics, together with some other characteristics which must be ignored.

References.

1. Charney, J. G.: The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. Journ. of Meteorol. **4**, 135 (1947).
2. Eady, E. T.: Long waves and cyclone waves. Tellus **1**, no. 3, 33 (1949).
3. Freeman, J. C.: An analogy between equatorial easterlies and supersonic gas flow. Journ. of Meteorol. **5**, 138 (1948).
4. Hislop, G. S.: Clear air turbulence over Europe. Journ. Roy. Aero. Soc. **55** 185 (1951).
5. Lyra, G.: Theorie der stationären Leewellenströmung in freier Atmosphäre. Z. angew. Math. Mech. **23**, Nr. 1, 1 (1943).
6. Pekeris, C. L.: The propagation of a pulse in the atmosphere. Phys. Rev. **73**, 145 (1948).
7. Queney, P.: Theory of perturbations in stratified air currents with application to airflow over mountain barriers. Misc. Rep. Dept. Met. Univ. Chicago, no. **23** (1947).
8. Scorer, R. S.: Theory of waves in the lee of mountains. Quart. Journ. Roy. Met. Soc. **75**, 41 (1949).
9. — The dispersion of a pressure pulse in the atmospere. Proc. Roy. Soc., A **201**, 137 (1950).
10. — On the stability of stably stratified shearing layers. Quart. Journ. Roy. Met. Soc. **77**, 76 (1951).
11. — Billow clouds. Quart. Journ. Roy. Met. Soc. **77**, 235 (1951).
12. Sekera, Z.: Helmholtz waves in a linear temperature field with vertical wind shear. Journ. of Meteorol. **5**, 93 (1948).
13. Taylor, G. I.: Waves and tides in the atmosphere. Proc. Roy. Soc., A **126**, 169 and 728 (1929).
14. Tepper, M.: A proposed mechanism of squall lines: the pressure jump line. Journ. of Meteorol. **7**, 21 (1950).
15. Weekes, K. and M. V. Wilkes: Atmospheric oscillations and the resonance theory. Proc. Roy. Soc., A **192**, 80 (1947).

551.547.3 (82)

(Servicio Meteorológico Nacional, Buenos Aires.)

Hohe und komplexe Druckänderungen im Bereich der Anden.

Von

W. Schwerdtfeger.

Mit 2 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Der beste Gleichklang zwischen den interdiurnen Druckänderungen zweier Stationen, die in 34° südlicher Breite etwa 850 km westlich und 450 km östlich des Kammes der Anden gelegen sind, ergibt sich in zwei Wintermonaten bei einer zeitlichen Verschiebung um 13 Stunden. Dies führt auf eine mittlere Verlagerungsgeschwindigkeit der Druckschwankungen, in Zeitabschnitten reiner Zonalzirkulation, von nahezu 100 km/h, somit auf einen Wert, der dem Strömungszustand der oberen Troposphäre und unteren Stratosphäre entspricht. An einem Einzelfall wird gezeigt,wie eine hohe zonale Druckwelle in unmittelbarer Gebirgsnähe sekundäre Erscheinungen nach sich ziehen kann, während sie weiter ab wieder ungestört in Erscheinung tritt.

Resumen. Estableciendo la correlación entre las variaciones interdiurnas de la presión en dos estaciones, situadas a los 34° de latitud austral, unos 850 km al W y 450 km al E de la Cordillera, el valor más alto del coeficiente (durante dos meses de invierno) resulta para un retraso de 13 horas de una serie respecto de la otra. De esto se deduce que las variaciones suelen desplazarse a razón de 100 km/h en promedio, en períodos de circulación atmosférica netamente zonal. Ese valor corresponde bien a las corrientes generales en las capas superiores de la troposfera e inferiores de la estratosfera. Finalmente, se muestra en un caso significativo, cómo un alta onda zonal de la presión ocasiona fenómenos secundarios solamente en inmediata vecindad de la Cordillera, mientras que reaparece la variación original a mayor distancia de la misma. El autor agradece a las autoridades del Servicio Meteorológico Nacional el haber puesto a su disposición el material informativo imprescindible para este trabajo, y haber permitido su publicación.

Summary. For two stations, located 850 km west and 450 km east of the Andes, the best consonance between the interdiurnal variations of pressure during two winter months results with a shifting of 13 hours. That induces

a value of 100 km/h as mean speed of displacement of the pressure variations, in seasons of merely zonal circulation. This value corresponds well to the general currents of the upper troposphere and lower stratosphere. In an individual case is demonstrated that and why a high zonal pressure wave, in immediate vicinity of the high mountains, involves secondary phenomena of pressure variations, whilst the original wave is reappearing more distant of the Cordillera.

Résumé. Considérant les variations interdiurnes de pression de deux stations situées à la latitude de 34° S et respectivement à 850 km à l'Ouest et 450 km à l'Est de la crête des Andes, le meilleur accord entre elles s'obtient par un décalage de 13 heures dans le temps pour deux mois d'hiver. Cela signifie une vitesse moyenne de propagation des variations de pression, aux époques de circulation zonale pure, d'environ 100 km/h, valeur de courant qui correspond par conséquent aux conditions régnant dans la haute troposphère et dans la basse stratosphère. On montre dans un cas particulier comment une onde de pression zonale en altitude provoque au voisinage de la montagne des phénomènes secondaires, alors que plus loin elle se propage inchangée.

1. Allgemeines.

Die synoptische Aerologie der vergangenen 15 Jahre hat klar gezeigt, daß die — schon 15 bis 20 Jahre älteren — Anschauungen H. Fickers über hohe und niedrige Druckänderungen [*1*] weitgehend zutreffend und seine damaligen Einwände gegen die einseitige Betonung der Vorgänge in den unteren Schichten [*2*] vollauf berechtigt waren. Hatten schon die früheren Registrierballonaufstiege einiges Beweismaterial geliefert, so konnte H. Hoinkes [3, mit ausführlichen Literaturangaben] dieses durch eine Sammelverarbeitung der Höhenwetterkarten des Jahres 1938 vervielfachen, und die tägliche Arbeit in den Zentralen der modernen synoptischen Dienste der Nordhemisphäre liefert fast täglich neue Beweisfälle für diese Anschauungen.

Es wäre wohl interessant, vergleichende Feststellungen für die Südhalbkugel zu treffen, wo der Gesamtcharakter der Luftströmungen dem Idealfall „planetarischer" Zirkulation zweifellos ziemlich nahe kommt, und es müßte besonders interessant sein, dies im südamerikanischen Bereich zu tun. Denn im Westen Südamerikas ragt ja die Gebirgsmauer der Anden wie eine riesige Trennwand einer gigantischen physikalischen Versuchsapparatur in die Troposphäre hinein, bis zu einer Höhe, die mehr als die Hälfte der Masse der Atmosphäre unter sich läßt, und über diese Mauer hinweg wehen die permanenten Westwinde der höheren Schichten.

Aber im ganzen südamerikanischen Sektor gab es in den letzten Jahren durchschnittlich nur etwa zehn Radiosondenaufstiege *pro Monat* — gegenüber schätzungsweise 6000 in Europa —, so daß selbst für die einzige gelegentlich arbeitende Station die wichtigen interdiurnen Änderungsgrößen unbekannt bleiben. Um nun trotzdem einige Feststellungen über den Charakter der Druckänderungen und über ihre Auswirkungen machen zu können, Feststellungen also, deren praktischer Wert bei der

Konstruktion von Vorhersagekarten für Argentinien einer laufenden Prüfung unterzogen wird, sei es erlaubt, zu einfachen und nahezu historischen Darstellungsformen zurückzukehren.

2. Korrelation der Druckänderungen.

Die einzige küstenferne pazifische Wetterstation, von der man in Südamerika ziemlich regelmäßig dreimal täglich Meldungen erhält, ist das Land Robinsons, die kontinentnähere der beiden Juan Fernández-Inseln (Ju Fe), 33° 40′ S, 78° 50′ W, etwa 800 km westlich von Santiago de Chile. Es ist nun auffällig und zeitweise unmittelbar prognostisch verwertbar, daß Druckänderungen, die in Ju Fe auftreten, häufig mit nur geringfügiger Modifizierung und mit einer Verspätung von 12 bis 24 Stunden auf der Ostseite der Anden in etwa gleicher geographischer Breite wiederzufinden sind. An dieser Erscheinung sind offenbar „hohe" Druckwellen maßgeblich beteiligt, denn die zugehörigen Bodenwetterkarten zeigen, daß gleichzeitige advektive Vorgänge in den unteren Schichten (mit entsprechender Phasenverschiebung) unmöglich zu einer Erklärung herangezogen werden können, und erst recht beweist dies der Gang des Luftdruckes auf der Bergstation Cristo Redentor, in gleicher Breite im Andenkamm in 3830 m gelegen.

Zum Beweis eines überzufälligen Zusammenhanges der Vorgänge diesseits und jenseits der Anden bestimmt man zweckmäßig den Korrelationskoeffizienten (KK) der 24stündigen Druckänderungen zweier Stationen mit entsprechender zeitlicher Verschiebung. Die 24stündigen Änderungswerte empfehlen sich deshalb, weil bei ihnen die halbtägige Druckperiode (die in Wirklichkeit nicht nur von Station zu Station, sondern auch je nach der Wetterlage verschieden ist) am wenigsten mitspricht.

Man beschränkt die Betrachtung nun zweckmäßig auf diejenigen größeren Zeitabschnitte, für die man auf Grund der Bodenwetterkarten oder — wenn vorhanden — hochreichender Höhenwindmessungen annehmen darf, daß die allgemeine Strömung in der oberen Hälfte der Troposphäre nahezu *zonal* orientiert ist, somit auf Zeitabschnitte mit sog. Weststeuerung im Gegensatz zu den auch nicht selten sich einschaltenden Perioden mit SW- oder auch NW-Steuerung. („Steuerung" hier nicht im Sinne der alten Definition v. Fickers, sondern im Sinne der „Hauptverlagerungsrichtung der Druckänderungsgebiete".) Des weiteren erscheint es nützlich, sich auf Wintermonate zu beziehen, da im Sommer der subtropische Höhenhochgürtel ziemlich weit nach Süden verschoben und in Zusammenhang damit die interdiurnen Druckänderungen in 35° Breite wesentlich geringer sind [*4*].

Unter diesen Bedingungen bieten die beiden Monate Juni 1949 und Juni 1950 das beste Beispiel, während für frühere Jahre das entsprechende Material noch nicht bearbeitet ist. Die Druckdifferenz „35° Breite minus 50° Breite zwischen 55 und 80° W-Länge" (Bodenwerte, Dreitagemittel) — in Ermangelung aerologischer Daten als Zonalzirkulationsindex i_z

definiert — beträgt im Mittel dieser 60 Tage 19 mb, mit Schwankungen zwischen 8 und 32 mb, und ist damit etwas höher als in den Nachbarmonaten, in denen auch negative Werte vorkommen. Als Bezugspunkt kam westlich der Anden nur Juan Fernández in Betracht; auf der argentinischen, östlichen Seite der Anden wurde Villa Mercedes, San Luis (V M), gewählt, und für beide Stationen wurden die Druckwerte an Hand der synoptischen Karten des Servicio Meteorológico Nacional kontrolliert. Es ergaben sich folgende Beziehungen:

KK der 24stünd. Druckänderungen JU FE und VM

Zeitdifferenz	KK
0 Stunden	0,45
5 „	0,60
11 „	0,78
13 „	0,79
18 „	0,66
24 „	0,38

Anzahl der korrelierten Wertepaare 60
Mittlere 24stündige Druckänderung in JU FE ..... 4,3 mb
„ „ „ „ VM ..... 5,0 „

Natürlich wäre es wünschenswert, den KK auch für andere Zeitdifferenzen etwas oberhalb 13 Stunden feststellen zu können, aber mehr Meßwerte standen nicht zur Verfügung, und die Berechnung auf interpolierte Werte zu stützen, hätte doch dem Zufall zu viel Möglichkeiten geboten. Jedenfalls ist der Wert $KK_{13} = 0{,}79$ für $n = 60$ auch so hoch, daß eine erhebliche Steigerung durch Änderung der Zeitdifferenz nicht mehr zu erwarten ist. Es soll also angenommen werden, daß die mittlere Verlagerungszeit der zonalen Druckwellen in dem untersuchten Zeitraum ungefähr 13 Stunden beträgt, was bei 1270 km Entfernung der beiden Stationen einer Geschwindigkeit von 100 km/h entspricht.

Es bliebe aber noch die Möglichkeit, daß der große Wert für die Geschwindigkeit der West-Ost-Verlagerung dadurch zustande kommt, daß die Druckwellen in Wirklichkeit gar nicht zonal, sondern mit merklicher Meridionalkomponente laufen, wie das in gewissen Zeitabschnitten zweifellos der Fall ist und an Hand der Verlagerung der Druckänderungsgebiete nachgewiesen werden kann. Deshalb wurde der entsprechende KK_{13} noch für zwei andere, in gleicher Entfernung von Ju Fe etwa 5 Breitengrade nördlich und südlich von V M gelegene Stationen bestimmt. Es ergab sich:

KK_{13} (Juan Fernández und La Rioja): 0,73,
KK_{13} (Juan Fernández und Choele Choel): 0,60.

Diese Zahlen sind zwar auch nur Stichproben und stellen deshalb keinen zwingenden Beweis dar, machen es aber hinreichend unwahrscheinlich, daß eine stärkere Meridionalkomponente mitspielt, und eine kleinere Abweichung von der reinen West-Ost-Richtung, etwa $\pm 10°$, ist für die weiteren Schlußfolgerungen belanglos. Für die vorliegende Untersuchung wurde jedoch ein Zeitabschnitt möglichst reiner Zonal-

strömung bevorzugt, weil Juan Fernández, die einzige verfügbare Pazifikstation, und Cristo Redentor, die einzige höhere Bergstation, auf gleicher geographischer Breite liegen.

3. Der Sitz der Druckschwankungen.

Daß der Hauptanteil der Druckänderungen in 35° S-Breite in den beiden betrachteten Monaten seinen „Sitz" in Höhen oberhalb des Andenkammes hat, steht also außer Frage, aber damit ist natürlich noch keine Aussage darüber gewonnen, ob als wesentliche Ursache advektive Vorgänge in der oberen Troposphäre und der Tropopause angenommen werden müssen, oder ob andere Prozesse — Schwingungsvorgänge in Tropopause oder Stratosphäre — eher in Betracht kommen. Das hier verfügbare Material ermöglicht eine Behandlung dieses Problems nicht, wohl aber kann man die Frage aufwerfen, in welchen Höhen mittlere Strömungsgeschwindigkeiten auftreten, die der besten Korrelation des vorhergehenden Abschnittes entsprechen. Dazu sei zunächst auf drei in letzter Zeit publizierte Untersuchungen zurückgegriffen: FLOHNS Darstellung der allgemeinen Zirkulation auf der Südhalbkugel [5], Tabelle 17, enthält den Wert von 105 km/h in 11 km Höhe für die mittlere Zonalkomponente im Winter. LOEWES und RADOKS [6] Meridionalschnitten entnimmt man, wenn auch für 150° Ost, 95 km/h in 10 km Höhe. Und die interessanten, aber für Südamerika offenbar nur auf älterem Material fußenden Welthöhenkarten von BROOKS und Mitarbeitern [7] ergeben in dem hier interessierenden Gebiet in 9,5 km Höhe (300 mb) etwa 80 bis 90 km/h.

Als vierter Anhalt diene nachstehende kleine Tabelle der mittleren Geschwindigkeitswerte in m/s (nach dem Differenzverfahren) über Villa Mercedes, die, allerdings nur bis 5 km Höhe, auf Grund der regelmäßigen Messungen mit Pilotballonen in den elf Jahren 1937 bis 1947 (täglich 12 und 18 GMT) berechnet sind; zwecks besseren Vergleichs mit den genannten Veröffentlichungen sind außer den hier interessierenden Winterwerten (Juni bis August) auch die für den Südsommer (Dezember bis Februar) beigefügt.

Höhenwinde über Villa Mercedes (San Luis), 33° 41′ S, 65° 29′ W 515 m.

Höhe ü. NN	Winter						Sommer					
	result. Vektor		skalar	Best.	Anzahl		result. Vektor		skalar	Best.	Anzahl	
	D	$\bar{v}$	v	%	n	%*	D	$\bar{v}$	v	%	n	%*
1000 m	343°	1,6	6,6	24	1489	75	35°	1,9	6,4	30	1554	77
2000	306	2,4	7,5	32	1341	68	5	1,0	5,6	17	1443	71
3000	267	5,9	10,4	57	1091	55	266	2,3	7,3	31	1173	58
4000	253	9,3	13,7	68	831	42	245	5,5	9,8	56	922	46
5000	247	13,1	16,8	78	592	30	238	8,4	11,8	71	732	36

* In % der größtmöglichen Anzahl von Aufstiegen:
Südsommer: $2 \times 11 \times 90 + 2 = 1982$; Südwinter: $2 \times 11 \times 92 = 2024$.

Das Linksdrehen des resultierenden Windvektors mit der Höhe ist höchstwahrscheinlich auf die Schönwetterauswahl der Pilotballonmethode zurückzuführen, in ähnlicher Weise, wie es für eine andere argentinische Station kürzlich nachgewiesen werden konnte [*8*]. Aber hier soll vornehmlich auf die Geschwindigkeitswerte im Winter Bezug genommen werden, für die eine lineare Extrapolation der Zunahme mit der Höhe nach der Darstellung Loewes [*6*] und nach [*8*] in erster Näherung gerechtfertigt erscheint. Damit käme man wiederum auf einen Wert von etwa 100 km/h für Höhen zwischen 9 und 11 km. Man kann daher sagen, *daß die mittlere Verlagerungsgeschwindigkeit der Druckschwankungen längs 35° südlicher Breite in Zeitabschnitten reiner Zonalzirkulation dem Strömungszustand in der oberen Troposphäre (und der unteren Stratosphäre) in angemessener Weise entspricht.*

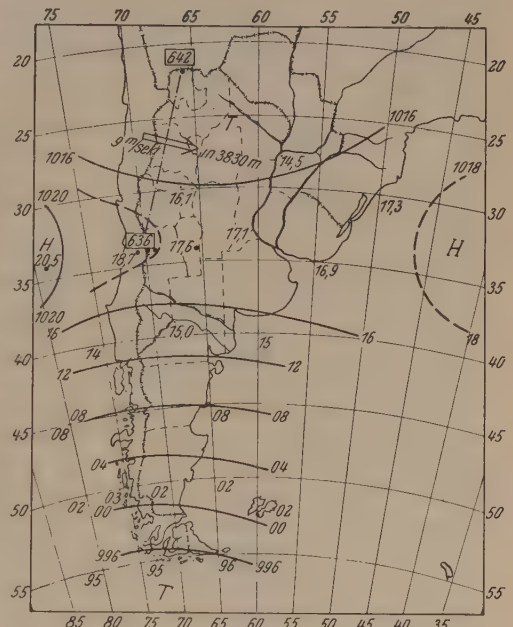


Abb. 1. Mittlere Druckverteilung im Meeresniveau für die Zeit vom 18. bis 25. Juni 1950; die beiden eingerahmten Werte beziehen sich auf das Niveau von Cristo Redentor, 3830 m. Die Punkte bezeichnen die Stationen, auf die der Text und Abb. 2 Bezug nehmen. Der Doppelpfeil zwischen den beiden rechteckig eingerahmten Höhenstationen stellt die aus den Druckwerten berechnete Komponente des mittleren geostrophischen Windes dar.

4. Ein Beispiel hoher und komplexer Druckänderungen.

Auch in der Woche vom 18. bis 25. Juni 1950 zogen gut ausgeprägte hohe Druckwellen von Westen her über die Anden, und zugleich zeigte sich eine bemerkenswerte Modifikation am Andenostrand, die eine eingehendere Schilderung lohnend erscheinen läßt. Abb. 1 gibt die mittlere Druckverteilung für die genannten acht Tage und durch die Mittelwerte des Druckes in Cristo Redentor und La Quiaca (in 3460 m, auf das 370 m höhere Niveau von Cristo Redentor reduziert) auch einen Beleg für die bekannte Tatsache der Nordverschiebung der Westwindzone mit der Höhe. Der Zirkulationsindex i_z kommt dem Mittelwert der vorerwähnten zwei Wintermonate nahe.

Für die genannten acht Tage enthält Abb. 2 den Druckgang in Juan Fernández (in NN) gemäß der angegebenen Zeitskala. Die entsprechenden Kurven für Santiago de Chile (NN, fehlende Werte ergänzt mit Hilfe von Valparaiso), Mendoza (830 m) und Cristo Redentor (3830 m) sind um

6 Stunden, die für Villa Mercedes (NN) um 12 Stunden zurückversetzt, um die Übereinstimmung besser hervortreten zu lassen. Leider standen nur für Mendoza sechsstündige Beobachtungen zur Verfügung, für die anderen Stationen lediglich die von 12, 18 und 23 z, bzw. für V M von 12 und 23 z.

Die Druckwerte von Cristo Redentor sind sämtlich mit 1,6 multipliziert, d. h. im Verhältnis P_{NN}/P vergrößert, um einen sinnvollen Vergleich der Amplituden der Druckschwankungen zu ermöglichen. Auf diese Weise kommt der „hohe Charakter" der Druckwelle zwischen dem

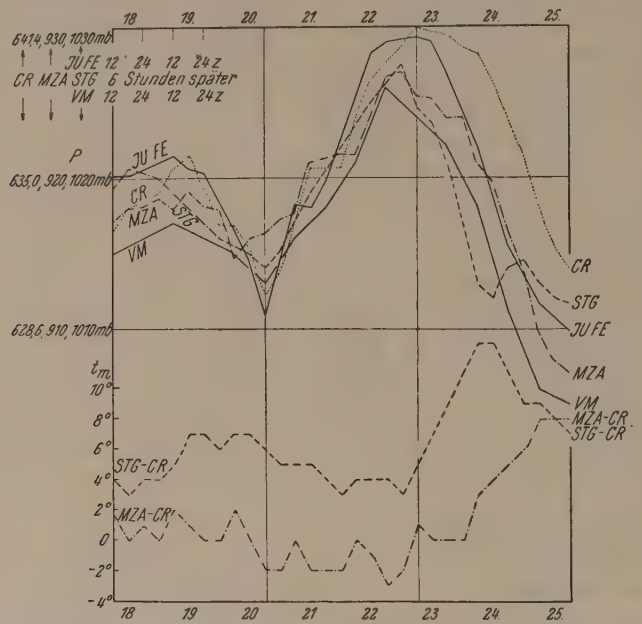


Abb. 2. Gang des Luftdruckes P in Juan Fernández (JU FE), Santiago de Chile (STG), Cristo Redentor (C R), Mendoza (MZA) und Villa Mercedes (V M); Gang der Mitteltemperatur t_m der Luftsäule zwischen Cristo Redentor und Santiago bzw. Mendoza. Periode: 18. bis 25. Juni 1950.

19. und dem 23. Juni besonders deutlich zum Ausdruck. Den gleichen Sachverhalt machen die beiden untersten Kurven deutlich, die die Mitteltemperatur der Luftschicht STGO (NN) bis C R und Mendoza (830 m) bis C R darstellen, berechnet aus den jeweiligen Druckdifferenzen: Der kräftige Höhentrog vom 20./21. Juni läßt die untersten 4 km der Troposphäre fast unbeeinflußt. Ab 23. dagegen zeigt sich eine bemerkenswerte Beteiligung der unteren Luftschichten, und der starke Druckfall der letzten beiden Tage der Darstellung bietet den typischen Fall einer „komplexen" Änderung, nämlich eine negative Druckänderung in der Höhe, die in ihrer Auswirkung in NN durch Warmluftadvektion in der unteren Troposphärenhälfte verstärkt wird.

Zweifellos haftet der ganzen Darstellung der Abb. 2 der gleiche Mangel an wie der Korrelationsuntersuchung des vorangehenden Abschnittes,

indem der zu große zeitliche Abstand der Druckwerte eine genauere Zuordnung verschiedener Kurventeile verhindert. Jedoch kommt der Charakter der „hohen" Änderung wohl klar zum Ausdruck, und ebenfalls liegt die Besonderheit des Druckganges in Mendoza am 20. Juni einwandfrei außerhalb der Ungenauigkeitsgrenzen. Mendoza ist die einzige der fünf dargestellten Stationen, an der der Druckanstieg etwa zwölf Stunden „zu früh" einsetzt und im Zusammenhang damit der vorhergehende Druckfall „zu gering" bleibt. Diese Erscheinung ist weder zufällig noch unerklärlich. Eine Prüfung der synoptischen Karten und der zugehörigen Höhenwindmessungen läßt klar erkennen — auf eine ausführliche Wiedergabe des Materials sei aus Raumgründen verzichtet —, daß im Laufe des 20. Juni, während der Höhentrog noch einwandfrei westlich der Anden liegt, auf der Ostseite in den unteren 3000 m eine Luftbewegung aus Nordost auf das Gebirge hin einsetzt, die zu Stauerscheinungen Anlaß geben muß. Das Aufkommen einer zeitweise geschlossenen Sc- und Ac-Bewölkung über Mendoza und Villavicencio, was in diesem Gebiet keineswegs eine alltägliche Erscheinung darstellt, steht damit in Zusammenhang. Die durch den hohen Druckfall im Westen induzierte Hebung der Luftmassen am Osthang des Gebirges bzw. der so hervorgerufene Massenzuwachs ist groß genug, die hohe Druckwelle zu kompensieren und allein in einem schmalen Gebiet östlich des Gebirgskammes einen verfrühten Anstieg zu ermöglichen; wenigstens ist von diesem Effekt in Villa Mercedes, das etwa 400 km weiter im Osten gelegen ist, nichts mehr zu erkennen. Auch die beiden Temperaturkurven zeigen, daß die geringe Abkühlung am 20. nur auf der Westseite des Gebirges zeitlich in direktem Zusammenhange steht mit dem Wechsel des horizontalen Druckgradienten bei Durchgang des Höhentroges, während sie auf der Ostseite etwas verfrüht einsetzt. Es ist daher der Schluß zu ziehen — den man auch durch Korrelationsbetrachtungen belegen könnte —, *daß die hohen Druckänderungen in unmittelbarer Gebirgsnähe stärkere sekundäre Effekte bedingen, in einigen 100 km Entfernung dagegen wieder weniger gestört in Erscheinung treten.*

Man wäre in einem solchen Falle direkt in Versuchung, die Worte „primär" und „sekundär" in kausalem Sinne aufzufassen; doch soll diese Frage hier nicht weiter diskutiert werden. Die Tatsache der beschriebenen Zusammenhänge an sich hat praktische Bedeutung für eine Vorhersage der Druckänderungen auf der Ostseite der Anden, wie man sie z. B. für die Konstruktion von Vorhersagekarten benötigt. Und als besonders fruchtbar erweisen sich diese Vorstellungen, wenn in den unteren Schichten der Troposphäre Kaltluft von Süden her über die argentinischen Territorien vordringt; dann kommt es nämlich zu den stärksten Druckanstiegen über dem Zentrum des Landes, wenn eine hohe Welle sich von Westen her überlagert.

Natürlich erhebt sich sofort die Frage, wie weit nach Osten hin man solche hohe Druckwellen verfolgen kann. Noch im Druckgang von Punta de Este, 35° S, 55° W, der weitest östlich gelegenen Station in dieser geographischen Breite, findet der Synoptiker häufig Druck-

änderungen, die am Vortage in Juan Fernández beobachtet wurden. Aber, wie in [4] ausgeführt, spielen in dieser Zone schon eine Reihe anderer Vorgänge mit, so daß eine einfache Korrelation der interdiurnen Änderungen für ganze Monate, wie in Abschnitt II als Hauptbeweis benutzt, nicht die geeignete Darstellungsmethode ist. Auch liegt diese Frage schon außerhalb des hier gewählten Themas, welches besonders die Vorgänge in Gebirgsnähe betrifft und in diesem „atmosphärischen Laboratorium" nachweisen sollte, wie berechtigt und weitblickend die Gedankengänge waren, die vor vielen Jahren in der Wiener Zentralanstalt ihre Wiege hatten.

Literaturverzeichnis.

1. v. Ficker, H.: Meteorol. Z. **38**, 65 und 369 (1921), **41**, 202, (1924).
2. v. Ficker, H.: Meteorol. Z. **40**, 65 und 264 (1923).
3. Hoinkes, H.: Arch. Met. Geoph. Biokl. A, **2**, 239 (1950).
4. Schwerdtfeger, W.: Anal. Soc. Cient. Argent. **151** (1951); Autorref. in Meteor. Rdsch. **4**, 49 (1951): Das thermische Tief im Nordwesten Argentiniens.
5. Flohn, H.: Arch. Met. Geoph. Biokl. A **2**, 17 (1950).
6. Loewe, F. and M. Radok: J. of Met. **7**, 58 (1950).
7. Brooks, C. E. P. und Mitarb.: Geophysical Memoirs, No 85, London 1950.
8. Schwerdtfeger, W.: Anal. Soc. Cient. Argent. **151** (1951); Ref. voraussichtlich in Meteor. Rdschr. **4** (1951): Kleiner Beitrag zur Kenntnis der aerologischen Verhältnisse über dem südlichen Patagonien.

551 . 515 . 31

Zur Trombenbildung.

Von

H. Koschmieder, Berlin.

Mit 9 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Die Aufnahmen von Staubtromben an den Lavazungen und von Wolkentromben an der Vulkanwolke zeigen eindeutig, daß die Tromben (wie andere Wolkentromben aus Feuerwolken) durch aufstrudelnde Warmluft erzeugt werden. Die kleinsträumigen Erscheinungen werden durch die Gebäudestörung des Stromfeldes erzeugt, die normalen Wolkentromben durch die Strömungsverhältnisse am rechten Böenrand, die Tornados Amerikas durch Sammlung der Wirbel der Erdrotation. Die Auslösung der Trombenbildung kann durch seitlichen Zufluß von besonders warmer oder besonders feuchter Luft am Boden oder von kälterer Luft in der Höhe erfolgen, wobei im letzten Falle eine Sperrschicht gerade weggeräumt wird. Die Bildung der Wolkensockel kann durch zufließende feuchtere Luft, aber auch durch eine Druckerniedrigung auf ihrem Querschnitt erklärt werden. Für die Mindestdruckerniedrigung in den Tromben wird eine Formel angegeben, die für Europa etwa 50 mb ergibt, doch kann in den Tornados eine mehr als doppelt so große Druckerniedrigung erreicht werden. Die größte Schwierigkeit in der Erklärung der Tromben bietet die Frage, durch welche Bedingung das Stromfeld gegenüber der normalen Cumulusströmung räumlich so stark eingeengt wird. Nach Auffassung des Verfassers ist es die Trägheit der nach der Mitte hin zusammenstürzenden Luft.

Summary. Photographs of dust-devils at streams of lava and of cloud tornadoes at volcanic clouds show clearly that the tornadoes (like other cloud tornadoes of fire clouds) are formed by eddying warm air. The smallest phenomena are formed by perturbations of the field of flow through buildings, the normal cloud tornadoes by the conditions of current at the right limb of squalls, and the American tornadoes by combination of the whirls of the rotation of the earth. The formation of a tornado can be released by lateral inflow of exceptionally warm or moist air at ground level or of colder air in the altitude, in the last case an intercepting layer is just being removed. The formation of the cloud pedestal can be explained by an afflux of moist air, but also by diminishing pressure on its cross section. A formula is given for the minimum diminution of pressure in the tornadoes, which is of about 50 mb in Europe; but the lowering of pressure in big tornadoes can be double this

amount. The greatest difficulty in explaining the tornadoes is: which conditions compress so strongly in space the field of current as compared to the cumulus current? From the author's conception it is the inertia of the air which is collapsing towards the centre.

Résumé. Les photographies de trombes de poussière sur les coulées de lave ainsi que celles des trombes sous les nuages volcaniques montrent indiscutablement que les trombes (comme celles qui s'observent sous les nuages d'incendie) sont causées par de l'air chaud qui s'élève en tourbillonnant. Les plus petits phénomènes de ce genre sont dûs aux perturbations apportées au

Abb. 1. Eine der zahlreichen Kleintromben (ohne erzeugende Mutterwolke) am Santorin-Vulkan, die sich am unteren Ende der Lavazunge bilden und mit dem Winde seewärts wandern. Die Drehbewegung war mitunter unmittelbar zu sehen. Gemessene Höhe solcher Lavatromben bis 550 m, Lebensdauer bis 3 Minuten. Der „Wasserfleck" am Fuß der Tromben war mitunter auf einem Wege von 3 km zu verfolgen. Entstehung vornehmlich bei sehr schwachem Wind ($\leqq$ 2 m/sec). 20. Dezember 1925. Aufnahme: Dr. F. Dobe. Reproduktion *nicht* retuschiert.

champ de courant par les édifices; les trombes ordinaires ont pour origine les conditions de circulation de l'air au bord droit du grain, et la tornade d'Amérique résulte de la concentration de tourbillons de la rotation terrestre. La formation des trombes peut être déclanchée par un apport latéral d'air particulièrement chaud ou humide au niveau du sol ou par apport d'air plus froid en altitude; dans ce dernier cas il y a destruction d'une couche de barrage. On peut expliquer la formation du pied nuageux par afflux d'air plus humide, mais aussi par baisse de pression dans sa section. On établit une formule indiquant la diminution minima de la pression dans les trombes qui donne pour l'Europe environ 50 mb.; mais dans la tornade la baisse peut être plus que doublée. La plus grande difficulté que l'on rencontre pour expliquer les trombes est de savoir pourquoi le champ de courant se resserre si fortement par rapport au courant normal du cumulus. D'après l'auteur cela est dû à l'inertie de l'air qui s'étroule vers le centre.

1. Neue Belege für alte Vorstellungen. Daß die Tromben durch *aufsteigende Warmluft* unterhalten werden, zeigen die Trombenbildungen aus Brand- und Vulkanwolken. Für das erste als Beispiel die kurze Schilderung von H. Markgraf [*1*] und die Lichtbilder der Tromben bei dem Ölbrand von San Louis Obispo [*2*], für das zweite die erstaunlichen Aufnahmen des Santorinausbruches von F. Dobe [*3*], wo Staub- und Wolkentromben nebeneinander auftreten (vgl. Abb. 1 und 2). Daß ein herabstürzender „Kaltluftballen" gelegentlich als *Auslösung* (trigger)

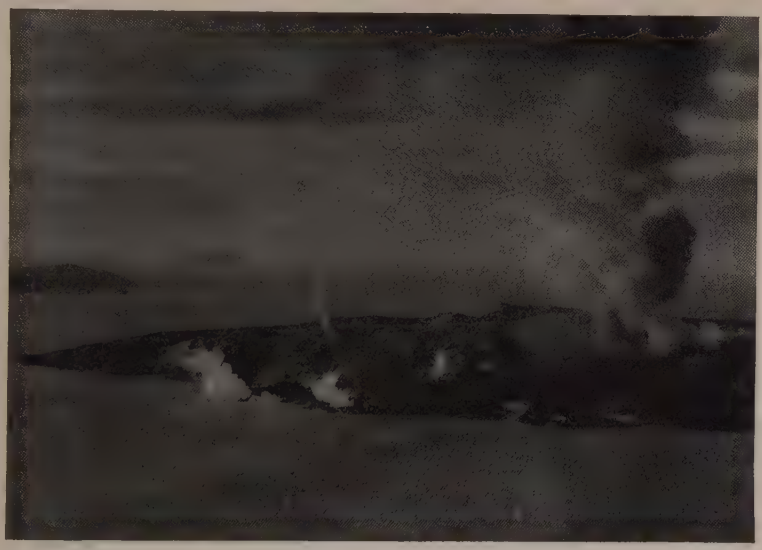


Abb. 2. Eine der bis zur Vulkanwolke hinaufreichenden Tromben auf Santorin. In der Mitte blind, was auf eine geringe Druckerniedrigung hindeutet. Derselbe Tag wie in Abb. 1, aber eine davon unabhängige Erscheinung. Aufnahme: Dr. F. Dobe. Von einem gewerbsmäßigen Retuscheur überarbeitet, mit der einzigen Auflage, in der Reproduktion dieselben Kontraste erscheinen zu lassen wie auf dem Originalabzug. Die Retouche ist nicht besonders gut gelungen. Aber sie läßt wenigstens den auf dem Original sehr zarten oberen Teil der Trombe erkennen, der ohne Retouche in der Reproduktion verschwunden wäre.

auftreten kann, ist schon 1943 [*4*] an Hand von Beobachtungen Durwards [*5*] an Staubtromben ausführlich dargelegt worden.

2. Die Rotation der Tromben ist von jeher, z. B. auch in A. Wegeners 1917 erschienenem Buch über die „Wind- und Wasserhosen in Europa" durch die Erhaltung des Drehimpulses erklärt worden. Diese Vorstellung war so allgemein geworden, daß ich in der zeichnerischen Darstellung meines Trombenmodells [*6*] die Drehbewegung weglassen konnte und nur in der Unterschrift darauf hinzuweisen brauchte.

Wenn hier eine Schwierigkeit vorliegt, dann nur im umgekehrten Sinne: man bekommt zuviel „Wirbel". D. Brunt [*7*] hat die in San Louis Obispo [*2*] freigewordene Wärmemenge und die durch die Schlotströmung gejagte Luftmenge überschlagsweise berechnet, die eine Scheibe

von 1 km Dicke und 50 km Radius ausfüllt. Bringt das ursprünglich in bezug auf die Erde ruhende Teilchen seinen Drehimpuls (der Führungsgeschwindigkeit) mit, so erreicht es nach BRUNT in 1 km Abstand von der Schlotachse eine (maximale) Tangentialgeschwindigkeit von 142 m/sec. Das ist ein durchaus vernünftiger Wert; aber der Drehsinn ist dann *zyklonal*. Wie erklären sich nun die *antizyklonalen* Tromben, die in Europa fast ebenso häufig sind wie die zyklonal rotierenden (was auch für zahlreiche Tromben des Ölbrandes gilt)?

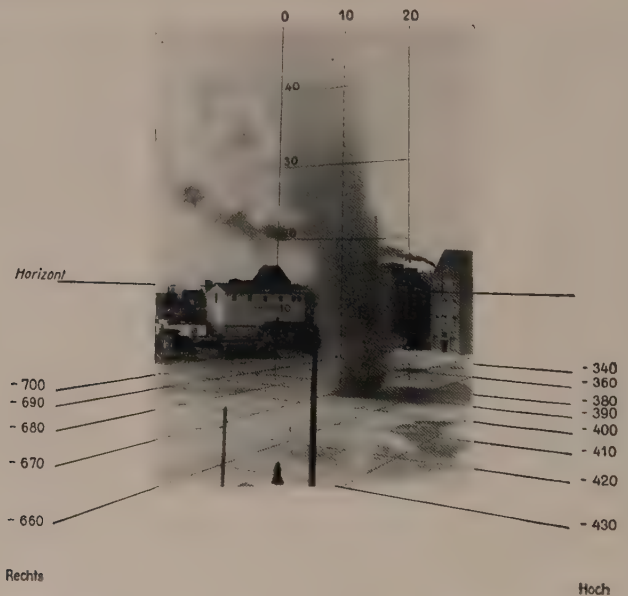


Abb. 3. Die zweite Staubtrombe von Bremen am 7. Juni 1950. Erste Aufnahme. Durchmesser des Staubkörpers am Boden 6 m, in 10 bis 30 m 12 m. „Rechts" und „Hoch" = x- und y-Koordinaten. Aufnahme: Fräulein BRÜNNLEIN. Horizontal- und Vertikalgitter: H. MEYER.

Woher stammen die in der Trombe aufgesammelten Wirbel? Beginnen wir mit den kleinsten Tromben, den *Staubtromben* ohne Mutterwolke. Sie entstehen meist an oder hinter Hauskanten. Bei der prachtvollen Staubtrombe von Bremen (vgl. Abb. 3 und 4) ist dies unmittelbar beobachtet worden und im Anhang D der vorliegenden Arbeit näher erläutert. Es erscheint als eine schöne Bestätigung des eben Gesagten, daß *die Staubtromben* — als schwächste Trombenerscheinung — *ihren Drehsinn ändern können* [8], vermutlich dann, wenn sie in eine Gebäudestörung geraten, die entgegengesetzte Zirkulation besitzt. — Die Drehbewegung der *Wind- und Wasserhosen Europas* wird im nächsten Abschnitt mit Gleitwirbelschichten am Rande der Böenfront in Zusammenhang gebracht, deren horizontale Abmessungen schon nach Kilometern zählen. Und für die größten Tromben, die zerstörenden *Tornados Nordamerikas*, gilt wohl die Erklärung von D. BRUNT, da — wenigstens nach

älteren Statistiken — 95% aller Tornados zyklonal rotieren. Die größten Schlotströmungen, die *Taifune*, besitzen schließlich ausnahmslos zyklonale Rotation. Diese Stufenleiter ist gut vorstellbar, denn sie ordnet den größeren Erscheinungen ein größeres Einzugsgebiet zu, was man von vornherein erwarten soll.

3. Die Seitenstellung der Tromben Europas ist wohl bedingt durch Ernährungsschwierigkeiten. Das heißt folgendes: Soll ein *zweidimen-*

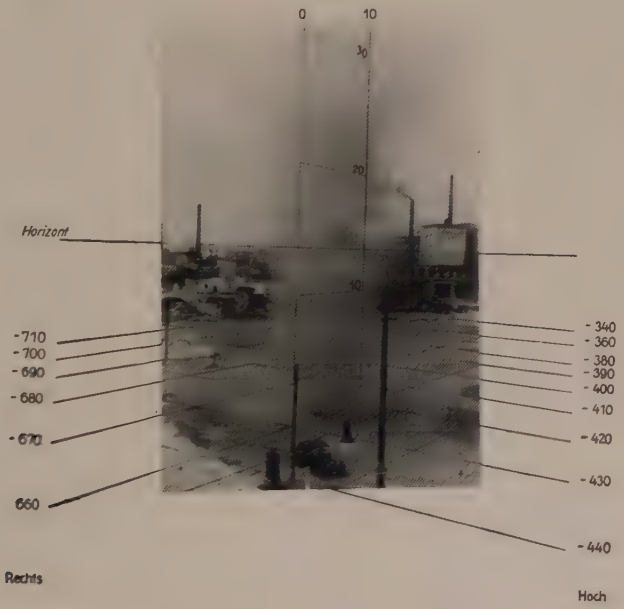


Abb. 4. Die zweite Staubtrombe von Bremen am 7. Juni 1950. Zweite Aufnahme. Durchmesser des Staubkörpers am Boden 5 m, in 10 m Höhe 16 m. „Rechts" und „Hoch" = x- und y-Koordinaten. Aufnahme: Fräulein Brünnlein. Horizontal- und Vertikalgitter: H. Meyer.

sionaler Cumulonimbus ohne „Einziehen" (entraining) von Außenluft in Höhe des Cumulonimbus rasch wachsen, d. h. soll er nur von unten ernährt werden, so wird unten von vorn und hinten ein horizontaler Zufluß von so hoher Geschwindigkeit benötigt [*9*], wie sie niemals beobachtet wird. Ist der Cumulonimbus nicht zweidimensional, nicht unendlich breit quer zur Zugrichtung, so kann an seinen seitlichen Enden ein Zufluß zusätzlich von der Seite, ein Einziehen von der Seite und von rückwärts erfolgen. Die Türme („*Zellen*") an den Seitenenden des breiten Cumulonimbus werden daher am raschesten in die Höhe schießen (ohne daß sie eine größere Höhe als der Nachbarturm zu erreichen brauchen). Dabei ist das rechte Seitenende des Cumulonimbus dadurch bevorzugt, daß viele Gewitter [*10*] ihre *rechte Seite* in das Gebiet der Warmluft ausdehnen. So wird die von A. Wegener entdeckte „*Rechtsstellung*" der Tromben verständlich. Daß diese rechtsstehenden Tromben meist

zyklonal rotieren, ist, wie schon früher [6] auseinandergesetzt, verständlich durch die zyklonalen Gleitwirbel aufrechter Achse, die zwischen der ungestörten Strömung am rechten Rande des Cumulonimbus und dem im bewegten System rückwärts erfolgenden Ernährungsstrom auftreten.

4. Gegen die Vorstellung, *daß die* **Sperrflächen** *eine Rolle für die Bildung der Wind- und Wasserhosen in Europa spielen,* hat G. Swoboda [11] Einwendungen erhoben. Sicherlich hat er recht, wenn er darauf hinweist, daß *in* dem Cumulonimbus Inversionen *nicht* anzunehmen sind. Das ist aber auch nicht notwendig, es genügt vollkommen ein Durchbrechen einer feuchtstabilen Schicht, die *über* dem Cumulonimbus liegt. Das ist ein Vorgang, der oft unmittelbar beobachtet wird. Dabei braucht es nicht zu einer *Wolkenprotuberanz* zu kommen: die Aufwindschlote, die 1938 von den deutschen Segelfliegern [12] entdeckt und durch das Thunderstorm Project [13] zum Regelfall erhoben wurden, sind von außen niemals erkannt worden. Doch ist eine solche Protuberanz anscheinend einmal [14] beobachtet worden, und die Aufnahmen E 1 und E 2 der Thiessower Trombe [6] zeigen auch in der Reproduktion über der Trombe einen Turm, der noch von einem kleinen Türmchen, schätzungsweise in 2500 bis 3000 m Höhe, gekrönt ist. Ich sehe keine Schwierigkeit, je nach den Umständen eine wesentlich höhere Sperrschicht anzunehmen.

Weiter hat sich G. Swoboda dagegen gewandt, das Durchbrechen der Sperrschicht durch einen besonders *warmen* Luftballen zu erklären; er glaubt eher, daß ein besonders *feuchter* Ballen diese Aufgabe erfüllen könnte. Aber schon F. H. Schmidt [15] hat darauf hingewiesen, daß diese Annahme über See gleichen Schwierigkeiten begegnet wie die Annahme eines besonders warmen Ballens.

5. Für einen besonders feuchten Luftballen führt G. Swoboda noch den **Wolkensockel** [16] an, d. h. die Ausstülpung der Wolkenunterfläche nach unten in der Nähe der Trombe. Er meint, daß dieser nicht durch einen wärmeren Ballen erzeugt werden könne, da dessen Kondensationsniveau *höher* liege als das der Umgebung. Diese Annahme trifft zu, wenn man am Boden dem Ballen und der Umgebung *gleiche spezifische Feuchte* erteilt. Aber dafür liegt kein Grund vor. Erteilt man z. B. dem Ballen und der Umgebung *gleiche relative Feuchte*, so sind die Kondensationsniveaus h_k praktisch gleich hoch. (1. Beispiel: $r = 80\%$, $t_0 = 30°$ C, $t_0' = 32°$ C, $h_k = 455$ m, $h_k' = 455$ m; 2. Beispiel [entspricht etwa der Trombe von Thiessow]: $r = 80\%$, $t_0 = 20°$ C, $t_0' = 22°$ C, $h_k = 445$ m, $h_k' = 435$ m.) Für die Deutung des Wolkensockels muß man beachten, daß der Kondensationsbeginn vom *Druck* und nicht von der Höhe abhängt. Man kann deswegen daran denken, daß der Wolkensockel eine zweite Röhre andeutet, in der die Druckerniedrigung wesentlich geringer ist als in dem Trombenschlauch. Das Problem der *Doppelröhren* [17] hat durch die Radaraufnahmen der Hurricanes heute eine viel weiter reichende Bedeutung gewonnen.

6. Die Erörterungen in 4 und 5 sollen keineswegs ausdrücken, daß eine **Labilisierung** *ausschließlich* durch Zufluß eines warmen Luftballens

am Boden zustande kommen kann; Ausschließlichkeit hat sich auch in der Meteorologie nicht bewährt. Die Labilisierung kann im Einzelfall auch durch Zufluß eines feuchten Ballens am Boden hervorgerufen werden oder durch Zufluß (Advektion) eines kalten Ballens in der Höhe, freilich nicht in dem Sinn, daß dieser Ballen herabstürze und so die Trombe als Abwindschlauch bilde — dagegen sprächen alle Beobachtungstatsachen — sondern in dem Sinne, daß dieser Luftballen eine bis dahin wirksame Sperrung beseitigt. So unwahrscheinlich *unmittelbare* großräumige Labilisierungen von oben sind, auf *kleiner* Fläche sind sie nicht unwahrscheinlicher als besonders warme oder besonders feuchte Luftballen am Boden. Die Tromben sind an sich wenig wahrscheinliche Erscheinungen und bedürfen zu ihrer Erklärung wenig wahrscheinlicher Zustände oder Vorgänge.

Daß bei den im Warmsektor, oft kurz vor der Böenfront auftretenden Tornados eine unmittelbare vertikale Labilisierung nicht eintritt, sondern eine *Labilisierung erst durch Erwärmung von unten her erreicht wird*, geht eindeutig daraus hervor, daß die Tornados (wie die Tromben) einen *stark ausgesprochenen täglichen Gang der Häufigkeit* besitzen: sie entstehen überwiegend zwischen 15 und 16 Uhr (Finley nach Hann-Süring [*18*]). Und der große Einfluß der Feuchte zeigt sich in der geographischen Verteilung der Tornados: sie weist (vgl. z. B. [*4*], Abb. 230) ein starkes Maximum in der feuchten Mississippiniederung auf, während die trockenen Weststaaten fast tornadofrei sind. Dies zur Frage einer plötzlichen Labilisierung.

7. Die Bestimmung der Druckerniedrigung. Schon A. Wegener [*19*] hat darauf hingewiesen, daß die Druckerniedrigung mindestens so groß sein muß, daß die durch sie hervorgerufene adiabatische Temperaturerniedrigung zur Kondensation ausreicht. Nach der Hennigschen Formel ist das Kondensationsniveau $h_k = 120\,(t - \tau)$, $[h_k] = m$, τ = Taupunkt. Die Höhe h_k, durch die barometrische Höhenstufe dividiert, ergibt dann nach A. Wegener $-\Delta p = 15{,}0\,(t - \tau)/(1 + \alpha\, t)$, $[\Delta p] = \text{mb}$.

Merkwürdigerweise ist diese aufschlußreiche Formel meines Wissens nie auf eine Trombe angewandt worden, vermutlich deswegen, weil keine Werte von t und vor allem auch nicht von τ vorlagen. Die Schätzungen sind, besonders wegen der oft erwähnten „*Schwüle*", in der Tat sehr unsicher. Man kann aber aus den Trombenbeobachtungen selbst zwar nicht t *und* τ, aber den hier in Frage kommenden Wert $t - \tau$ leicht angeben, unter der Voraussetzung, daß für die Mutterwolke das Cumulus-Kondensationsniveau gültig ist, was zulässig erscheint. Dann ist die beobachtete Wolkenhöhe h_w in der ungestörten Umgebung der Trombe gleich h_k, also $t - \tau = h_w/120$ und $-\Delta p = \frac{15{,}0}{1 + \alpha t} \cdot \frac{h_w}{120} = \frac{h_w}{8\,(1 + \alpha\, t)}$, $[\Delta p] = \text{mb}$. Für $t = 20$ (30°) wird $8\,(1 + \alpha\, t) = 8{,}59$ (8,88), so daß mit hinreichender Genauigkeit die Mindestdruckerniedrigung einer bis zum Erdboden herabreichenden Trombe (von 200 bis 1200 m Höhe)

$$\Delta p = -0{,}11\, h_w, \quad [\Delta p] = \text{mb}, \quad [h_w] = \text{m}.$$

Sehr viel einfacher kommt man zu diesem Ergebnis, wenn man sich klarmacht, daß *Wolkenunterfläche und Außenrand der Trombe ein und dieselbe Fläche gleichen Druckes* sind. Denn auf beiden wird jeweils die nicht von der Höhe, sondern nur vom Druck abhängige Kondensationstemperatur erreicht.

Diese Vorstellung reicht auch dann aus, wenn die Trombe blind ist. Ist h_f die Höhe des unteren Endes der blinden Trombe, so ist dort die Druckerniedrigung gegenüber dem ungestörten Feld in gleicher Höhe

$$\Delta p' = -0{,}11\,(h_w - h_f).$$

In den „Kleinräumigen Luftbewegungen" [*4*, Kap. VIII] sind sieben Berichte über Tromben zusammengestellt, für die die Wolkenunterfläche hinreichend bekannt ist. Für diese ergeben sich folgende Mindestdruckerniedrigungen

Ort	Mindestdruckerniedrigung
Dubrovnik	37 mb
Pensacola	41 „
Thiessow	54 „
Hindelopen	55 „
Genfer See	55 „
Pötenitzer Wiek	62 „
Cottage City	121 „

In Europa kann man demnach mit einer Mindestdruckerniedrigung in Tromben von

$$-\Delta p = 50 \text{ mb}$$

rechnen. Die einzige Trombe, die bisher über einen Barographen hinweggezogen ist, scheint die von Bizerta [*20*] zu sein. Sie brachte in bester Übereinstimmung mit dem eben Gesagten $\Delta p = -46{,}7$ mb. In Nordamerika wird in mittleren Breiten ($\varphi = 42°$)

$$-\Delta p = 100 \text{ mb}$$

noch übertroffen. Diese Zahl erscheint zunächst unvorstellbar hoch, aber man wird in den *Tornados* noch größere Werte anzunehmen haben. Anders lassen sich die nach außen herausgebrochenen Kaminzüge oder ein nach außen herausgebrochener Ziegelbelag [*21*] von 10 cm Dicke nicht gut erklären.

8. Diese erstaunlichen **Druckerniedrigungen** können niemals statisch erklärt werden. Sie können auch nicht *unmittelbar* durch die plötzliche Labilitätssteigerung erzeugt werden. Man kann sie durch die Vorstellung verständlich machen, daß durch die plötzliche Labilitätssteigerung die Luft auf großer Fläche entlastet wird und sie dadurch nach der Mitte zusammenstürzt. Dabei bewirkt die Trägheit der zusammenstürzenden Masse in der „Mitte" ein Herausquetschen der Luft nach oben, auf einer Linie, die — je nach der vom Zufall bestimmten Art des Zusammenstürzens — vertikal oder geneigt ist. *Auf dieser Linie (und ihrer Umgebung) paßt sich das Druckfeld dem Geschwindigkeitsfeld an* (während man in der Meteorologie meist das Umgekehrte anzunehmen Veranlassung

hat), auf ihr entsteht der starke Unterdruck. Anders lassen sich — soweit sich erkennen läßt — weder die ungeheuren Beträge der Druckerniedrigung noch die Tatsache erklären, daß *die Lage des Trombenschlauches schon im Augenblick des Entstehens stark geneigt sein kann* [*22*].

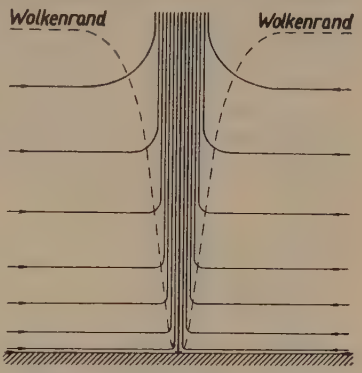


Abb. 5. Schemazeichnung des Stromlinienverlaufes in einer Wolkentrombe nach H. Koschmieder 1939: „Einfachstes Trombenmodell: Stromlinien ausgezogen. Stärkstes Einströmen unten. Stärkstes Aufsteigen auf der Achse. Trichterwolke gestrichelt, im wesentlichen gebildet durch adiabatische Abkühlung bei horizontaler Annäherung an die Wirbelachse. Nur im obersten Teile hart unter der Wolke vielleicht adiabatische Abkühlung durch Hebung."

9. Im vorhergehenden ist mehrfach mit Bedacht der Ausdruck „verständlich machen" gebraucht worden; denn um sehr viel mehr wird es sich nicht handeln, solange man an die Erklärung der Tromben von Seiten der — sehr unvollständigen — Beobachtungen herangeht. Eine **Theorie der Tromben** wird nur auf mathematischem Wege zu erreichen sein. Gegenüber den zahlreichen Versuchen, die Tromben im Modell nachzuahmen, liegt in der atmosphärischen Strömung eine eigentümliche Schwierigkeit vor: abgesehen von der Erdoberfläche und der Tropopause existieren keinerlei feste Grenzen (keine festen Ausflußöffnungen oder ähnliches). Am besten werden die Verhältnisse an Hand einer unveröffentlichten Skizze aus dem Jahre 1939 (vgl. Abb. 5) erläutert, die wieder die Drehbewegung als erklärbare Begleiterscheinung beiseite läßt. Das Stromfeld ähnelt überraschend dem von W. Tollmien [*23*] berechneten (vgl. Abb. 6), [das sich schon bei thermischen Konvektionsströmungen kleiner Geschwindigkeit bei geeigneten Randbedingungen einstellt, wie die zur Zeit hier laufenden Versuche von Herrn Dunn-Christensen zeigen]. Das Problem bei der Trombenbildung ist also folgendes: Was ersetzt in der Atmosphäre den festen Rand (die Einströmöffnung)? Nach den Ausführungen in 8 ist es die Trägheit der nach innen zusammenstürzenden Luftmasse.

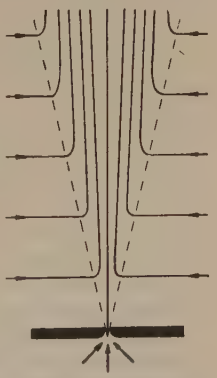


Abb. 6. Stromlinien eines Luftstrahles hinter einer festen Öffnung. (Nach W. Tollmien.)

Für eine mathematische Behandlung kann man nur von den zwei Aussagen ausgehen, daß die Störung des ursprünglichen Feldes im ganzen Raum eindeutig ist und nach außen rasch abklingt. Damit scheint eine Lösung grundsätzlich möglich zu sein, wenn auch die mathematischen Schwierigkeiten ungewöhnlich groß sind. Dabei kann kein Zweifel sein, daß ein Parameter der Rechnung die irgendwie definierte Instabilität sein wird. Es wird sich auch hier zeigen, daß beim

stetigen Überschreiten kritischer Werte der Instabilität die Strömung mehr oder weniger unstetig von einer Form in eine andere umschlägt.

10. Noch ein Wort zur **Trombenforschung**. Es ist heute üblich, die Trombenaufnahmen *unretuschiert* zu veröffentlichen. Das scheint mir nicht richtig zu sein; auch bei der besten Reproduktion geht vieles von dem verloren, was der Beschauer des Lichtbildes noch mit Sicherheit erkennt. Das Richtige wäre demnach, die Bilder soweit zu retuschieren, daß in der Reproduktion dieselben Kontraste auftreten wie auf dem Lichtbild. (Ein solcher Versuch ist in Abb. 2 gemacht, während Abb. 1 unretuschiert reproduziert ist.) Dazu bedarf es allerdings eines Retuscheurs, der die Möglichkeit erhält, hierfür Erfahrungen zu sammeln. Deswegen erscheint es zweckmäßig, — vielleicht im Rahmen einer internationalen Zusammenarbeit — ein Nachrichtenblatt zu schaffen, dem grundsätzlich von den meteorologischen Fachzeitschriften die Veröffentlichungen über Tromben abgetreten werden. Das würde zudem sicherstellen, daß bei der Bearbeitung von Tromben ein Mindestmaß der Fragen beantwortet wird, die früher von der Trombenkommission der OMI formuliert worden waren. Das Nachrichtenblatt würde die genormte Routinearbeit leisten, während es dem Autor überlassen bliebe, das zur Geltung zu bringen, was ihm als wesentlich erscheint.

Anhang: Die zwei Staubtromben von Bremen vom 7. Juni 1950.

A. Zeugenbericht: Fräulein M. Brünnlein. Die *erste* und stärkere Staubtrombe entwickelte sich „an einer freien Stelle" des Grünenkamps. Sie erreichte zirka 250 m Höhe. Ihre Lebensdauer wird zu 5 (nach anderen Berichten zu 15 [?]) Minuten angegeben.

Die *zweite* (Abb. 3 und 4) bildete sich gegen 13.15 Uhr „an der Ecke des hohen dunklen Speichers" (Abb. 3). „Der Staub wirbelte erst lange Zeit am Boden, bis er plötzlich in die Höhe schoß." Der Wirbel begann dann SSE-wärts zu wandern. Er erreichte „nur etwa 100 m Höhe". Papierstücke von $^1/_2$ m² Größe durchliefen diese Höhe und fielen dann herab. Die Trombe löste sich erst in den Ruinen der Langemarckstraße vom Boden ab und fiel dann in sich zusammen. Der Himmel war wolkenlos oder nur von einem dünnen (Ci?-) Schleier oder einer Staubschicht überzogen. *Drehsinn:* Zyklonal.

Kamera: 12 m über dem Grünenkamp. $f = 5$ cm, Film 17/10 DIN. Belichtung $^1/_{100}$ sec, Blende 5,6. Aufnahmen: Fräulein M. Brünnlein.

B. Wetterlage: Herr Tröger: „Am Morgen des 7. Juni befand sich Mitteleuropa im Bereiche eines flachen Hochdruckgebietes mit Kernen von mehr als 1025 mb an der Odermündung, über den Westalpen und über den Cevennen. Über Holland lag ein Höhenhoch in 700 mb und 500 mb. Die relative Topographie zeigte eine Warmluftinsel von Holland bis Nordirland.

Am Boden wanderte eine sehr schwach ausgeprägte Kaltfront am Vormittag über Westdeutschland hinweg, sie erreichte Bremen — nach Aufzeichnung des Tagebuches — um 12.00 GMT. Ab 11 Uhr GMT hatten sich kaum $^1/_8$ schwach entwickelte Cu gebildet, deren Höhe auf Grund der Temperatur und des Taupunktes (29,4° bzw. 13,5°) zu 2000 m geschätzt wurde. Ihre obere Grenze dürfte bei 3000 m gelegen haben; an dieser Stelle zeigten die beiden Aufstiege von Jever um 16 Uhr und Hannover um 14 Uhr eine deutliche Inversion. Darunter war der Gradient trocken-adiabatisch, darüber leicht feucht-labil.

Auf dem Diagramm des Fuessschen Böenschreibers erkennt man eine sehr langsam vor sich gehende Winddrehung von NE über S nach W, die im ganzen drei Stunden in Anspruch nahm; an der Windgeschwindigkeit ist noch weniger Auffallendes zu sehen. Die stärksten Böen erreichten $6^1/_2$ m/sec; zur Zeit der Staubtrombe zeigte sich nichts Bemerkenswertes. Es war somit weder in der Windrichtung noch in der Geschwindigkeit ein Anzeichen einer Diskontinuität angedeutet."

C. Photogrammetrische Auswertung der Einzelaufnahmen: Herr H. Meyer (Institut für Photogrammetrie der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg).

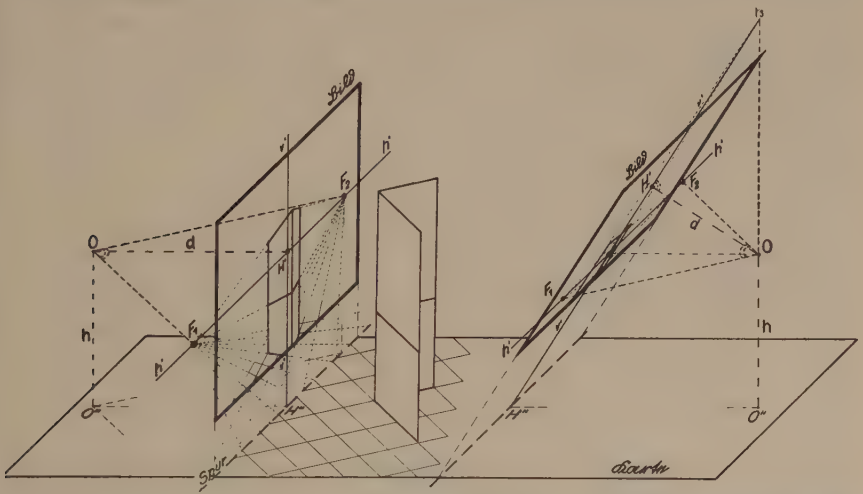


Abb. 7. Zentralperspektive bei Waagrecht- und Schrägaufnahme. Prinzip der Netzübertragung. Nach H. Meyer.

Gegeben: 2 Amateuraufnahmen (Bildausschnitt 6,5 × 9,5),
1 Stadtplanlichtpause 1 : 1000, Lage des Standpunktes und dessen ungefähre Höhe.

Gesucht: Übertragung des Kartengitternetzes in die Bilder.

Es sind hierbei zwei Aufgaben zu lösen:

1. Ermittlung eines Grundrisses aus einem gegebenen perspektiven Bild (nach Lambert: Umkehrung der Perspektive).

2. Zeichnung eines perspektiven Bildes nach einem gegebenen Grundriß.

Voraussetzung hierfür, besonders für 1 ist, daß es sich um eine wirkliche Zentralperspektive handelt, d. h. daß Verzeichnungsfehler des photographischen Objektivs und die affine Verzerrung des Papierbildes durch Schrumpfung (verschieden in Laufrichtung des Papiers und senkrecht dazu) vernachlässigt werden können.

Zur Durchführung von 1 benötigt man die innere und die äußere Orientierung der Kamera.

Die innere Orientierung (vgl. Abb. 7) besteht aus der Bildweite d (gewöhnlich gleich f) und der Lage des Bildhauptpunktes H' (Lotfußpunkt auf der Bildebene vom bildseitigen Projektionszentrum).

Bei einer Amateurkamera sind diese Stücke nicht immer einwandfrei festzustellen. Die angegebene Brennweite gilt nur für die Einstellung auf ∞ und auch dann oft nur näherungsweise (Differenz bis zu 10 mm). Hinzu kommt, daß d variabel ist (Nah- und Ferneinstellung), wodurch auch kleine Lageänderungen von H' verursacht werden können. Zudem ist H' nicht festgelegt; er wird im allgemeinen wohl dem Diagonalenschnittpunkt des Kameraplattenanlegerahmens, also dem Diagonalenschnittpunkt des Negativs, entsprechen. Für Abzüge gilt das aber nicht unbedingt, da diese meist kleiner sind als das Negativ und nur den Kopierrahmenausschnitt zur Begrenzung haben. Noch schlechter steht es in dieser Hinsicht mit Bildausschnitten, die durch Vergrößerung gewonnen werden, da hierbei irgendein Teil des Negativs vergrößert wird, dessen Begrenzung keine Beziehung zur Negativbegrenzung hat.

Die äußere Orientierung, das sind die räumlichen Koordinaten des dingseitigen Projektionszentrums sowie die räumliche Richtung der Aufnahme-

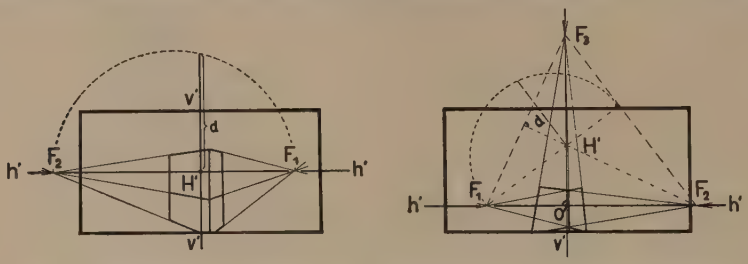


Abb. 8. Ermittlung von Fluchtpunkten, Horizont und Bildweite. Nach H. MEYER.

achse (meist der optischen Achse gleichzusetzen), ist entweder an Ort und Stelle durch Einmessung auf lagemäßig bekannte Punkte zu ermitteln oder häuslich auf Grund der Bildkoordinaten durch Rückwärtseinschnitt über mindestens drei bekannte Punkte.

Von den Daten der äußeren Orientierung wird man bei Amateuraufnahmen höchstens den Standpunkt näherungsweise haben, während die Richtung immer nach dem Bild bestimmt werden muß. Dazu braucht man Bildkoordinaten, deren Achsenkreuz in H' seinen Nullpunkt hat und deren $+ x$-Achse parallel zum Bildhorizont $h'\,h'$ genommen wird. Man muß also den Horizont und H' bestimmen. (Zum Folgenden siehe Abb. 7 und 8.)

Unter Horizont versteht man in der Perspektive das Bild einer durch das Projektionszentrum O gehenden, zum Wasserspiegel parallelen, also horizontalen Ebene. Er ist als Schnitt von Bildebene und Horizontebene eine Gerade. Diese ist zugleich Ort der Fluchtpunkte aller horizontalen Geraden, denn ein Fluchtpunkt ist das Bild derjenigen durch O gelegten Geraden, die einer Raumgeradenschar parallel ist. Sie schneidet die Bildebene in einem Punkt, eben dem Fluchtpunkt. Im Bild ist er jeweils der Schnittpunkt derjenigen Bildgeraden, deren Urbilder im Raum einer parallelen Geradenschar angehören.

Für den vorliegenden Fall interessieren uns nur Geradenscharen in waagerechten und senkrechten Ebenen und von den senkrechten Ebenen nur solche, die miteinander rechte Winkel bilden (Hauswände). Dann findet man nach den obigen Erklärungen den Horizont wie folgt (vgl. Abb. 8):

Man sucht sich im Bilde Geraden, die in der Natur waagerecht sind, also Dachfirste, Dachtraufen, Fensterreihen usw.; dagegen ist die Schnittgerade einer Hauswand mit dem Gelände nicht immer waagerecht. Von diesen Geraden bringt man die, welche in *einer* senkrechten Ebene liegen, zum Schnitt miteinander und hat damit einen Fluchtpunkt F_1. Nun sucht man eine senkrechte Ebene, die mit der ersten in der Natur einen rechten Winkel bildet, etwa die anstoßende Hauswand, und bringt deren in der Natur waagerechten Geraden auf dem Bild miteinander zum Schnitt. So hat man einen zweiten Fluchtpunkt F_2. Diese beiden Fluchtpunkte haben noch eine Eigenschaft, sie sind konjugiert zueinander, d. h. die von ihnen nach O gezogenen Geraden schließen dort einen rechten Winkel ein. Sie werden in den meisten Fällen außerhalb des Bildes liegen.

Die durch F_1 und F_2 gelegte Gerade bezeichnet dann den Horizont $h'\,h'$. Seine vorstehende Konstruktion ist für Waagerecht- und Schrägaufnahmen (s. u.) gleich.

Nun muß man den Bildhauptpunkt H' bestimmen. Im vorliegenden Fall handelt es sich um Vergrößerungen, so daß man ihn nicht nach den Bildrahmen, sondern aus dem Bildinhalt ermitteln muß. Dabei kommt es darauf an, ob die Aufnahmerichtung waagerecht oder aufwärts bzw. abwärts gerichtet war. Sind in der Natur senkrechte Linien im Bild festgehalten, prüft man dies dadurch, daß man feststellt, ob die entsprechenden Bildgeraden parallel sind oder konvergieren. Bei Parallelität liegt eine Waagerechtaufnahme vor, bei Konvergenz eine Schrägaufnahme, und zwar bei Konvergenz nach unten eine abwärts geneigte, bei Konvergenz nach oben eine aufwärts geneigte. Entsprechend der Erklärung der Fluchtpunkte ist der Konvergenzpunkt zugleich der Fluchtpunkt F_3 aller in der Natur senkrechten Geraden und das von ihm gefällte Lot auf den Horizont ist gleichzeitig die Schnittgerade einer durch O gehenden senkrechten Ebene, die mit der Bildebene einen rechten Winkel bildet und $h'\,h'$ in O' schneidet. Diese Schnittgerade bezeichnet die Bildhauptvertikale $v'\,v'$, auf der H' als Lotfußpunkt des Lotes von O auf die Bildebene erscheint. Auf dem Bild erhält man H' als Schnittpunkt der drei Höhen in dem Dreieck $F_1\,F_2\,F_3$. So wurde er in Aufnahme 1 ermittelt, die schwach nach oben geneigt ist.

In Aufnahme 2, die waagerecht ist, wurde H' anders gefunden. Man benutzt die Tatsache, daß bei einer Zentralprojektion das Doppelverhältnis von vier auf einer Geraden liegenden Punkten erhalten bleibt. Weiter muß man eine Karte des aufgenommenen Geländes haben und die Lage des Aufnahmeortes in ihr. Man muß nun versuchen, drei, besser vier in einer Geraden liegende Bildpunkte, hier an der Straßenfront, in der Karte zu identifizieren. Gelingt das, so kann man nun den Grundriß des Originalstrahlenbündels in der Karte zeichnen. Die vier Bildpunkte projiziert man senkrecht auf den Horizont und überträgt diese Punkte dann auf den Rand eines Papierstreifens oder besser auf eine auf durchsichtigem Material (Klarzell, Ultraphan usw.) gezogene Linie. Jetzt kann man diese vier Punkte so in das Originalstrahlenbündel einpassen, daß sie alle gleichzeitig auf den zugehörigen Strahlen liegen. Die Richtung der so festgelegten Geraden steht senkrecht auf der Aufnahmerichtung. Sie ist die Spur (Schnittgerade) der Bildebene in der Grundrißebene (Kartenebene). Das Lot vom Grundriß des Aufnahmeortes O'' auf sie bezeichnet mit seinem Fußpunkt den Grundriß H'' von H'. Die Entfernung $O''\,H''$ ist gleich d in wahrer Länge. Die Verlängerung des Lotes $O''\,H''$ bis zu der Kartengeraden, die der Bildgeraden durch die

vier Punkte entspricht, bestimmt mit ihrem Schnittpunkt auf ihr die Lage der Bildhauptvertikalen, die so ins Bild übertragen werden kann.

Die Bildweite d wird sonst bei Waagerechtaufnahmen so bestimmt, daß man über der Geraden durch die Punkte F_1 und F_2, die zu in der Natur sich rechtwinklig schneidenden Geraden gehören müssen, einen Halbkreis errichtet und diesen mit dem in H' errichteten Lot schneidet. Die Entfernung H'—Halbkreis ist gleich d in wahrer Größe.

Bei Schrägaufnahmen ist über einer der Höhen der Halbkreis zu schlagen und auch in H' das Lot zu errichten, womit ebenfalls d erhalten wird.

Hat man d nach dieser Methode gefunden, so kann man die Aufnahmerichtung so bestimmen, daß man den Winkel zwischen H' und einem auf den Horizont projizierten identifizierbaren Punkt konstruiert und in die Karte überträgt. Dann hat man wieder O'' H'' und im Abstand d von O'' senkrecht darauf die Spur der Bildebene.

Wenn man nun den Horizont h' h' im Bild, seine Spur (= Spur der Bildebene) in der Karte, den Hauptpunkt H' im Bild, seine Projektion H'' in der Karte sowie den Aufnahmeort O'' gefunden hat, kann man irgendwelche Punkte oder ein regelmäßiges Netz aus der Karte ins Bild übertragen.

Dazu muß man erst die Spur der Bildebene maßstabgerecht in das Bild einzeichnen. In unserem Fall soll die Aufnahmehöhe h über Grund 12 m betragen haben (= 12 mm in 1 : 1000). Um soviel muß die Spur also tiefer als h' h' gezeichnet werden. Auf diese Spur im Bild überträgt man die Schnittpunkte des Netzes mit der Spur in der Karte, wobei ihre relative Lage zu H'' von v' v' aus abzutragen ist. Zu beachten ist, daß bei einem regelmäßigen Kartennetz die Schnittpunkte auch auf der Spurgeraden im Bild gleichabständig sind. Man hat so für jede Netzgerade einen geometrischen Ort, der zweite ist der zu jeder Geradenschar gehörige Fluchtpunkt F. Nach der Definition des Fluchtpunktes ist er in der Karte zu finden als der Schnittpunkt einer durch O'' gezogenen Parallelen zu der betreffenden Geradenschar mit der Spur der Bildebene. Die Entfernung dieses Schnittpunktes von H'' wird unverändert auf h' h' übertragen, und zwar von H' aus nach derselben Seite wie in der Karte. Das Geradenbündel durch F und die vorher eingetragenen Schnittpunkte gibt die Bildgeraden des Netzes. Man kann mit ihnen die Richtigkeit von h prüfen, indem sie im Bild dieselben Punkte auf der Geländeebene berühren müssen wie in der Karte. Also muß etwa in Aufnahme 2 die Netzlinie —320 die Schnittlinie Lagerhaus—Straße in perspektiv gleichem Abstand von der linken Hausecke schneiden wie in der Karte. Die Größe des perspektiven Abstandes bekommt man auf der Spur der Bildebene in der Karte als Abschnitt zwischen den beiden zu den betreffenden Punkten gezogenen Strahlen. Stimmt diese Prüfung nicht, so ist die Spurgerade im Bild zu heben oder zu senken. So ergab sich auch für die vorliegenden Aufnahmen h = 13,5 m.

Die vorstehend gezeigte Methode der Netzübertragung geht aber so einfach nur, wenn das aufgenommene Gelände praktisch eben und horizontal ist. Sonst muß man sich bei ebenem aber geneigtem Gelände der weitergehenden Prinzipien der perspektiven Abbildung bedienen oder wenn keine irgendwie geneigte Ebene vorhanden ist, muß man jeden gewünschten Kartenpunkt in Bildkoordinaten umrechnen. Beides kann hier nicht gezeigt werden.

Die Auswertung und Ergänzung der beiden vorgelegten Aufnahmen ist wegen der schleifenden Schnitte zur Fluchtpunktbestimmung unsicher. Beide

sind etwa dreifache Vergrößerungen, da f zirka 5 cm sein soll, nach der Auswertung aber zwischen 14,2 und 14,5 liegt. Die Differenz der Gittereintragung in beiden Aufnahmen ersieht man durch den Vergleich der Schnittpunkte mit den Umrißlinien des großen Flecks rechts im Vordergrund. Sie beträgt etwa 1 m, was teilweise dadurch zu erklären ist, daß sich der Horizont in der zweiten Aufnahme etwas tiefer als in der ersten ergibt. Außerdem ist die innere Orientierung der zweiten Aufnahme nur durch die Streifeneinpassung zu finden gewesen.

Trotzdem ist für ein so unbestimmtes Gebilde, wie es eine Staubtrombe darstellt, die erreichte Lagegenauigkeit der Gitter wohl ausreichend.

D. Ergänzung: H. Koschmieder. Die Trombe von Bremen gleicht in vielem der Staubtrombe von *Rotterdam* vom 16. Juni 1934, 13 Uhr [*24*]; beide bildeten sich über einem freien Platz, waren fast senkrecht und zeigten eine besonders dunkle Färbung am Boden.

Erstaunlich ist in Abb. 3 die scharfe Begrenzung des Staubkörpers am Boden und seine zum Erdboden konvexe Gestalt. Diese kann man sich verständlich machen, wenn man beachtet, daß infolge des Haftens am Boden die Windgeschwindigkeit in der untersten, vielleicht 1 m dicken Schicht sehr stark mit der Höhe zunimmt: In einer Schicht (Dicke etwa 20 cm) wird der Staub nach dem Staupunkt gefegt, dort stark nach oben beschleunigt und von der mit der Höhe rasch zunehmenden Zentrifugalkraft nach außen gedrängt. Hierüber wird man Genaueres sagen können. Oberhalb zirka 2 m Höhe verdickt sich dann der Staubkörper nur noch wenig, hauptsächlich wohl durch Vermischung.

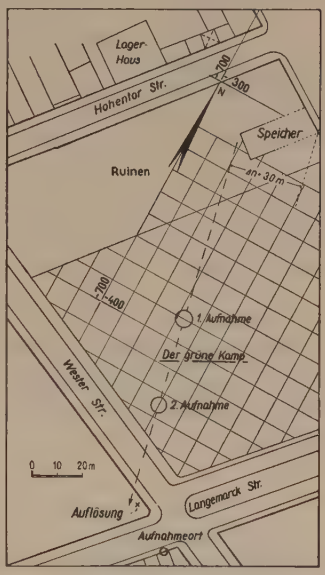


Abb. 9. Ausschnitt aus dem Stadtplan von Bremen mit der Lage des Trombenfußes nach Abb. 3 und 4, und dem Ort der Auflösung nach Angabe von Fräulein Brünnlein.

Abb. 4 zeigt in etwa 10 m Höhe eine (soweit zu erkennen) fast plötzliche Erweiterung des Staubkörpers. Es erinnert stark an eine *Doppelröhre*, deren äußerer Teil schon vom Boden abgehoben ist: man kann daran denken, daß die schon etwas verwirbelte und erweiterte Trombe einen neuen Impuls erhalten hat, der in dem alten Staubkörper unmittelbar am Boden einen neuen Fuß erzeugt, was gut der starken Schwärzung unmittelbar am Erdboden entspräche.

Die *Entstehung der Trombe* erfolgte im Lee des Speichers. Nimmt man an, daß die Trombe — wie das meist der Fall ist — in der ungestörten Windrichtung wandert, so herrscht während des Trombenzuges NNW-Wind, entsprechend der in Abb. 9 gestrichelt eingezeichneten Trombenbahn (wobei offen bleibt, ob nicht die Trombe um diese Gerade noch Pendelungen ausgeführt hat). Da der Speicher, dessen gestrichelt eingezeichnete Breite nicht ganz sicher ist, schräg zur Windrichtung steht, so ist auf seiner Westseite eine Konvergenz, auf der Ostseite eine Divergenz der Stromlinien zu erwarten,

auf der Westseite somit große, auf der Ostseite kleine Geschwindigkeiten. Die Gleitwirbel sind demnach zyklonal und der *Drehsinn* der Trombe ist damit erklärt.

Der *Betrag* der Drehgeschwindigkeit sei am Außenrand des Staubkörpers ($2r = 12$ m) $c_T = 8$ (bzw. 16) m/sec, ihre Zirkulation also $C_T = 2r\pi c_T \cong 300$ (bzw. 600) m²/sec. Anderseits ist die Zirkulation eines Rechteckes von der Breite Δn (vgl. Abb. 5) und der Tiefe Δs gleich $C_R = \frac{\Delta c}{\Delta n} \cdot \Delta n \Delta s = \Delta c \cdot \Delta s$. Soll C_T durch C_R erklärt werden, so muß $C_T = C_R$ oder $\Delta c = C_T/\Delta s$ sein. Also wird

$$\Delta c = 300/\Delta s \quad \text{bzw.} \quad 600/\Delta s \text{ [m/sec]}.$$

Wählt man $\Delta c = 10$ m/sec, so herrscht an der Westseite des Speichers $\bar{c} + 5$, an der Ostseite $\bar{c} - 5$ m/sec Windgeschwindigkeit, wo $\bar{c}$ die ungestörte Windgeschwindigkeit bedeutet. Das ist ein vernünftiger Wert. Damit wird $\Delta s = 30$ (bzw. 60) m. Nach der Trombenbahn ist $\Delta s = 30$ m wahrscheinlicher als $\Delta s = 60$ m und damit $c_T = 8$ m/sec wahrscheinlicher als $c_T = 16$ m/sec. Diese Zahlen haben keine zwingende Kraft; sie zeigen aber, daß der spezifische Drehimpuls $c_T \cdot r$ ebenso durch die Gebäudestörung erklärt werden kann wie die Drehrichtung.

Herrn Dr. DOBE, Herrn H. TRÖGER und Herrn H. MEYER bin ich für vielerlei Entgegenkommen und Hilfe zu Dank verpflichtet, besonders aber Fräulein BRÜNNLEIN, die beim Abschluß der Korrespondenz ihrem Erstaunen darüber Ausdruck gab, daß eine Trombe „so viel Staub aufwirbeln könne".

Literaturverzeichnis.

1. MARKGRAF, H.: Ann. Hydr. mar. Met. **69**, 28 (1941); FUJIWHARA, Met. Mag. 1923, p. 247 (zitiert nach [7], Brand von Tokyo nach dem Erdbeben von 1923.
2. HISSONG, J. E.: Month. Wea. Rev. **54**, 161 (1926).
3. DOBE, F.: Santorin, der Werdegang eines Inselvulkans, hrsgg. von H. Reck Berlin 1936, Bd. II, S. 109, Bd. III, Tafel LX, Bild 5 und Tafel LXIX, Bild 1 und 3.
4. KOSCHMIEDER, H.: Kleinräumige Luftbewegungen, Leipzig 1943, S. 314.
5. DURWARD, J.: Met. Mag. **72**, 185 (1937).
6. KOSCHMIEDER, H.: Über Tromben, Wiss. Abh. RfW. Berlin, VI, Nr. 3 (1940).
7. BRUNT, D.: Month. Wea. Rev. **55**, 24 (1927).
8. WILLIAMS, N. R.: Bull. Am. Met. Soc. **29**, 106 (1948), bes. S. 108.
9. KOSCHMIEDER, H.: Böen, Schlotströmungen und Hurricanes (erscheint später).
10. Vgl. z. B. [4], S. 170/171.
11. SWOBODA, G.: Experientia **1**, 180 (1945).
12. Vgl. z. B. [4], Kap. II.
13. BYERS H. R. and R. R. BRAHAM: The Thunderstorm. Washington 1949.
14. COURVOISIER, M. et L. BESSON: La Mét. **3**, 517 (1927).
15. SCHMIDT, F. H.: Experientia, **2**, 93 (1946).

16. Trombe von Thiessow, s. [*6*]; Antler-Tornado, Month. Wea. Rev. **45**, 237 (1917) (H. E. Simpson). Es sei auf die Gefahr hingewiesen, die photographischen Aufnahmen infolge der Bildperspektive falsch zu beurteilen.
17. Trombe von Thiessow, s. [*6*]; Tornado von Cheyenne, Month. Wea. Rev. **51**, 314 (1923) (G. W. Pitman); Tornado von Gothenburg, Month. Wea. Rev. **59**, 225 (1931) (A. R. Oliver).
18. Hann-Süring: Lehrbuch der Meteorologie. 3. Auflage. Leipzig 1915, S. 734.
19. Wegener, A.: Wind- und Wasserhosen in Europa, Braunschweig 1917, S. 202.
20. Meteorol. Z. **16**, 521, 1899. Auszug einer Mitteilung Voiellands. CR **128**, Nr. 5, 1899.
21. Hayes, M. W.: Month. Wea. Rev. **55**, 405, 1927, Abb. 7 und 4.
22. Veryard, R. G.: Ind. Met. Dep., Scient. Notes V, Nr. 56, 1934 (Peshawar Tornado).
23. Tollmien, W.: ZAMM **6**, 468, 1926.
24. Onweders **55**, 41 (1934).

551 . 515 . 31

(Royal Netherlands Meteorological Institute, De Bilt.)

Some New Ideas on the Formation of Windspouts and Tornadoes.

By

W. Bleeker and **A. Delver.**

With 8 Figures.

Summary. Various types of whirlwinds with nearly vertical axis are discussed, starting from the view-point, that these "weather systems" originate from "differential heating"[1]. Dust-devils, fire-tornadoes and cumulus-windspouts develop as a result of an extra heating in the centre. It is suggested, that tornadoes and other cumulonimbus-windspouts are mainly a result of the strong cooling of the air in their environment, which suggestion is supported by material gathered from a systematic study of 295 descriptions of windspouts and tornadoes, and by the results of an investigation of a recent heavy windspout over the Netherlands. Objections against the theories on the formation of tornadoes and other cumulonimbus-windspouts of WEGENER, KOSCHMIEDER, SHOWALTER, FULKS and TEPPER are brought forward.

Zusammenfassung. Verschiedene Typen von Wirbelwinden mit ungefähr vertikaler Achse werden diskutiert. Es wird dabei von dem Gesichtspunkt ausgegangen, daß diese „Wettersysteme" durch Erwärmungs- oder Abkühlungsunterschiede entstehen. Staubtromben, Feuertornados und Cumulus-Windhosen bilden sich infolge zusätzlicher Erwärmung im Zentrum. Es wird die Ansicht vertreten, daß Tornados und andere Cumulonimbus-Windhosen in der Hauptsache auf eine starke Abkühlung der Luft in ihrer Umgebung zurückzuführen sind; diese Hypothese wird durch eine systematische Analyse von 295 Beschreibungen von Windhosen und Tornados sowie durch die Ergebnisse einer Untersuchung über eine neuere schwere Trombe über den Niederlanden gestützt. Einwendungen gegen die von WEGENER, KOSCHMIEDER, SHOWALTER, FULKS und TEPPER aufgestellten Theorien über die Bildung von Tornados und anderen Cumulonimbus-Windhosen werden dargelegt.

Résumé. Les auteurs examinent différents types de tourbillons à axe à peu près vertical. Ils sont de l'opinion que ces phénomènes ont pour origine

[1] In the term "differential heating" the word "heating" will include heating and cooling.

un réchauffement ou refroidissement inégal. Les trombes de poussière ou d'incendie et les trombes quelquefois associées à un cumulus naissent par suite d'un excès de réchauffement au centre. Les tornades et autres trombes de cumulonimbus résulteraient essentiellement d'un fort refroidissement de l'air environnant; cette hypothèse s'appuie sur une analyse systématique de 295 cas de trombes et de tornades et sur une étude détaillée d'une trombe destructive récemment observée en Pays Bas. Les auteurs présentent enfin des objections aux théories de WEGENER, KOSCHMIEDER, SHOWALTER, FULKS et TEPPER sur la formation des tornades et des trombes.

1. Introduction and Statement of the Problem.

The study of more or less small and shortlived whirlwinds in the atmosphere reveals that such whirlwinds occur in various forms, which in the order of their size and destructive action are: dust-devils, windspout-like phenomena accompanying cumulusclouds, tornado-like phenomena present during intense fires, windspouts[1] accompanying cumulonimbi, and tornadoes.

From the extensive literature on these forms of whirlwinds it is clear that they certainly have some factors in common: they are all characterised by a low pressure area around which the air is moving cyclonically or anti-cyclonically with relatively high speed. Owing to this high speed the pressure gradient forces, directed to the centre, are nearly balanced by the centrifugal inertia forces, so that the winds belonging to the system can be considered as being mainly cyclostrofic. Of course there exists also a frictional inflow into the low pressure centre: the air motion has to show a component in the direction of the pressure gradient, otherwise the speed cannot be maintained. Furthermore during the building stage inflow related to the deepening of the system is present.

Convergence should lead to the filling of the low, if there were not another agency taking care of the removal of air, which removal must take place by divergence in the higher layers. In accordance with surface convergence and upper air divergence a rapidly rising current in the centre of the system is observed.

From the above it is clear, that, in summarisation, the general whirlwind phenomenon can be described as:

a) a *low pressure area with strong upward current* (part of some vertical circulation system);

b) a *rapidly rotating movement.*

The problem of the formation and maintenance of atmospherical whirlwinds can be considered as to consist in the explanation of these two features. This problem is, however, simplified by the fact, that, the upward current

[1] The term "windspout" includes cloudspouts occurring over land and over sea. As there are no essential differences between the North-American tornado and the cumulonimbus-windspout in the rest of the world, the term "cumulonimbus-windspout" will in this paper indicate the "tornado" as well, unless stated otherwise.

by some cause once being created, the whirling motion may directly result from the associated inflow in the lower layers. The only by-condition is, that the horizontal windfield present before the onset of the disturbance be sufficiently asymmetric, i.e. that it show an absolute rotation and/or shear. The asymmetric convergence towards the initially relatively weak low under the rising current then leads according to the law of conservation of areas to a fast rotating movement around the centre, whereby the centrifugal forces hinder the normal convergence. As the upper air divergence associated with the vertical circulation system may go on for some time the pressure in the centre can fall to values considerably lower than originally existed. So, the *initial asymmetry in the horizontal windfield* in the lower layers once being assumed, the problem is reduced to the explanation of the *vertical circulation system*. It will be shown that, in all cases, this circulation system may be ascribed to some effect of differential heating.

2. The Effect of Differential Heating in General.

It is well known and it has recently been stressed again by Bleeker and Andre [*1*], that for the formation of vertical currents in the atmosphere instability is not a sufficient condition, but that, at least if no mechanical perturbations take action, also small differences in heating or cooling are necessary.

This differential heating leads to a lifting of the isobaric surfaces and therefore to a lateral spreading of the air in the higher layers over the heated centre. As a result pressure falls at the surface and rises in the environment. This leads to a surface convergence and the creation of a vertical circulation system. Such a circulation system can develop in a stable atmosphere, however, it will be much stronger when it forms in an unstable atmosphere. Instability namely can be considered as having the same effect as a supplementary heating, since in an unstable atmosphere in the rising part of the circulation cooler air is replaced by warmer air. The thermal low near the surface must therefore be stronger the greater the instability of the atmosphere and the deeper the unstable layer. The theoretical treatment of the problem of thermal circulation under circumstances of various instabilities is very difficult, especially because of the horizontal frictional forces to be taken into consideration (cf. remarks in Bleeker and Andre [*1*] and Bleeker [*2*]).

3. Differential Heating as a Factor in Whirlwind-inception.

Dust-devils, Fire-tornadoes and Cumulus-windspouts.

Dust-devils occur over heated sand during the day. The atmosphere in the lower layers will be absolutely unstable though not in a very thick layer. The upward current necessary to start the whirl will form where extra heating takes place owing to exposure, composition and water-content of the soil.

A **fire-tornado** is formed in the same way: A thermal low with associated upward current is created as a result of intense local heating by some fire (e.g. oil-fire). From the fact, that these tornadoes are sometimes destructive and show condensation-funnels, it may be concluded, that they are accompanied by rather low pressure.

A **cumulus-windspout** arises along the axis of the upward current under a developing cumulus cell, produced by extra heating of the surface and instability. The rarity of its occurrence and its weakness compared with cumulonimbus-windspouts may be ascribed to the flatness of the thermal low under the cumulus, the depth of which is of the order of 0.5 mb (BLEEKER and ANDRE [*1*]).

Cumulonimbus-windspouts.

The above reasoning is in principle not new, it agrees on the whole with the already existing thermodynamic theory of atmospherical whirlwinds, which however, in the opinion of the authors, cannot be directly applied to the formation of cumulonimbus-windspouts. To start whirlwinds of such violence a much more pronounced initial pressure-"pit" seems to be wanted, furthermore the striking position of these windspouts outside the centre of the cloud must be accounted for. All requirements seem to be met by the following new explanation, which has been indicated for the first time by BLEEKER and ANDRE [*3*].

It is known that well developed convective clouds are composed of one or more convective cells, each of which may successively go through the cumulus-, mature and dissipating stages (BYERS and BRAHAM [*4*]). In the cumulus stage the cell circulation, showing upward motion over an area of slightly decreased pressure, may be simply regarded as an effect of extra heating of the soil and instability. However, as soon as somewhere in the middle of the cell the precipitation, marking the transition to the cumulonimbus stage, begins to fall, a high pressure area under this precipitation is built up. This high pressure area must be considered as being mainly a thermal high caused by the cooling of the air as an effect of the falling precipitation; it is encircled by a ring of low pressure, which is to be regarded as an intensification of the originally present cumulus low. This intensification is also a result of the cooling, since in the higher layers air moves from the non-cooled parts of the cell to the parts cooled by the falling precipitation.

It is deemed of some interest to reproduce here (Fig. 1) the picture, derived by BLEEKER and ANDRE [*1*], of the pressure-time curves under convective cells not moving in horizontal direction and changing from the cumulus- into the mature (cumulonimbus-) stage. These curves, indicating how pressure changes under the precipitation area and outside it, show several remarkable features. In the beginning pressure is constantly falling under and away from what later on is going to be the precipitation area. This pressure fall is partly due to a large scale atmospheric pressure change, partly due to the process of cumulus formation.

At about 45 minutes before the onset of precipitation the stations under the future precipitation area show a slightly increased rate of fall; the stations outside it a decreased rate of fall. Bleeker and Andre [*1*] have suggested, that at this moment a hidden glaciation in the cell starts. Latent heat of fusion is then liberated, which introduces an intensification of the circulation in that part of the cell from which later on the rain will fall. This expresses itself as an increased pressure fall under this region, consequently a decreased pressure fall just outside it. At about 15 minutes before the onset of precipitation a new change in the pressure curve is observed. The pressure in the future precipitation area starts to rise; the pressure outside it starts falling with greater speed again. The onset of the pressure rise indicates, that a sudden cooling starts and that formation of precipitation takes place within a rather short period of time. The increased rate of pressure fall outside the precipitation area indicates, that as soon as this cooling begins, air moves from non-cooled parts to cooled parts in the higher layers of the cell.

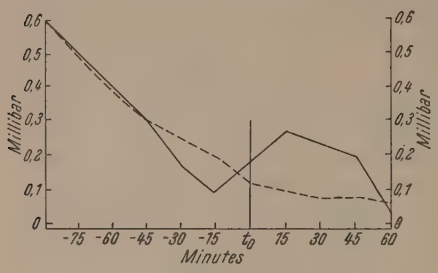


Fig. 1. Change of pressure with time during the development and decay of a precipitation cell. Pressure changes are average values computed from readings of 15 pairs of stations, measured at 15 minute intervals from reference time t_0 (time when precipitation begins to fall). (From Bleeker and Andre [*1*].)
——— in precipitation area, ——— outside precipitation area.

It is clear that the process described above, causing a reversal of the circulation in the lower part of the convective cell and, in the ideal symmetrical case, a surface pressure pattern consisting of a high surrounded by a ring of equally low pressure, must again be attributed to "differential heating", if only the term is now understood in such a way that no heating of importance is present over the low but that the air over the high is strongly *cooled*.

Towards the low pressure ring the air is converging from the outside but still more rapidly from the inside. Pressure gradients amounting to 1.3 mb. per km are found here (Williams [*5*]). Irregularities in the shape of the precipitation area will of course cause the low pressure ring to have one or more minima, to which the convergence will be concentrated. When again the condition of sufficient asymmetry in the horizontal windfield is fulfilled, cumulonimbus-windspouts may form over these minima and last as long as sufficient cooling goes on.

Since the deepening in the low pressure area is a consequence of the precipitation in the environment, it is clear, that this deepening will be most intense in those parts that are most surrounded by precipitation, e.g. in gaps in the precipitation area, or between two adjacent precipitation areas. In these parts closed minima with windspouts are most likely to form. From this it follows also, that a windspout has a better

chance of development along cumulonimbi arranged in a row than from an isolated cumulonimbus, since the greater complexity of the precipitation pattern in the former case offers a better opportunity for the formation of deep pressure minima. This is consistent with the fact, that windspouts created along fronts and squall lines (e.g. tornadoes) generally display a greater violence than those formed from isolated cumulonimbi.

It is also evident that windspout development is favoured by very low temperature of the precipitation, which explains why heavy windspouts are very often attended with hail.

4. Criticism on Previous Theories.

In order to compare various theories on the formation of cumulonimbus-windspouts with the new theory expressed in the foregoing section an extensive study of the literature available on this subject was made. Descriptions of 295 windspouts were listed and classified into several categories. In relation to previous theories the following observations can be made.

Wegener [*6*] assumes that the windspout develops when the windspeed increases strongly in a vertical direction. He suggests, that, when the upper part of a cumulonimbus penetrates into the higher faster moving layer, an originally horizontal vortex will develop, bend down along the border of the cloud and reach the surface of the earth as a result of the internal frictional forces, because the rotating particles transport momentum to lower particles which then also take part in the rotation.

Objections to Wegener's theory are:

a) The horizontal vortex has only in a very few cases (and even these were doubtful) been observed.

b) The two windspouts, which should be present rotating in opposite directions at both sides of the cumulonimbus have never been observed in one thunderstorm.

c) A system of two windspouts being the ends of a horizontal vortex seems physically impossible if one realises that the air in both spouts is rising (objections *b* and *c* raised by Koschmieder).

d) If the horizontal vortex gets its energy from the vertical shear only, it is quite clear that a vortex with a windspeed of 50 meters/sec. at a radius of 50 meters (conditions very normal in a well developed cumulonimbus-windspout) should be created by a zone with a tremendous vertical shear. An examination however of the only 4 available cases[1] of simultaneous upper wind observations extending to sufficient height shows that in only one (tornado) case a well-marked change of the wind speed in the vertical was present.

[1] Dorpat, July 6, 1918. Ann. d. Hydr. **57**, 385 (1929). — Warnemünde, September 20, 1928. Ann. d. Hydr. **57**, 14 (1929). — Magdeburg, July 16, 1933. Meteorol. Z., **54**, 340 (1937). — Alabama, February 12, 1945. Bull. Amer. Met. Soc., **27**, 462 (1946).

e) According to Wegener's theory a windspout located to the left of the cloud centre in the Northern hemisphere must have an anticyclonic rotation and reciprocally. From the very few reliable observations there is one case, described by Koschmieder [*7*] in which a location to the left side with certainty goes with a cyclonic sense of rotation.

f) The propagation of a whirl downward in the direction of its axis solely as a result of internal friction is doubtful owing to the strong upward current (see also experiments by Letzmann [*8*]).

Koschmieder [*7*] has tried to improve the already long existing thermodynamic theories. He starts from the supposition that in or above the cumulonimbus an inversion may be present, which brakes the vertical motion. Koschmieder then thinks that an "airparcel" with somewhat higher temperature may be able to break through the inversion and move further upward in a layer which again is conditionally unstable. If such an airparcel is large enough (100–1000 m) then its break-through will cause a pressure decrease at the surface which may cause the formation of a windspout.

The following objections to Koschmieder's theory may be raised:

a) Koschmieder suggests that the isolated airparcel moves upwards with a very high speed (e.g. 25 m/sec.). It then will have penetrated even as far as the tropopause within a few minutes, at least within a much shorter time than the average life time of the windspout[2].

b) According to Koschmieder windspouts can develop in any part of the convective cloud. An examination however of the literature shows that windspouts of some importance only occur around the borders of areas of heavy precipitation under the cloud.

The theory proposed by Showalter [*9*] is chiefly based upon the characteristic stratification ahead of the upper cold front over the plain states of the U.S.A. during tornado conditions: a very moist, convectively unstable surface layer of mT air, superposed by rather dry conditionally unstable air; the two layers being parted by an inversion or at least a stable layer at a height not exceeding 9000 feet, which layer, owing to the sharply falling humidity with height, also shows convective instability (Fig. 2 left). The vertical windshear manifesting itself in this boundary layer is also considered of importance.

In brief Showalter's theory contains the following. In the moist lower layer a quantity of air, by some process of convergence connected with the arriving front, may succeed in lifting the stable layer on top of it to the point of realising its convective instability. This enables a further ascent of the moist air, which results in condensation and the formation of ice-particles. When a new ceiling to convection is reached, the cloud air containing the ice spreads out, which in combination with the windshear, causes hail to fall through layers so far undisturbed. The consequent cooling of the dry air on top of the stable layer effects strong

[1] The average lifetime of windspouts, excluding tornadoes, is about 20 minutes, of North American tornadoes about one hour.

instability (realisation of convective instability), resulting in the sudden overturning of the air involved and the formation of a tornado.

In any case, it can be said that the suggested theory does not hold true for windspouts in other parts of the world, as may, for instance, be concluded from three of the cases referred to on page 225, which showed nothing of a vertical windshear. Also the described vertical distribution of temperature and moisture often will not be found, not only in the cases of windspouts developing from isolated cumulonimbi, but also when windspouts occurring along a squall line are concerned. As an example

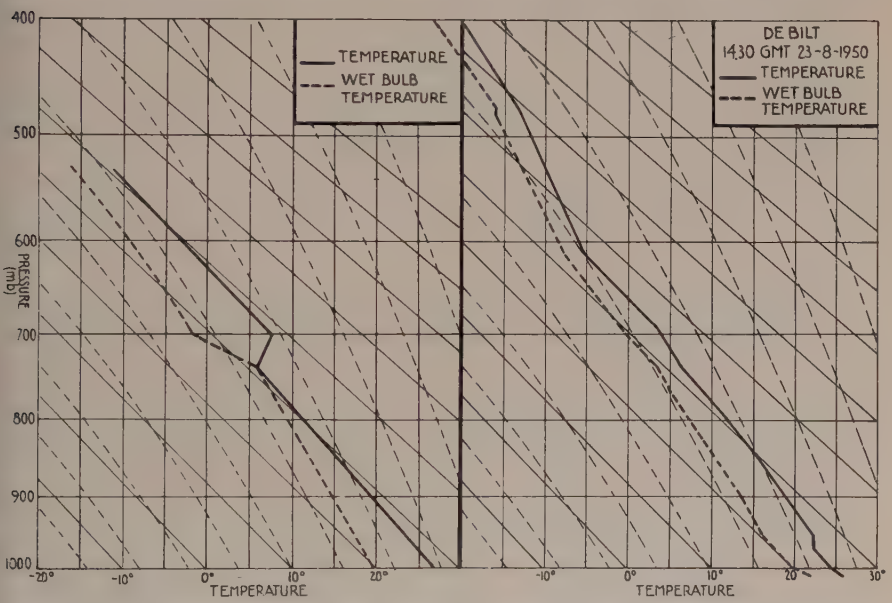


Fig. 2. Left: typical stratification during tornado conditions according to SHOWALTER [9]. Right: stratification $2^1/_2$ hours ahead of the pre-coldfrontal squall line associated with the heavy cumulonimbus windspout over Holland, August 23, 1950.

of this the stratification ahead of the prefrontal squall line accompanying the extremely violent windspout of Augs. 23, 1950 over Holland[1] is shown (Fig. 2 right). This example shows, that the development of extra-American prefrontal windspouts perfectly equalling tornadoes is possible without the stratification upon which SHOWALTER's theory of tornadoes is based.

FULKS [9] expresses somewhat different ideas on the origin of tornadoes. During the eastward transgression over the plateau regions the cold air behind the accompanying front is warmed, destabilised and dried. Arriving in the plain states this warmed air may have a potential temperature higher than that of the lower mT air ahead of it, but lower than

[1] cf. section 6, p. 234 ff.

that of the higher mT air. This will cause the leading edge of the warmed "cold" air to leave the surface, so that a "nose" of cold air penetrates the mT air in intermediate levels. This moist air being lifted at the upper foreside of the nose causes condensation and precipitation, the falling of which strongly cools the underlying dry air of the nose, thus bringing about the very unstable condition resulting in the prefrontal squall line. In combination with the horizontal windshear at the foreside of this, tornadoes may form here.

Apart from the merits which these ideas may have with regard to the formation of the prefrontal squall line, it must be said that in fact Fulks' (as well as Showalter's) speculations are chiefly restricted to the causes of the strong instability apparently connected with tornadoes. This instability is of course an important condition, but the process, which, the strong convective phenomena once being given, leads to the formation of the tornado, is described by none of the authors.

Aside from this, it seems hardly advisable to intimately relate the origin of tornadoes with surface or upper air cold fronts, since there are instances of severe tornadoes showing no connection with any kind of a front (Pate [*10*]).

Tepper [*11*, *12*] suggests that tornadoes by preference are created at those places where two "pressure jump lines" intersect each other[1]. In the zone of interaction a contact discontinuity with a sharp windshear is formed. This unstable wind condition generates vortices which under favourable thermodynamic conditions develop into tornadoes.

Apart from the fact that Tepper cannot explain in this way the striking preference of windspouts for forming in regions just outside precipitation areas, nor the occurrence of extra-American windspouts completely resembling tornadoes but lacking the prefrontal inversion (cf. section 6, p. 234, and Fig. 2 right) nor the development of windspouts from isolated cumulonimbi, it seems appropriate to throw some doubt on the pressure jump line theory. Firstly it seems rather unlikely that the proposed mechanisms actually will be able to start a wave in an inversion layer, secondly the existance of the supposed layer seems to be in contradiction with the convective phenomena observed in the

[1] According to Tepper the pressure jump line is a result of a gravitational wave, induced in a pre-coldfrontal inversion by some mechanism yielding sudden accelerations of the wind below the inversion. Two possible such mechanisms are given: firstly a sudden acceleration of the coldfrontal surface followed by a deceleration, causing an inversion wave which moves out ahead of the cold front, secondly, especially during tornado conditions, the westward extension of the Atlantic high, attended with intrusion of strong winds over regions where weaker winds previously existed, which process is also deemed to cause an inversion wave. Once the wave is formed, according to theory its leading edge will approach the vertical, thus giving rise to a sudden pressure jump at the surface of the earth. Ahead of the wave the air is forced aloft, which may result in the formation of clouds and precipitation of a squall line, c.q. a pre-coldfrontal squall line.

squall line, thirdly it seems improbable, that squall line convection is caused merely by a lifting of the air above the inversion, this air generally being rather dry (cf. SHOWALTER [*9*]).

The fact, that in the two tornado situations described by TEPPER tornadoes developed at about the intersection of two squall lines, is very well consistent with our view, expressed in section 3, that places more or less enclosed by precipitation areas offer the best chance for the formation of strong cumulonimbus-windspouts.

5. Supporting Evidence of the New Theory.

Statistics.

Cloud Character.

Of the 295 cases investigated, 248 are related to cumulonimbus, 5 speak of cumulus and 42 do not make it possible to draw any conclusions with regard to the character of the cloud. The cumulus-windspouts are all of minor importance.

Precipitation.

In 217 of the 295 cases positive or negative indications about precipitation have been given. Of these cases 208 (i.e. 96%) mention heavy simultaneous showery precipitation; in 3 other cases the precipitation starts when the windspout disappears; from the remaining 6 mentioning no precipitation at all, 3 are among the above mentioned cumulus-windspouts and the remaining 3 are also of little dynamical importance.

Orientation with Respect to Precipitation Area.

Of all cases investigated 132 mention the location of the windspout in respect to the precipitation area. 119 cases (90%) leave no doubt that the phenomenon was present outside this area, whereas in the rest of the cases a location inside the precipitation area is more or less clearly suggested[1].

Extraordinarily Strong Windspouts between Precipitation Areas.

With respect to the suggestion, made at the end of section 3, p. 224, it is interesting to note that we found 12 cases of windspouts, which were present between two well-developed precipitation areas, and that all of these were very heavy. WEGENER [*13*] also gives 6 cases of windspouts which develop between two showers and HUMPHREYS [*14*] seems to consider such a situation even characteristic for the formation of tornadoes, without however paying much attention to it. In a description

[1] The mere absence of precipitation at the position of the windspout is, of course, in agreement with *any* theory recognising the strong upward current, which prevents the precipitation from falling.

of the phenomena occurring during a "normal" tornado, he writes "rain and usually hail 10–30 minutes before, light precipitation at instant of storm (funnel cloud often seen and occasionally photographed) and deluge of rain, mixed at times with small hail, shortly after". By means of this same relation between windspout and surrounding precipitation pattern also earlier descriptions of the onset of a tornado seem to be understandable: "...two clouds one from the NW and the other from the SW seemed to meet" (Finley [*15*]), and "...local signs of the

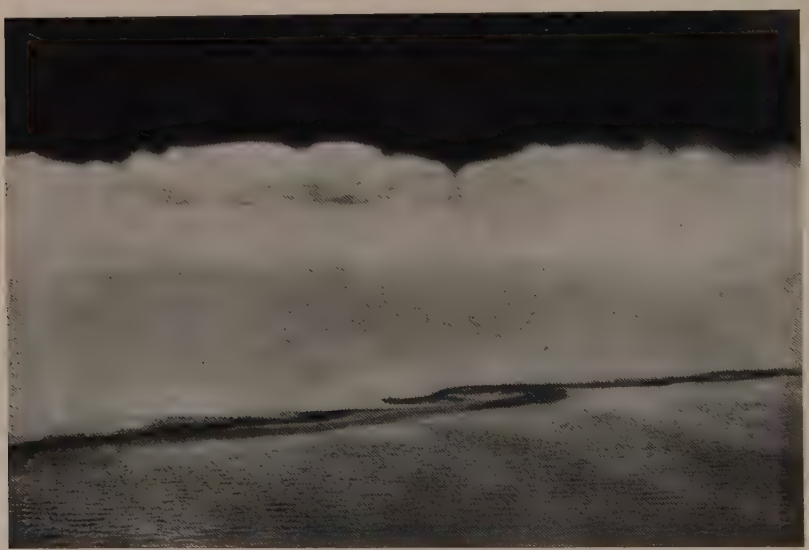


Fig. 3. Part of the low pressure trough under a cumulonimbus in the Gulf of Tonkin, August 8, 1948. The chief minimum is indicated by a spiral eddy system above which a waterspout is being formed. Other eddies in various stages of development along the line of convergence may possibly develop into other waterspouts. (Photograph published by permission of U.S. Navy.)

approach of a tornado are ominous clouds first in the SW and then almost immediately in the NW and N" (Henry [*16*]).

The result of this investigation, which on the whole corroborates also Wegener's statistics, may be summarised as follows:

a) Under convective clouds giving no precipitation at all in rare cases windspouts of only minor importance may form.

b) Well developed windspouts are always connected with cumulonimbi from which precipitation is falling or, in rare cases, about to fall, and are located outside the precipitation area.

c) Very heavy windspouts may occur in places more or less surrounded by precipitation.

The above conclusions seem to be a strong plea for the ideas described in section 3.

Windspouts [Observed in] Horizontal Windshift Zones.

Observations of windspouts in zones of horizontal windshift have often been made (WEGENER [13]), though in most cases the zone is too broad

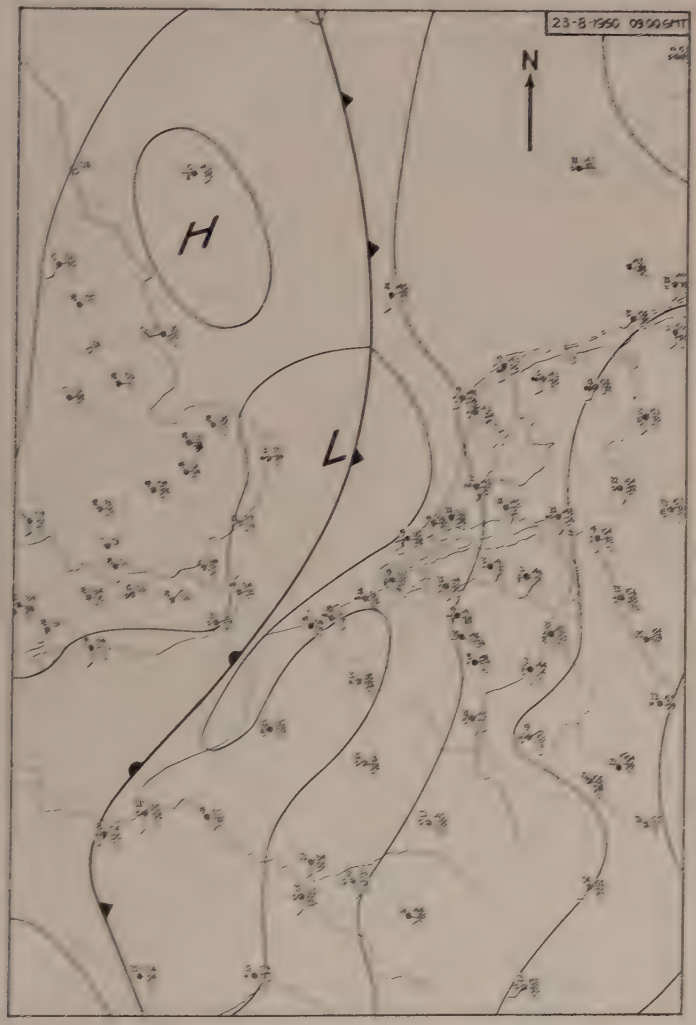


Fig. 4. Synoptic map 0900 GMT, August 23, 1950.

to strike the inexperienced observer. The wind-hift zone is easily interpreted as the low pressure trough around the precipitation high. A nice example is given in Fig. 3, an aerial photograph copied from the Mearine Observer (1948, vol. 18, p. 137). In this case the wind-shift presents itself even along a line rather than a zone. Where pressure attains a relative minimum a whirl is initiated, resulting in the creation of a windspout.

The Formation of more than one Windspout at nearly the same Time under one Cumulonimbus.

The ring of low pressure, which forms around the borders of a precipitation area, may have several places where a real closed minimum is

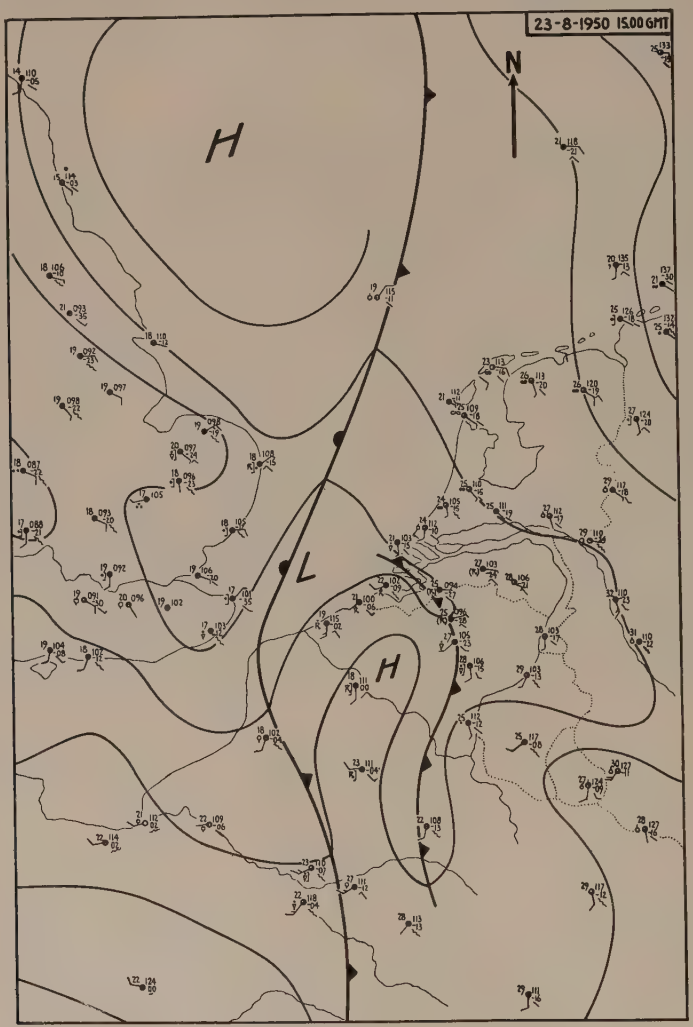


Fig. 5. Synoptic map 1500 GMT, August 23, 1950

present. There is no difficulty in understanding then the possibility of the development of more than one windspout at nearly the same time under one cloud. This possibility is also demonstrated by Fig. 3. More than one disturbance indicating a separate minimum in the convergence zone is observed.

The Sudden Formation of the Windspout

There is no difficulty in explaining the sudden appearance of the funnel cloud. As we have seen the pressure rise under a precipitation

Fig. 6. Synoptic map 1800 GMT, August 23, 1950.

cell and the fall just outside it starts rather suddenly, most probably of the moment that the precipitation starts to fall. The cooling process then works down and so forms the pressure field favorable for the formation of one or more windspouts.

6. Verification by a Recent Case of a Violent Windspout.

An extraordinarily heavy cumulonimbus-windspout, occurring over the Netherlands on August 23, 1950, offered an opportunity to test the ideas described above. At 0900 GMT (Fig. 4) a cold front extended in N–S direction over the North Sea and Western France, with a small wave developing about the mouth of the Seine. The front, which in the morning was rather inactive, in accordance with upper air flow moved slowly NE-wards, meanwhile rapidly turning to activity as a result of the strong heating of the surface air ahead of it. At about 1400 GMT the first heavy frontal showers started falling in Northern France. The striking changes in the surface pressure distribution as revealed by the 1500 and 1800 GMT maps (Fig. 5 and 6) must be attributed to this

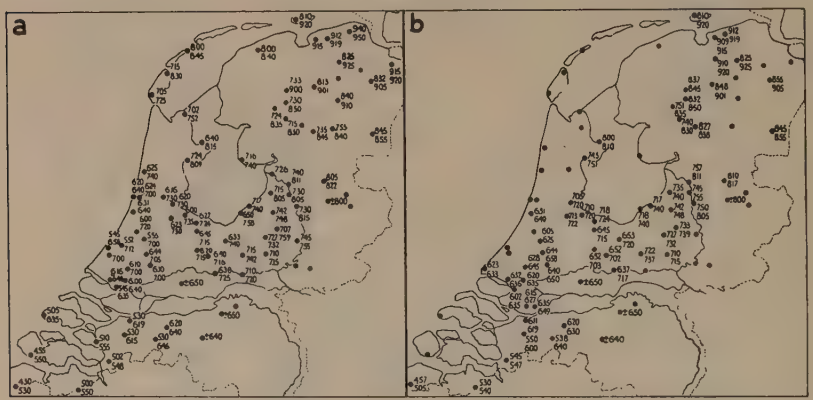


Fig. 7. Time data used for the construction of the precipitation areas shown in Fig. 8. Beginning and end of precipitation are given in hours and minutes GMT, with omission of first cypher 1. *a* has reference to moderate and heavy precipitation; *b* to heavy precipitation only. Light precipitation is not considered. Dots without time-data indicate that precipitation in question did not occur.

precipitation[1], in the way as described in section 3. The cooled air, being greatly influenced by surface friction, shows a tendency to lag behind, as a result of which the precipitation high backwards only gradually flattens out and is parted from the post-frontal cold air by a rather flat trough, which may be considered as a continuation of the original front. The leading edge of the precipitation area, however, is preceded by a low pressure belt of extreme sharpness. Williams [5] denominated

[1] For the reproduction of the precipitation high on the 1800 GMT map use was also made of the barograms of Netherlands stations, some of which showed pressure humps amounting to 2.5 mb. As a matter of fact, the precipitation high as reproduced in Fig. 6 and especially in Fig. 5 must not be considered as exactly correct. Use of a denser network would have revealed more complications arising from the cellular structure of the precipitation in thunderstorms.

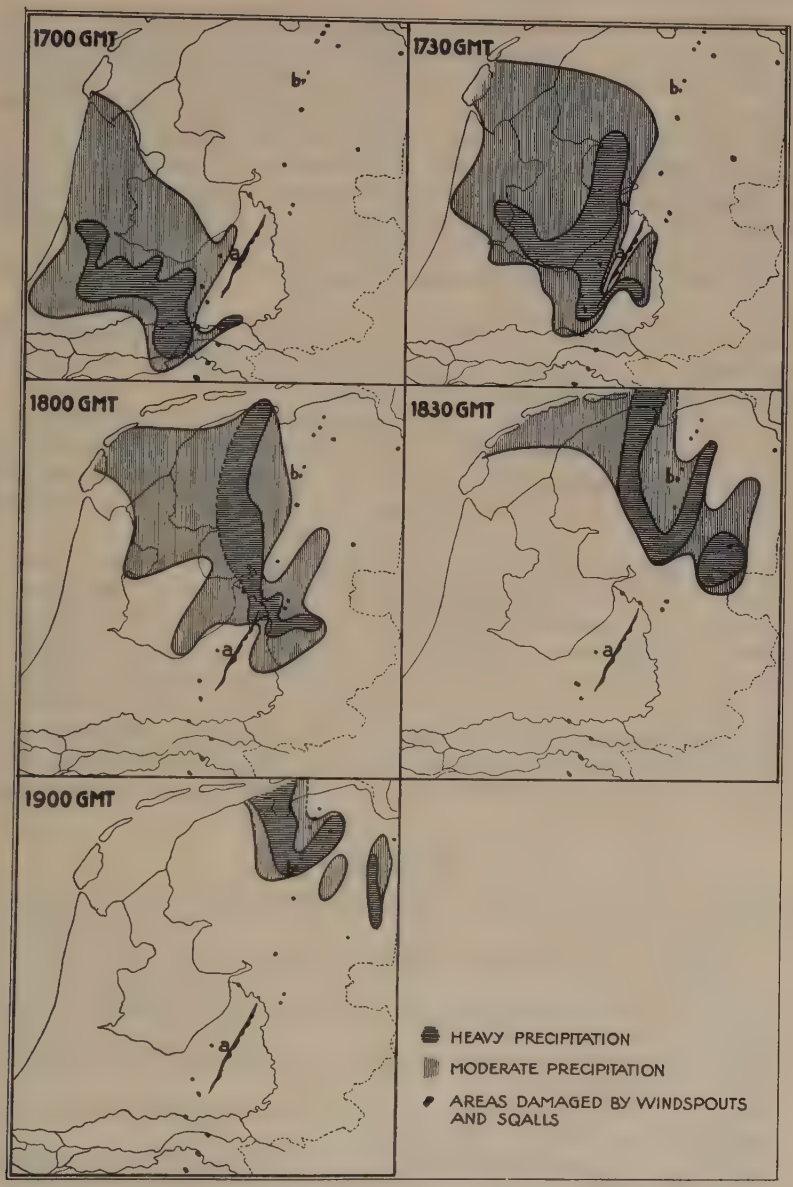


Fig. 8. Shape and displacement of precipitation area, August 23, 1950.

such a belt, occurring ahead of showers arranged in lines, "*microfront*", because of the sharp windshift, temperature dip and humidity rise associated with its passage. Progressing towards NE the frontal thunder-

storms caused exceedingly heavy downpours and hail, while violent squalls in a fairly continuous zone ahead of this precipitation inflicted damage in several places (Fig. 8). These squalls reached their maximum violence in a windspout, which, by its destructiveness so far not experienced in the Netherlands, may be safely compared with North American tornadoes. In a track 43 km long and sometimes over 1 km wide (*a*, Fig. 8) tens of thousands of trees were cut down and a number of buildings destroyed. The windspout[1] repeated itself more to the NE (*b*, Fig. 8), where it displayed the same destructive force.

The facts around this phenomenon are in accordance with the proposed theory:

a) That the windspout occurred in the microfront is suggested by the observations of a great number of eye-witnesses, who stated that the spout immediately preceded the downpour.

b) From the accounts of many interrogated persons, finding themselves at distances from the windspout-track ranging up to some 10 km to the right and left, it appears that there was a gradual transition from the windfield of the squall zone preceding the precipitation to the windfield of the spout.

c) Isochrones of the leading and trailing edges of the areas of heavy, respectively moderate precipitation were constructed on the basis of time-data (Fig. 7), provided by the Netherlands voluntary thunderstorm observers. In this way a picture of the development and movement of the precipitation areas was obtained (Fig. 8). Comparing the shapes of these areas with the regions of windspout damage, and realising the observational fact of the windspout just preceding the precipitation, it becomes evident, that at any moment of its existence this heavy windspout was indeed more or less surrounded by the falling precipitation.

References.

1. Bleeker, W. and J. Andre: Convective phenomena in the atmosphere. J. Meteor. **7**, 195 (1950).
2. — The structure of weather systems. Centenary Proc. R. Met. Soc. London **66**, (1950).
3. — and J. Andre: Convective phenomena in the atmosphere. University of Chicago (Unpublished report).
4. Byers, H. R. and R. R. Braham: Thunderstorm structure and circulation. J. Meteor. **5**, 71 (1948).
5. Williams, D. T.: A surface-micro-study of squall-line thunderstorms. Month. Weath. Rev. **76**, 239 (1948).
6. Wegener, A: Beiträge zur Mechanik der Tromben und Tornados. Meteorol. Z. **45**, 201 (1928).
7. Koschmieder, H.: Über Tromben. Wiss. Abh. Reichsamts f. Wetterd. **6**, Nr. 3 (1940).
8. Letzmann, J.: Experimentelle Untersuchungen an Luftwirbeln. Leipzig 1931.

[1] For detailed account, cf. Delver [*17*].

9. Showalter, A. K. and J. R. Fulks: Preliminary Report on Tornadoes. U. S. Weather Bureau, Washington 1943.
10. Pate, F. C.: The tornado at Montgomery, Alabama, Febr. 12, 1945. Bull. Amer. Met. Soc. **27**, 462 (1946).
11. Tepper, M.: A proposed mechanism of squall lines: the pressure jump line. J. Meteor. **7**, 21 (1950).
12. — On the origin of tornadoes. Bull. Amer. Met. Soc. **31**, 311 (1950).
13. Wegener, A.: Wind- und Wasserhosen in Europa. Braunschweig 1917.
14. Humphreys, W. J.: The tornado. Month. Weath. Rev. **54**, 501 (1926).
15. Finley, J. P.: Tornadoes. New York 1887.
16. Henry, A. J.: Cyclones, tornadoes, thunderstorms, squalls. Month. Weath. Rev. **46**, 24 (1918).
17. Delver, A.: De windhozen van 23 Aug. 1950. Hemel en Dampkring **49** (1951) (in press).

551.515.8

(Institut für Meteorologie und Geophysik der Universität Innsbruck.)

Frontenanalyse mit Hilfe von Bergbeobachtungen.

Ein Beitrag zur Frage des Voreilens der Kaltluft in der Höhe.

Von

H. Hoinkes.

Mit 20 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Mit Hilfe einer großen Zahl von Registrierungen und Beobachtungen aus dem Alpengebiet und mit Sondierungen der freien Atmosphäre über Mitteleuropa werden die Kaltfronten vom 28. September 1940 analysiert. Es wird gezeigt, daß die mT-Masse, in der die Alpen am 28. September 06 Uhr liegen, zunächst von einer mP_T-Masse und dann von einer mP-Masse abgelöst wird. Die Konstruktion der Frontflächen ergibt das mehrfach belegte Ergebnis, daß die mP_T-Masse mit einer stumpfen Spitze in 1200 bis 2000 m Höhe ihrer Bodenfront weit vorauseilt, während die mP-Masse bis 3200 m Höhe mit fast senkrechter Front vordringt. Die Frontflächen verformen sich beim Überschreiten des Alpenhauptkammes. Die auf der Nordseite der Alpen in der freien Atmosphäre voreilende mP_T-Spitze berührt schließlich den Boden, während die zunächst senkrechte mP-Frontfläche sich südlich des Alpenhauptkammes zwischen 1300 und 2500 m Höhe weit vorneigt. An einzelnen Beispielen wird gezeigt, daß auch eng benachbarte Stationen ein verschiedenes Bild vom Mechanismus des Luftmassenwechsels ergeben können. Starke Abweichungen der Temperatur von der Zustandskurve an einzelnen Stationen sind durch die örtlich verschieden starke Föhnwirkung zu erklären.

Summary. The cold fronts of September 28, 1940 are analysed by means of a great number of records and observations from the Alpine area and by measurements in the free atmosphere above Central Europe. It is shown that the mT-mass covering the Alps on September 28, 06 a. m., is followed first by a mP_T-mass and then by a mP-mass. The construction of the frontal surfaces leads to the result proved in several cases that the mP_T-mass in form of an obtuse wedge in 1200–2000 m height runs far ahead its front on the ground, while the mP-mass advances, up to 3200 m, with an approximately vertical frontal surface. When passing the main crest of the Alps

the frontal surfaces are being deformed. The mP_T-wedge advancing aloft on the northern side of the Alps at last comes down to ground. The previously nearly vertical surface of the mP-front shows a strong forward inclination between 1300 and 2500 m height in the south of the main crest. It is shown by examples that even adjacent stations may yield a different image of the mechanism of passing air masses. Strong temperature departures from the thermal state curve at certain stations can be accounted for by the locally varying foehn-effect.

Résumé. On a analysé les fronts froids du 28 septembre 1940 à l'aide d'un grand nombre d'enregistrements et d'observations de la région des Alpes et de sondages aérologiques de l'atmosphère libre de l'Europe centrale. On montre que la masse d'air mT dans laquelle baignaient les Alpes à 6 h. le 28 septembre a été remplacée d'abord par une masse mP_T, puis par une masse mP. La construction des nappes frontales conduit au résultat déjà connu selon lequel la masse mP_T dépasse largement sous forme de coin arrondi à 1200—2000 m. son front au sol, tandis que la masse mP pénètre avec un front quasi-vertical jusqu'à 3200 m. Les surfaces frontales se déforment au passage de la crête principale des Alpes. Le coin frontal mP_T qui pénètre dans l'atmosphère libre au Nord des Alpes atteint finalement le sol, tandis que le front au commencement quasi-vertical mP s'avance au Sud des Alpes en s'inclinant en avant entre 1300 et 2500 m. Des exemples particuliers montrent que même des stations très voisines peuvent donner une image différente du mécanisme de changement de masse d'air. On explique de forts écarts de température observés en quelques stations par rapport à la courbe aérologique par l'effet de foehn variable d'un point à un autre.

H. v. Ficker hat in einer klassischen Untersuchung [3] ein Bild vom Transport kalter Luftmassen über die Alpen gegeben, dessen Gültigkeit durch die Erfahrung immer wieder bestätigt werden konnte. In der Mehrzahl der Fälle dringt die kalte Luft zunächst in die nach Norden offenen Täler ein, erreicht langsam anschwellend die Gipfel und fließt schließlich über den Hauptkamm auf die Südseite der Alpen über. Schon die genannte Arbeit enthält jedoch auch Fälle, in denen die Abkühlung im Tal und am Gipfel gleichzeitig eintritt. Später hat E. Ekhart [2] einen weiteren derartigen Fall sehr eingehend analysiert und konnte zeigen, daß bis in Gipfelhöhe der Alpen eine Keilform der Kaltluftmasse nicht vorhanden war. Die nachfolgende Analyse der in der Höhe voreilenden Kaltfronten vom 28. September 1940 soll einen weiteren Beitrag zu diesem Problem liefern und zeigen, wie mit Hilfe der kontinuierlichen Registrierung der meteorologischen Elemente an Bergstationen nicht nur die Form der Frontflächen gefunden, sondern auch ihre Verformung bei der Überquerung des Gebirges verfolgt werden kann.

Die Großwetterlage der letzten Septembertage 1940 wird gekennzeichnet durch ein ausgedehntes warmes Hochdruckgebiet, das westlich der Britischen Inseln festliegt und an seiner Nordflanke Tiefdruckstörungen über Island nach Nord- und Osteuropa steuert. Als letztes Glied einer längeren Serie ist ein kräftiges Tiefdruckgebiet aus dem Nordmeer in den Morgenstunden des 28. September in das Gebiet der

mittleren Ostsee gelangt (Abb. 1). Gleichzeitig stößt das nordatlantische Hochdruckgebiet weit ins Nordmeer vor. Mit dem starken west-östlichen Druckgefälle dringen maritime Polarluftmassen in breiter Front nach Süden vor. Sie überschreiten bis zum 29. September die Alpen und beleben vorübergehend die Tiefdrucktätigkeit im Mittelmeer.

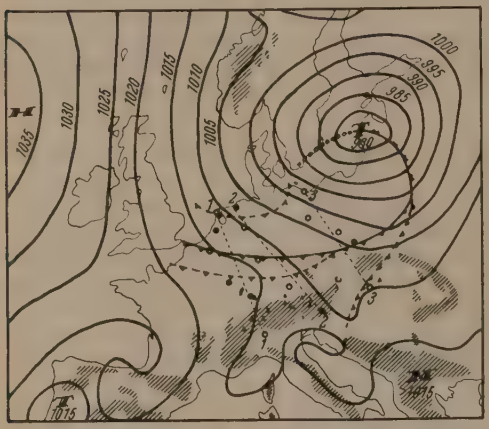


Abb. 1. Wetterlage am 28. September 1940, 8 Uhr, mit Lage der drei aerologischen Schnitte (gestrichelte Linien, o Flugzeug, ● Radiosonde), nach Hamburger Wetterkarte (Fronten geändert).

Zum Studium der Überschreitung der Alpen durch die Kaltluftmassen standen außer den im „Täglichen Wetterbericht" der Deutschen Seewarte enthaltenen Unterlagen folgende Hilfsmittel zur Verfügung: Registrierungen von Druck, Temperatur, Feuchtigkeit und teilweise auch Wind an 65 Stationen, davon 23 über 1000 m Höhe; Terminbeobachtungen von weiteren 95 Stationen, davon 22 über 1000 m, sowie die Ergebnisse von Niederschlagsmessungen an insgesamt 1350 Stationen aus dem Alpenraum*.

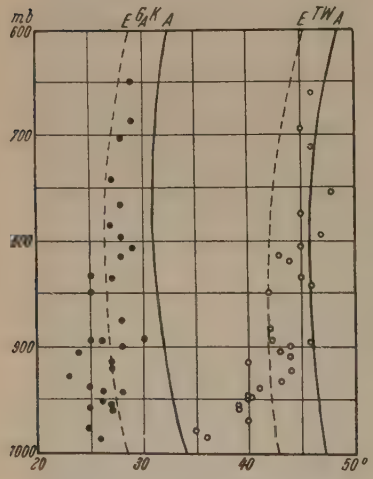


Abb. 2. Potentielle Äquivalenttemperatur an 30 Stationen in den Alpen o am 28. und ● am 29. September 1940, 6 Uhr MEZ (Ausschnitt aus dem Thetagrammpapier Nr. 9).

Schon die erste orientierende Durchsicht der Registrierungen zeigte, daß das gewohnte Bild der keilförmig vordringenden Kaltluft in diesem Falle nicht zutreffend sein konnte. Zu einer zweifelsfreien Erfassung des Luftmassenwechsels ist die Benützung einer konservativen Luftmasseneigenschaft erforderlich, da der Verlauf von Temperatur, relativer Feuchte und Druck nicht immer eindeutige Schlüsse zuläßt. Hier wurde aus praktischen Gründen (Berechnung mit dem thermodynamischen Rechenschieber des ehemaligen Reichsamtes für Wetterdienst) die von Schinze

* Allen Observatorien und Institutionen sei auch an dieser Stelle für die freundliche leihweise Überlassung ihrer wertvollen Originalregistrierungen bestens gedankt.

angegebene potentielle Äquivalenttemperatur Θ_{pa} gewählt, die definiert ist durch

$$\Theta_{pa} = (T + 2{,}5\,q)\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\varkappa}.$$

Dabei werden, thermodynamisch nicht einwandfrei, die Äquivalenttemperaturen in verschiedenen Höhen potentiell auf das Normalniveau bezogen. Diese Größe hat sich in der Wetterdienstpraxis jedoch bewährt, denn der Unterschied gegen die von Robitzsch angegebene exakte äquivalente potentielle Temperatur [7] ist meist gering. Bei den hier vorliegenden Werten von q und p übersteigt der Fehler nicht 2° C.

Am 28. September früh liegen die Alpen in einer maritimen Tropikluftmasse, in der die Nullgradgrenze erst bei etwa 3250 m Höhe erreicht wird; bis zum 29. September früh haben maritime Polarluftmassen die Alpen überflutet, die Nullgradgrenze ist auf 1750 m abgesunken. Abb. 2 läßt in den potentiellen Äquivalenttemperaturen den einheitlichen Charakter dieser Luftmassen erkennen. Die Talstationen unterhalb 500 m Höhe zeigen am 28. September infolge der nächtlichen Ausstrahlung zum Teil zu niedrige Werte, während am 29. September früh ein langsames Eindringen von maritimen Arktikluftmassen bis etwa 1000 m Höhe die potentiellen Äquivalenttemperaturen erniedrigt. Dieser Luftmassenwechsel erfolgt nicht direkt, sondern unter Einschaltung einer deutlich abgegrenzten Übergangsluftmasse, die als gealterte maritime Polarluft angesprochen werden muß. Er wird an bestimmten Stationen der Alpennordseite durch eindrucksvolle Nordföhnerscheinungen eingeleitet, deren Entstehungsbedingungen in einer späteren Arbeit erörtert werden sollen.

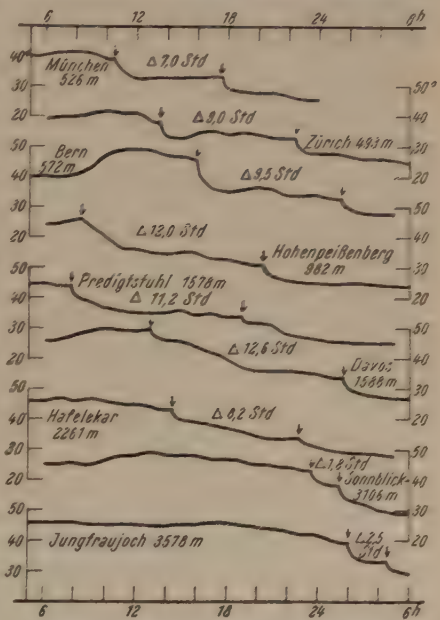


Abb. 3. Stundenwerte der potentiellen Äquivalenttemperatur an einigen ausgewählten Stationen am 28. u. 29. September 1940, MEZ.

Von allen verfügbaren Stationen mit vollständigen Registrierungen wurden zunächst für einen Zeitraum von 24 bis 48 Stunden stündliche Werte der potentiellen Äquivalenttemperatur berechnet. Erst mit Hilfe dieser Werte konnten die, den Frontdurchgängen entsprechenden Unstetigkeiten in den Registrierungen mit Sicherheit erkannt werden; dieses Vorgehen ist unbedingt erforderlich, um nicht durch die präfrontale Abkühlung innerhalb der Warmluft getäuscht zu werden. Bei der vergleichenden Gegenüberstellung der so ermittelten Frontdurchgangszeiten wurde das Ergebnis erhalten, daß die Zeitdifferenz zwischen den Über-

gängen von Tropikluft (mT) in gealterte Polarluft (mP_T) und zwischen mP_T und frischer Polarluft (mP) eine deutliche Abhängigkeit von der Stationshöhe zeigte, was auf eine verschiedene Form der beiden Frontflächen schließen ließ.

Einige Beispiele (Abb. 3) zeigen, daß die beiden Fronten sich an Talstationen um 500 m Höhe mit einem Abstand von 7 bis 9 Stunden folgen; in mittleren Höhen zwischen 1000 und 2000 m vergrößert sich der Abstand auf 12 bis 13 Stunden, nimmt oberhalb 2000 m Höhe rasch ab, um oberhalb 3000 m Höhe auf etwa 2 Stunden zu sinken. Dieses Ergebnis ist deshalb so bemerkenswert, weil daraus eindeutig hervorgeht, daß die mP_T-Masse in Höhen zwischen 1000 und 2000 m der Bodenfront weit vorauseilt. Während in München (526 m) der Luftmassenwechsel zwischen mT und mP_T um 10,5 Uhr MEZ erfolgt, wird der rund 38 km weiter südlich gelegene Hohenpeißenberg (982 m) bereits um 8,4 Uhr MEZ (also 2 Stunden früher!) von der mP_T-Masse erreicht und der 50 km südlich München liegende Predigtstuhl (1578 m) sogar schon um 7,8 Uhr MEZ. In Davos (1588 m), rund 60 km südlicher als Zürich (493 m) gelegen, trifft die mP_T-Masse um eine halbe Stunde früher ein als in Zürich. Ganz anders die mP-Masse. Diese passiert München um 17,5 Uhr MEZ, Hohenpeißenberg um 20,4 Uhr, Predigtstuhl um 19,0 Uhr, Zürich um 22,5 Uhr und Davos um 1,6 Uhr des 29. September. Hier ist die Zeit des Frontdurchganges unabhängig von der Höhe und entsprechend der südlicheren Lage (die Front schreitet fast genau von Norden nach Süden fort) verspätet.

Diesen Verhältnissen entsprechend war die Konstruktion von Isochronen des Frontdurchganges unter Verwendung aller Stationen bei der zweiten Front (mP_T in mP) ohne Schwierigkeiten möglich, während sie bei der ersten Front (mT in mP_T) infolge des Voreilens in der Höhe nur in einem bestimmten Niveau sinnvoll sein konnte. Die Isochronen der zweiten Front ließen eine gleichmäßige, fast genau breitenparallele Bewegung nach Süden mit einer mittleren Geschwindigkeit von 18 km/St erkennen. Ein bevorzugtes Eindringen in die großen, nord-südlich verlaufenden Täler (Rheintal, unteres Salzachtal) ist wohl angedeutet, aber in großen Zügen ist eine Beeinflussung durch die Alpen kaum zu erkennen. Die annähernd auf gleicher Breite liegenden Stationen werden zur gleichen Zeit von der Front überschritten. Zum Beispiel: Basel (318 m), Garmisch (702 m), Semmering (1013 m) am Alpennordrand zwischen 21 und 22 Uhr am 28. September; Neuchâtel (487 m), Hochserfaus (1817 m), Sonnblick (3106 m), Graz (369 m) ungefähr in Alpenmitte zwischen 24 Uhr und 1 Uhr; Locarno-Monti (380 m), Venegono (408 m), Trient (210 m) am Alpensüdrand zwischen 5 und 6 Uhr am 29. September.

Diese gleichmäßige, durch die Alpen kaum gestörte Bewegung der zweiten Front von Norden nach Süden mit einer mittleren Geschwindigkeit von 18 km/St ermöglicht eine Reduktion der Frontdurchgangszeiten aller Stationen auf eine Station im nördlichen Alpenvorland und damit eine Umdeutung des beobachteten zeitlichen Nacheinander in ein räumliches Nebeneinander. Als Bezugsstation wurde München gewählt, weil

an dieser Station eine aerologische Sondierung zur Verfügung steht. Durch diesen Vorgang wird ein Schnitt durch die Frontflächen erhalten. Die mit 18 km/St relativ sehr geringe Verlagerungsgeschwindigkeit der Fronten begünstigt diesen Versuch; denn Fehler in den aus den Registrierungen entnommenen Frontdurchgangszeiten, die wegen fehlender oder unvollständiger Zeitmarken in einzelnen Fällen unvermeidbar

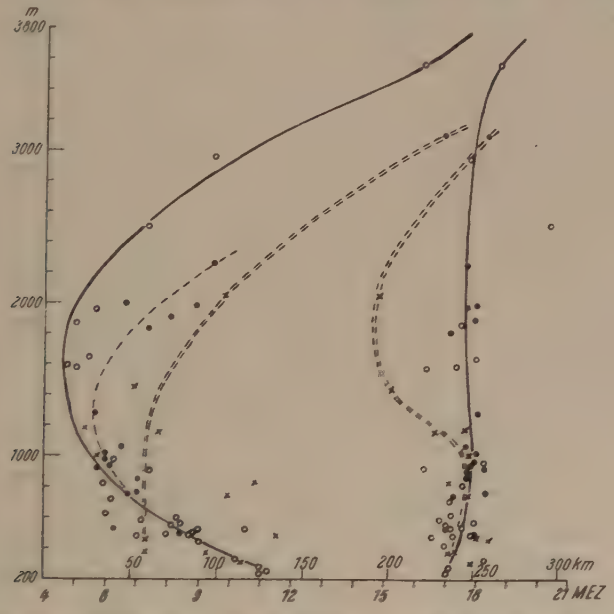


Abb. 4. Konstruierter Schnitt durch die Frontflächen am 28. September 1940. Ausgezogene Linie (○): Stationen am Alpennordrand; einfach gestrichelte Linie (●): Stationen im Lee der nördlichen Kalkalpen; doppelt gestrichelte Linie (⁄): Stationen südlich des Alpenhauptkammes.

waren, können sich bei der Konstruktion der Frontflächen nicht stark auswirken.

Das Ergebnis des Versuches, aus den registrierten Frontdurchgangszeiten die Form der Frontflächen abzuleiten, ist in Abb. 4 dargestellt. Es erweist sich dabei als sinnvoll, eine Einteilung der Stationen vorzunehmen in 1. solche am Nordrand der Alpen bzw. in nach Norden offenen Lagen (bezeichnet mit ○), 2. solche im Lee der nördlichen Kalkalpen, aber noch nördlich des Alpenhauptkammes (bezeichnet mit ●) und 3. in solche südlich des Alpenhauptkammes (bezeichnet mit ⁄). Am Nordrand der Alpen (ausgezogene Linie) eilt die mP_T-Frontfläche bis etwa 1800 m Höhe mit einer stumpfen Spitze der Bodenfront um etwa 100 km oder 5,5 Stunden voraus und biegt erst oberhalb 2000 m Höhe keilförmig zurück. Die mP-Frontfläche dagegen steht bis 3200 m Höhe nahezu senkrecht und erst oberhalb dieser Höhe ist ein Zurückneigen zu erkennen. Durch die Alpen wird die in der freien Atmosphäre vorstoßende mP_T-

Spitze deformiert, wie die auf der gestrichelten Linie liegenden Stationen zeigen, die alle im Lee großer Bergketten liegen (Hafelekar, Patscherkofel, Vent, Hochserfaus, Sonnblick). Auf der Südseite des Alpenhauptkammes schließlich ist aus der in der freien Atmosphäre voreilenden Spitze ein stumpfer Keil geworden (doppelt gestrichelte Linie). So erhält Klagenfurt (441 m) die mP_T-Masse 3,4 Stunden früher als der Obir (2044 m), bzw. nach Eliminierung der Breitendifferenz 2,5 Stunden früher. In der Nähe des Alpenhauptkammes, jedoch schon auf seiner Südseite gelegene Stationen zeigen die vorauseilende Spitze der mP_T-Masse zum Teil noch deutlich. Der Wechsel zwischen mT und mP_T erfolgt z. B. am Schöckel (1436 m) 3,4 Stunden früher als in Graz (369 m), bzw. bei Berücksichtigung der Breitendifferenz 2,5 Stunden früher.

Besonders bemerkenswert ist die Veränderung der mP-Frontfläche südlich des Alpenhauptkammes. Während sie nördlich des Hauptkammes fast senkrecht steht, neigt sie sich südlich des Hauptkammes in Höhen zwischen 1000 und 2000 m um etwa 50 km oder rund 3 Stunden vor. Der Schöckel erhält die mP-Masse 2,8 Stunden früher als Graz, der Obir um 2,7 Stunden früher als Klagenfurt. Die dadurch bedingte starke Labilisierung in mittleren Höhen äußert sich in Gewittern während des Frontdurchganges. So melden Klagenfurt (448 m), Villach (534 m) und Kanzelhöhe (1469 m) Gewitter in der Nacht vom 28./29. September, auf der Kanzelhöhe gefolgt von starkem Schneefall.

Tabelle 1. *Auf München reduzierte Frontdurchgangszeiten der mP-Front an zusammengehörigen Berg- und Talstationen.*

Station	Höhe m	red. Frontzeit MEZ	Verspätung der Front a. d. Bergstation, Std.
München	526	17,5	
Salzburg	420	17,0	
Reichenhall	474	16,5	— 0,7 bis — 0,2
Predigtstuhl	1578	16,3	
Garmisch	702	17,1	
Mittenwald	916	16,3	0,6 bis 1,4
Zugspitze	2962	17,7	
Mittenwald	916	16,3	1,2
Hafelekar	2261	17,5	
Innsbruck	578	17,8	
Patscherkofel	1980	17,7	— 0,3 bis — 0,1
Hafelekar	2261	17,5	
Rauris	950	17,8	0,5
Sonnblick	3106	18,3	
Bern	572	17,9	0,8
Jungfraujoch	3578	18,7	
Zürich	493	17,8	
Feldkirch	483	17,2	2,6 bis 3,2
Säntis	2500	20,4	

In dieses Bild fügen sich alle Stationen mit der durch die Auswertegenauigkeit zu erwartenden Unschärfe ein, bis auf den Säntis (2500 m), wo die mP-Front gegenüber den Talstationen in gleicher Breite um rund 3 Stunden zu spät eintrifft. Die reduzierten Frontdurchgangszeiten der mP-Front an benachbarten Gipfel- und Talstationen (Tabelle 1) ergeben an allen übrigen Stationspaaren eine mittlere Verspätung des Frontdurchganges am Gipfel um 0,5 Stunden, schwankend zwischen — 0,7 und 1,4 Stunden; nur am Säntis erreicht die Verspätung 3 Stunden. Eine Erklärung für diesen sonderbaren Umstand ist vielleicht in der orographischen Lage des Säntismassivs zu suchen, das wie ein Riff die anbrandenden Kaltluftmassen teilt. Während ein Teil relativ unbehindert in das breite Rheintal nach Süden eindringt, überflutet der andere nach Südwesten das schweizerische Alpenvorland, wodurch eine lokale Erniedrigung der Kaltluftmasse denkbar wäre, die eine Verspätung des Frontdurchganges am Gipfel des Säntis zur Folge haben müßte. Die Durchgangszeit der ersten Front (mP_T), die zumindest am Alpennordrand noch durch die Geländegestaltung weitgehend unbeeinflußt vordringt, stimmt auch am Säntis mit den übrigen Stationen des Alpenrandes gut überein.

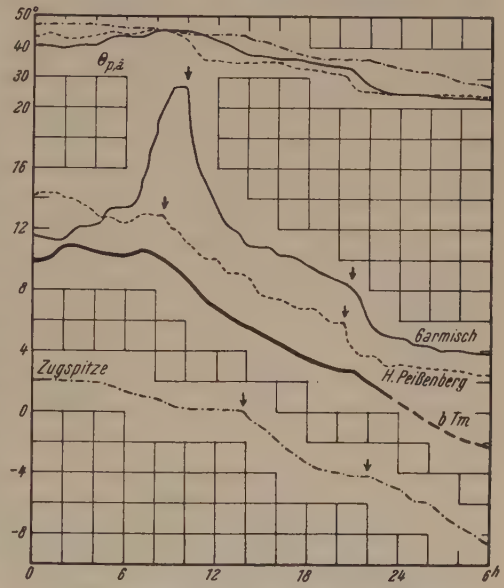


Abb. 5. Stündliche Werte der potentiellen Äquivalenttemperatur und der aktuellen Temperatur am 28./29. September 1940, MEZ., an den Stationen Garmisch 702 m, Hohenpeißenberg 982 m, und Zugspitze 2962 m, sowie der barometrischen Mitteltemperatur (dick ausgezogen) zwischen Garmisch und Zugspitze, Δh = 2260 m.

Das Voreilen einer Kaltluftmasse in der Höhe ist ein so wichtiger und umstrittener Vorgang, daß die Gültigkeit des abgeleiteten Bildes noch mit Hilfe zusammengehöriger Tal- und Gipfelstationen mit vollständigen Registrierungen geprüft werden muß. Es stehen dafür nachstehende Stationspaare zur Verfügung: Garmisch (702 m)-Zugspitze (2962 m), Mittenwald (916 m)-Hafelekar (2261 m), Reichenhall (474 m)-Predigtstuhl (1578 m), Rauris (950 m)-Sonnblick (3106 m), alle auf der Nordseite des Alpenhauptkammes und das Stationspaar Klagenfurt (448 m)-Obir (2044 m) südlich des Alpenhauptkammes. In den folgenden Abbildungen, welche die Diskussion der Verhältnisse unterstützen sollen, werden die stündlichen Werte der Temperatur, der potentiellen Äquivalenttemperatur und der barometrischen Mitteltemperatur einander

gegenübergestellt. Eine Zeitkorrektur wegen der verschiedenen Breite der Stationen wurde nicht angebracht; die Zeitskala gibt für alle Stationen den Ablauf der Frontdurchgänge in MEZ.

Stationspaar Garmisch-Zugspitze (Abb. 5). Die mP_T-Masse erreicht Garmisch um 10 Uhr und den Gipfel der Zugspitze um 13,8 Uhr. Diese Verhältnisse könnten auch durch eine keilförmig vordringende Luftmasse hervorgerufen werden; der bereits um 8 Uhr deutlich einsetzende Fall der barometrischen Mitteltemperatur zeigt, daß 2 Stunden vor dem Frontdurchgang im Tal in mittleren Höhen kältere Luft einzufließen beginnt, entsprechend dem aus allen Stationen gewonnenen Bild (Abb. 4). Die Abnahme der barometrischen Mitteltemperatur könnte auch durch eine Gebäudestörung der Druckregistrierung auf der Zugspitze infolge starker Zunahme der Windgeschwindigkeit ab 8 Uhr vorgetäuscht werden. Das ist in diesem Fall nicht wahrscheinlich, denn die Windregistrierung auf der Zugspitze zeigt ab 0,0 Uhr des 28. September durchgehend Windgeschwindigkeiten um 15 m/sec bis 10 Uhr, ohne irgendeine Unstetigkeit; die Abnahme der barometrischen Mitteltemperatur kann somit als reell angesehen werden.

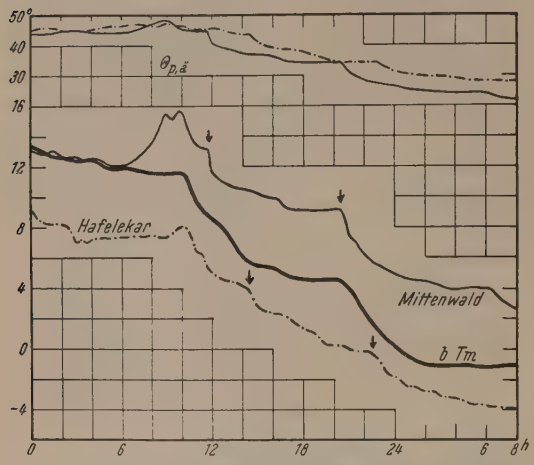


Abb. 6. Stündliche Werte der potentiellen Äquivalenttemperatur und der aktuellen Temperatur am 28./29. September 1940, MEZ., an den Stationen Mittenwald 916 m, und Hafelekar 2261 m, sowie der barometrischen Mitteltemperatur zwischen Mittenwald und Hafelekar, Δh = 1345 m (dick ausgezogen).

Die mP-Masse trifft im Tal um 21 Uhr und am Gipfel um 22 Uhr ein, also fast gleichzeitig, wenn man berücksichtigt, daß die Zugspitze etwa 6 km südlicher liegt als Garmisch. Zur gleichen Zeit beginnt die barometrische Mitteltemperatur erneut stärker zu fallen. Die Temperaturregistrierung der zur Ergänzung herangezogenen Station Hohenpeißenberg (982 m) paßt sich dem Verlauf der barometrischen Mitteltemperatur gut an, wodurch dessen Realität gesichert erscheint. Die starke Temperaturerhöhung in Garmisch vor dem Durchgang der mP_T-Front, die bei der beobachteten Himmelsbedeckung von 10/10 und intermittierendem Regen keine Wirkung der Einstrahlung sein kann, wird als Nordföhnerscheinung in einer späteren Arbeit diskutiert werden.

Stationspaar Mittenwald-Hafelekar (Abb. 6). Die mP_T-Masse erreicht Mittenwald um 11,7 Uhr und die 15 km weiter südlich gelegene Station Hafelekar um 14,4 Uhr. Auch hier könnte man zunächst an ein keilförmiges Vordringen der Kaltluft denken, aber die barometrische Mittel-

temperatur fällt bereits ab 10 Uhr; zu diesem Zeitpunkt liegen beide Stationen noch in einer mT-Masse. Auch an diesem Stationspaar ist somit die in mittleren Höhen voreilende Spitze der mP_T-Masse deutlich ausgeprägt. Der Umstand, daß die Station Hafelekar auf der südlichsten der vier Karwendelketten, also im Lee der übrigen liegt, bewirkt eine Erniedrigung der mP_T-Spitze. Hier herrschen nicht mehr die gleichen Verhältnisse, wie in der freien Atmosphäre.

Der um 10 Uhr am Hafelekar einsetzende Fall der Temperatur ist nicht durch einen Luftmassenwechsel bedingt, wie die potentielle Äquivalenttemperatur zeigt. Er geht noch völlig innerhalb der mT-Masse vor sich und ist, wie die Registrierung der relativen Feuchte erkennen läßt, dadurch bedingt, daß eine von 4 Uhr bis 10 Uhr anhaltende Absinkbewegung zu diesem Zeitpunkt von einer aufsteigenden Bewegung der Luftmassen abgelöst wird.

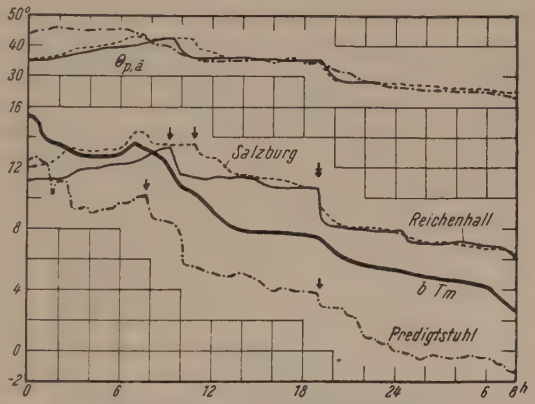


Abb. 7. Stündliche Werte der potentiellen Äquivalenttemperatur und der aktuellen Temperatur am 28./29. September 1940, MEZ., an den Stationen Salzburg 420 m, Bad Reichenhall 474 m und Predigtstuhl 1578 m, sowie der barometrischen Mitteltemperatur zwischen Reichenhall und Predigtstuhl, $\Delta h = 1104$ m (dick ausgezogen).

Die Ankunft der mP-Masse in Mittenwald um 20,6 Uhr ist von einem neuerlichen starken Fall der barometrischen Mitteltemperatur begleitet; er ist offenbar wegen einer winderzeugten Gebäudestörung an der Druckregistrierung am Hafelekar etwas zu stark. Am Hafelekar trifft die mP-Masse um 22,6 Uhr ein. Bei der Beurteilung dieser Zeitdifferenz muß berücksichtigt werden, daß das Hafelekar etwa 15 km südlicher liegt als Mittenwald, wodurch sich die wahre Differenz zu etwa 1 Stunde ergibt. Um 6,4 Uhr am 29. September beginnt in Mittenwald die Temperatur erneut zu fallen, es fließen von Norden her flache arktische Luftmassen nach.

Stationspaar Reichenhall-Predigtstuhl (Abb. 7). Die in mittleren Höhen voreilende mP_T-Spitze ist aus den Registrierungen dieses am Nordrand der Alpen liegenden Stationspaares besonders deutlich zu erkennen. Die mP_T-Masse trifft am Predigtstuhl um 7,8 Uhr ein und im Tal erst um 9,4 Uhr; der Fall der barometrischen Mitteltemperatur beginnt etwa zur gleichen Zeit wie am Gipfel. Zwischen 8 Uhr und 10 Uhr ist die potentielle Äquivalenttemperatur im Tal von Reichenhall höher als in 1500 m Höhe. An der benachbarten, noch völlig nach Norden offenen Station Salzburg (420 m) erfolgt der Luftmassenwechsel um 11 Uhr, also noch später als in Reichenhall. Hier werden die in Bodennähe

liegenden mT-Massen volle 3 Stunden durch die voreilenden potentiell-äquivalent kälteren mP_T-Massen überweht. Die nördlich von Reichenhall liegenden Randberge (Staufen 1771 m) zerstören die voreilende Spitze der Kaltluft und bewirken, daß die mP_T-Masse hier früher bis zum Boden durchdringt. In der Nacht vom 27. auf 28. September liegen Reichenhall und Salzburg unter einer Inversion, die erst einige Stunden vor dem Frontdurchgang durchmischt wird. Die potentielle Äquivalenttemperatur ist infolge dieser nicht adiabatischen nächtlichen Abkühlung zunächst zu niedrig und erreicht erst ab 7 Uhr die repräsentativen Werte. Die mP-Masse trifft an allen drei Stationen gleichzeitig um etwa 19 Uhr ein; der Frontdurchgang ist durch einen scharfen Temperaturfall im Tal deutlicher markiert als in der Höhe, wo Temperatur und potentielle Äquivalenttemperatur eine breitere Übergangsschichte andeuten.

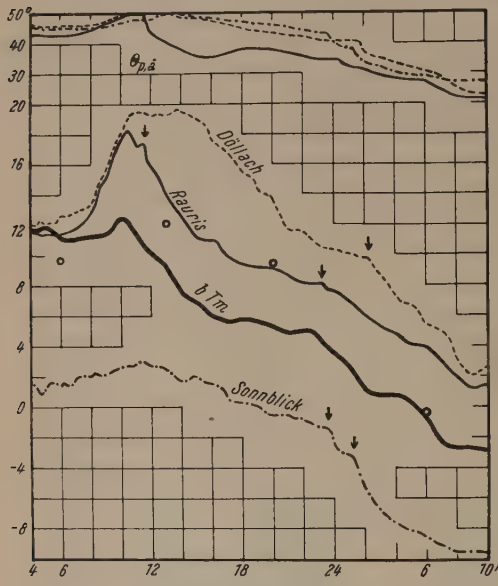


Abb. 8. Stündliche Werte der potentiellen Äquivalenttemperatur und der aktuellen Temperatur am 28./29. September 1940, MEZ., an den Stationen Rauris 950 m, Sonnblick 3106 m und Döllach 1006 m, sowie der barometrischen Mitteltemperatur zwischen Rauris und Sonnblick, $\Delta h = 2156$ m (dick ausgezogen).

Stationspaar Rauris-Sonnblick (Abb. 8). Die barometrische Mitteltemperatur zwischen Rauris und Sonnblick beginnt um 10 Uhr stark abzusinken, während der Luftmassenwechsel in Rauris erst um 11,8 Uhr erfolgt. Die mP_T-Spitze ist also noch vorhanden, wenn auch nicht so ausgeprägt, wie am Nordrand der Alpen. Den Gipfel des Sonnblick erreicht die mP_T-Masse erst um 23,6 Uhr, wie die potentielle Äquivalenttemperatur eindeutig zeigt. Die ab 13 Uhr registrierte langsame Abkühlung am Gipfel ist auf einen Hebungsvorgang innerhalb der mT-Masse zurückzuführen. Im Beobachtungstagebuch des Sonnblick findet sich die Eintragung: „Nebel $13^1/_2$ Uhr bis nachts, leichter Schneefall $15^1/_2$ Uhr bis nachts."

Um 23,5 Uhr des 28. September erreicht die mP-Masse Rauris und um 1 Uhr des 29. September den Gipfel des Sonnblick, also fast gleichzeitig, wenn man berücksichtigt, daß der Gipfel des Sonnblick 20 km weiter südlich liegt. Die barometrische Mitteltemperatur beginnt erneut zu fallen. Ab 6 Uhr fließen flache arktische Massen ins Rauriser Tal ein, begleitet von einem dritten Abfall der barometrischen Mitteltemperatur.

Die in Abb. 8 wiedergegebene Registrierung von Döllach, der südlichen Fußstation des Sonnblick, läßt erkennen, daß die Südseite des Alpenhauptkammes an dieser Stelle nicht von der mP_T-Masse erreicht wird. Die barometrische Mitteltemperatur (für die Terminbeobachtungen, in der Abbildung durch kleine Kreise markiert) bleibt am 28. September, ebenso wie die aktuelle Temperatur um einige Grade höher als auf der Nordseite des Hauptkammes. Um 2 Uhr des 29. September, bald nachdem die mP-Masse den Sonnblick erreicht hat, erfolgt auch in Döllach der Luftmassenwechsel von mT in mP. Die mP-Masse erreicht Döllach aber nicht über den Sonnblick als Nordföhn, sondern fließt über die niedrigeren Pässe über. Die Windstärke in Döllach bleibt gering und der Temperaturgradient Sonnblick—Döllach erreicht nicht den adiabatischen Wert. Die barometrische Mitteltemperatur ist um 6 Uhr des 29. September beiderseits des Hauptkammes gleich.

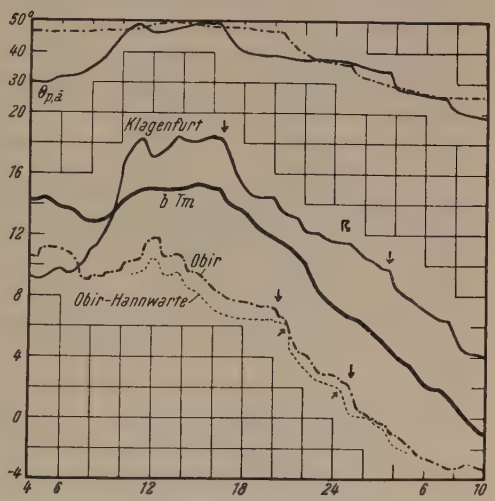


Abb. 9. Stündliche Werte der potentiellen Äquivalenttemperatur und der aktuellen Temperatur am 28./29. September 1940, MEZ., an den Stationen Klagenfurt 448 m, Obir 2044 m und Obir-Hannwarte 2142 m, sowie der barometrischen Mitteltemperatur zwischen Klagenfurt und Obir, $\Delta h = 1596$ m (dick ausgezogen).

Stationspaar Klagenfurt-Obir (Abb. 9). Nach Überschreitung des Alpenhauptkammes ändert sich das auf der Nordseite der Alpen gewonnene Bild der in mittleren Höhen voreilenden mP_T-Spitze grundsätzlich. Die mP_T-Masse erreicht Klagenfurt um 16,6 Uhr und den Obir um 20 Uhr. Zur Zeit des Frontdurchganges in Klagenfurt beginnt auch die barometrische Mitteltemperatur zwischen beiden Stationen zu fallen. Der Obir liegt rund 16 km weiter südlich als Klagenfurt, auf der Kette der südlichen Kalkalpen. Auch wenn man diese Distanz aus den Frontdurchgangszeiten eliminiert, bleibt eine Verspätung der Kaltfront am Obir um 2,5 Stunden bestehen. Sie ist nur so zu erklären, daß die auf der Nordseite der Alpen noch in der freien Atmosphäre vorstoßende Kaltluftspitze im Klagenfurter Becken den Erdboden berührt, die mP_T-Masse hier also keilförmig vordringt.

Von 0,10 bis 0,35 Uhr des 29. September wird in Klagenfurt ein Gewitter beobachtet, dem um 3,7 Uhr der Durchgang der mP-Front folgt. Am Obir trifft die mP-Masse bereits um 1 Uhr ein; sie eilt der Bodenfront also weit voraus. Durch volle 3 Stunden ist die potentielle Äquivalenttemperatur am Obir um 3 bis 4° niedriger als in Klagenfurt. Bei Berücksichtigung der Nord—Süd-Entfernung zwischen Klagenfurt

und Obir ergibt sich, daß das Gewitter in Klagenfurt zur gleichen Zeit ausbricht, zu der die in der Höhe voreilende mP-Masse über Klagenfurt ankommt. Die Labilisierung durch die in der Höhe voreilende Kaltluft wird damit gut demonstriert. Ab 2 Uhr zeigt auch die barometrische Mitteltemperatur einen verstärkten Fall. Ab 8,6 Uhr erreicht die flache arktische Masse Klagenfurt, den Obirgipfel im Laufe des 29. September jedoch nicht mehr.

In den Morgenstunden des 28. September hat sich ein für das Klagenfurter Becken typischer Kaltluftsee gebildet. Klagenfurt meldet zum Morgentermin Nebel und seine Temperatur ist niedriger als die am Obir. Infolge dieser nächtlichen Abkühlung ist auch die potentielle Äquivalenttemperatur zunächst zu niedrig. Um 8 Uhr löst sich der Nebel auf und die Einstrahlung heizt die Luft unter der Inversion rasch auf, bis um 11 Uhr repräsentative Werte der potentiellen Äquivalenttemperatur erreicht werden.

Die Registrierung des Temperaturverlaufes auf der Hannwarte am Gipfel des Obir (2142 m), etwa 100 m über der Station Obir gelegen, zeigt den Durchgang der mP_T-Masse um etwa 0,5 Stunden später, den der mP-Masse dagegen um etwa 0,5 Stunden früher als die Station Obir (punktierte Kurve in Abb. 9). Dadurch wird ebenfalls das Ergebnis bestätigt, daß die mP_T-Masse keilförmig vordringt, sich also von unten nach oben verzögert, während die mP-Masse in der Höhe früher eintrifft.

Der Versuch, lediglich mit Hilfe der Registrierungen von Tal- und Bergstationen der Alpen die Formen der Kaltfrontflächen des 28. September 1940 zu konstruieren, hat zu dem eindeutigen Ergebnis geführt, daß die zuerst einbrechende mP_T-Masse mit einer gut ausgeprägten Spitze zwischen 1200 und 2000 m Höhe ihrer Bodenfront um 3 bis 6 Stunden oder um 50 bis 100 km vorauseilt. Die mP-Masse dagegen dringt bis etwa 3200 m Höhe mit fast senkrechter Front vor. Während der Überschreitung der Alpen verformen sich die Frontflächen. Schon die Ketten der nördlichen Kalkalpen erniedrigen die Höhe der mP_T-Spitze deutlich und im Klagenfurter Becken berührt die mP_T-Spitze den Erdboden. Über die tiefen Täler auf der Südseite des Alpenhauptkammes, wie das Murtal, Drautal und Gailtal, dringt die mP_T-Masse aber ebenso zuerst in der Höhe vor und am Alpensüdrand (Venegono, Trient) erreicht sie örtlich überhaupt nicht den Erdboden. Die mP-Frontfläche neigt sich nach Überschreitung des Alpenhauptkammes zwischen 1300 und 2500 m Höhe stark vor und gibt zu kräftiger Labilisierung Anlaß. Die in mittleren Höhen voreilende Spitze der mP_T-Masse kann nicht als eine Hebung der Luftmassen vor der herannahenden mP-Front gedeutet werden, denn die potentiellen Äquivalenttemperaturen unterhalb 1 km Höhe sind in allen Fällen höher als in der voreilenden Spitze und erst oberhalb 2 km Höhe werden wieder ähnlich hohe Werte erreicht. Durch die Umdeutung der beobachteten zeitlichen Aufeinanderfolge der Ereignisse in ein räumliches Nebeneinander wird das Ergebnis allerdings in gewissem Maße anfechtbar.

Zu seiner Festigung soll im folgenden unter Heranziehung gleichzeitiger Flugzeug- und Radiosondeaufstiege versucht werden, aerologische Schnitte durch die Frontflächen zu gewinnen, denen eine erhöhte Beweiskraft zuzubilligen sein wird. Die große Zahl von Flugzeug- und Radiosondeaufstiegen am 28. September 1940 über Mitteleuropa ermöglicht die Konstruktion von drei Schnitten durch das System der Frontflächen (Abb. 1). Der westliche Schnitt 1 umfaßt die Aufstiege Helder (Flugzeug)—Rotterdam (Radiosonde)—Brüssel (F)—Nancy (R)—Freiburg (R)—Mailand (F) und die Bergstationen Feldberg im Schwarzwald (1493 m), Pilatus (2068 m), Säntis (2500 m), Jungfraujoch (3578 m),

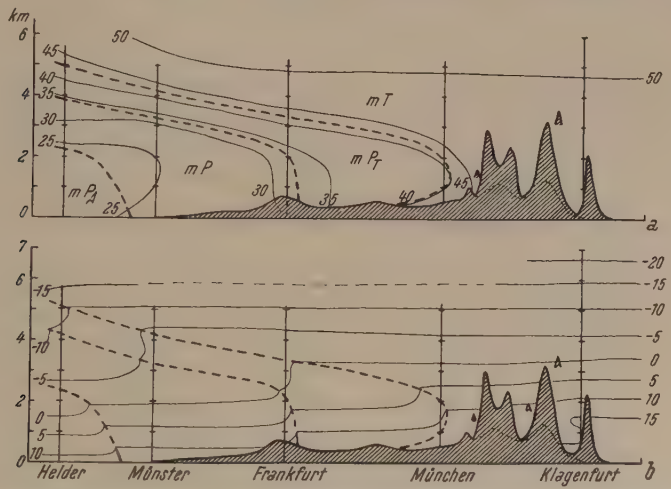


Abb. 10. Aerologischer Schnitt auf der Linie Helder—Klagenfurt am 28. September 1940, 6 Uhr, MEZ. a) potentielle Äquivalenttemperatur, b) Lufttemperatur.

St. Gotthard (2096 m) und St. Bernhard (2476 m). Der mittlere Schnitt 2 verläuft von Emden (R), bzw. Helder (F) über Münster (F)—Frankfurt (F)—München (F) nach Klagenfurt (R) mit den Bergstationen Hohenpeißenberg (982 m), Predigtstuhl (1578 m), Zugspitze (2962 m), Hafelekar (2261 m), Patscherkofel (1980 m), Sonnblick (3106 m) und Obir (2044 m). Der östliche Schnitt 3 geht aus von Dievenow (F) und verläuft über Rangsdorf (F)—Breslau (F)—Gleiwitz (R)—Wien (F) nach Budapest (F), ergänzt durch die Bergstationen Semmering (1013 m) und Kekestetö (998 m).

Die Schnitte wurden mit Rücksicht auf die vorhandenen Aufstiege so gewählt, daß das Frontensystem möglichst von Flugzeugaufstiegen durchstoßen wurde, deren verläßlichere Feuchtigkeitsangaben, zusammen mit den direkten Wolkenbeobachtungen eine sichere Festlegung der Frontflächen in der freien Atmosphäre ermöglichte. Am besten belegt ist Schnitt 2 (Abb. 10a, b), bei dem vier Flugzeugaufstiege die Frontflächen am 28. September, 6 Uhr, durchstoßen. Der ganze Alpenraum

befindet sich zu dieser Zeit in einer mT-Masse (Abb. 2), deren Untergrenze nach Nordwesten ansteigt; über Helder wird sie in 5 km Höhe gerade noch erreicht. Darunter liegt zwischen Frankfurt und München eine mP_T-Masse, deren Grenzfläche vom Münchener Aufstieg zweimal geschnitten wird, obwohl die Schnittlinie dieser Grenzfläche mit dem Boden noch nördlich von München verläuft (Abb. 1). Die entsprechenden Werte der potentiellen Äquivalenttemperatur über München sind: 41° am Boden, 36° in 1600 m, 44° in 1800 m, 47° in 3000 m und weiter über 45° bis zur Gipfelhöhe. Der Zeitpunkt des Münchener Aufstieges ist sehr günstig; die zwischen 1000 und 2000 m Höhe ihrer Bodenfront

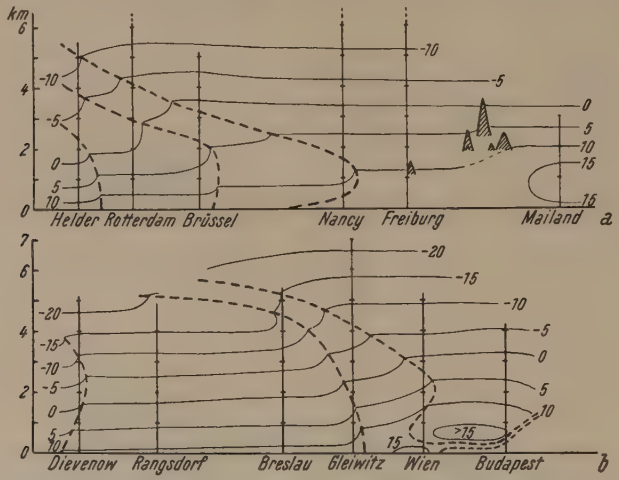


Abb. 11. Aerologische Schnitte am 28. September 1940, 6 Uhr, MEZ. a) Helder—Mailand (Temperatur); b) Dievenow—Budapest (Temperatur).

am weitesten voreilende Spitze der mP_T-Masse wird gerade geschnitten, wodurch die aus den Registrierungen der alpinen Bergstationen abgeleitete Form der mP_T-Front auch in der freien Atmosphäre belegt wird. In Frankfurt ist die bis 2000 m Höhe mit fast senkrechter Front vorstoßende mP-Masse gerade angekommen; ihre Obergrenze steigt bis Helder auf 4200 m an. Der Übergang zwischen mP und mT vollzieht sich in einer Inversionsschicht, die über Frankfurt 1700 m, über Münster 1000 m und über Helder 700 m mächtig ist. In Emden, bzw. Helder ist die gerade das Festland erreichende mP_A-Masse bis 2000 m Höhe zu erkennen. Die nach oben abnehmende Mächtigkeit der Übergangsschicht zwischen mT und mP stimmt gut mit der aus den Registrierungen der alpinen Stationen ersichtlichen Abnahme der Differenz zwischen den Durchgangszeiten der mP_T- und der mP-Masse überein.

Der westliche Schnitt 1 durch das Frontensystem (Abb. 11a) zeigt in wesentlichen Zügen den gleichen Aufbau wie Schnitt 2. Die mP_T-Spitze ist auch hier vorhanden, scheint aber etwas tiefer, zwischen 500

und 1500 m zu liegen. Ein eindeutiger Beweis ist hier nicht möglich, da die Radiosonde von Nancy, die die voreilende mP_T-Spitze durchsetzt, keine Feuchtigkeitswerte gemeldet hat und nur Temperaturen an den Hauptisobarenflächen zur Verfügung stehen. Die gleichen Einschränkungen gelten für die Radiosonden Freiburg und Rotterdam. Die gut ausgeprägte Inversionsschicht zwischen mT- und mP-Masse hat in Brüssel eine Mächtigkeit von über 1000 m.

Wesentlich andere Verhältnisse zeigt der in größerer Nähe des Tiefdruckkernes verlaufende östliche Schnitt 3 (Abb. 11b). Die Obergrenze der mP-Masse wird durch den Breslauer Aufstieg in 4,5 km Höhe zweifelsfrei durchstoßen; über ihr folgt nach einer etwa 500 m mächtigen Inversionsschicht ab 5 km Höhe die mT-Masse. Die Aufstiege Rangsdorf und Dievenow erreichen die Obergrenze der mP-Masse nicht mehr, die hier etwas über 5 km Höhe (gegen 4 km in Helder) betragen dürfte. Die Radiosonde Gleiwitz, von der leider nur die Temperatur- und Feuchtigkeitswerte an den Hauptisobarenflächen verfügbar sind, zeigt bis 1700 m Höhe mP, dann bis 4 km Höhe mP_T und darüber mT. Budapest am Ende des Profils liegt knapp vor der Warmfront des Systems. Bis 900 m Höhe reicht hier noch die alte mP-Masse des vorhergehenden Tiefdruckgebietes, darüber liegt mT bis zum Gipfel des Aufstieges in 4 km Höhe. Die Warmfront wird auch durch die beiden benachbarten Bergstationen bestätigt, von denen der unmittelbar nördlich von Budapest liegende Dobogokö (700 m) sich schon in der Warmluft, der nordöstlich von Budapest liegende Kekestetö (998 m) sich noch in der Kaltluft befindet. Tabelle 2 zeigt diese Verhältnisse.

Tabelle 2. *Wetterzustand (Schlüssel Warschau 1935): am 28. September 1940, 7 Uhr MEZ.*

Station	Höhe	ww	C_L	C_M	C_H	TT	app	pot. Äquivalenttemperatur
Budapest	130 m	02	5	1	/	12	814	30
Dobogokö	700 m	03	0	2	/	12	806	40
Kekestetö	998 m	46	/	/	/	07	811	33

Der etwas außerhalb des Schnittes gelegene Wiener Aufstieg zeigt am Boden eine mP_T-Masse und zwischen 0,5 und 1 km Höhe eine Übergangsmasse zwischen mP_T und mT. Von 1 bis 2,5 km Höhe folgt erneut mP_T, die wohl als die in der Höhe voreilende Spitze dieser Masse aufgefaßt werden muß. Erst über 2,5 km Höhe liegt mT bis zum Gipfel des Aufstieges.

Der Durchgang des Frontensystems in Wien, sowie an den übrigen Stationen des Alpenostrandes (Mariabrunn 229 m, Gumpoldskirchen 232 m, Wiener Neustadt 270 m, Neusiedl am See 140 m) unterscheidet sich von den weiter westlich gelegenen Stationen vor allem durch das Fehlen der mT-Masse. Diese Stationen liegen zunächst in einer alten mP-Masse, die zwischen 1 und 7 Uhr von mP_T abgelöst wird; darauf

folgt unmittelbar der Übergang zur frischen mP-Masse. Abb. 12 zeigt als Beispiel den Verlauf der potentiellen Äquivalenttemperatur in Wien. Die 75 km südwestlich von Wien in 1013 m Höhe gelegene Station Semmering zeigt dagegen den gleichen Ablauf des Frontdurchganges wie alle übrigen Alpenstationen: zunächst mT bis 9,1 Uhr, dann mP_T bis zum Durchgang der mP-Masse um 21,2 Uhr. Die abweichenden Verhältnisse an den Stationen des Alpenostrandes beschränken sich somit auf die bodennahen Schichten unterhalb 1000 m Höhe. Hier ist eine flache Schleppe der über Ungarn abziehenden alten mP-Masse liegengeblieben, die mit dem Einsetzen lebhafteren Westwindes (in Wien um 0,7 Uhr) von den in der Höhe vordringenden mP_T-Massen verdrängt wird.

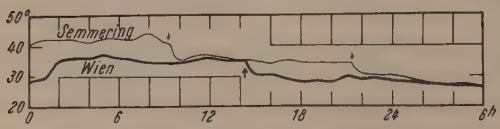


Abb. 12. Stundenwerte der potentiellen Äquivalenttemperatur in Wien 202 m und am Semmering 1013 m am 28./29. September 1940, MEZ.

Entsprechend diesem Herabsinken der mP_T-Masse aus höheren Schichten hat der Luftmassenwechsel zwischen alter mP und frischer mP_T weniger den Charakter einer regulär vordringenden Front, sondern zeigt große lokale Unterschiede. Ein schönes Beispiel dafür ist die in Abb. 13 wiedergegebene Temperaturregistrierung der südlich von Wien nur 10 km voneinander entfernten Stationen Mariabrunn und Gumpoldskirchen. Während in Mariabrunn der Luftmassenwechsel mit einem starken Anstieg der Temperatur und entsprechendem Fall der relativen Feuchte etwas vor 1 Uhr erfolgt, verbleibt Gumpoldskirchen über 2 Stunden länger in der alten mP-Masse und erst nach einem heftigen Kampf zwischen den Luftmassen, von dem die scharfen Temperaturschwankungen zeugen, setzt sich nach weiteren 2 Stunden die mP_T-Masse um 5 Uhr endgültig durch. Die Temperaturregistrierung von Wien gleicht bis auf wenige Zehntelgrade der von Mariabrunn; der Durchgang der frischen mP-Masse erfolgt in Wien etwa eine halbe Stunde früher, wie aus Abb. 12 zu ersehen ist. Die weiter im Westen erhalten bleibende Untergrenze der mP_T-Spitze löst sich hier am Ostrand der Alpen unter anscheinend turbulenten Verhältnissen auf. Als erste Registrierstation westlich von Wien zeigt Lunz am See (615 m) zweifelsfrei die mT-Masse vor dem Durchgang der mP_T.

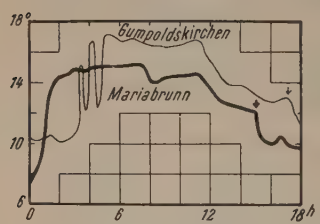


Abb. 13. Temperaturregistrierung in Mariabrunn 229 m und Gumpoldskirchen 232 m am 28. September 1940, MEZ.

Die Veränderung des Frontensystems innerhalb der folgenden 12 Stunden, deren charakteristische Züge schon aus den Registrierungen der Bergstationen ermittelt werden konnten, ist auch aus dem gut belegten aerologischen Schnitt vom 28. September 1940, 18 Uhr, zu ersehen (Abb. 14a, b). München ist gerade von der mP-Masse erreicht worden,

die schon bis 2700 m Höhe mit senkrechter Front vordringt. Darüber liegt die mP_T-Masse und ab 4 km Höhe die mT, in der der Aufstieg Klagenfurt noch zur Gänze verläuft. Hier ist die mP_T am Boden gerade angekommen, die um 6 Uhr am Nordrand der Alpen noch zwischen 1 und 2 km Höhe voreilende Spitze dieser Masse hat sich also bis zum Boden gesenkt. Bis zum Erreichen des Alpenhauptkammes schwillt die senkrechte Front der mP-Masse um weitere 600 m bis auf 3,3 km Höhe an. Von den nördlicheren Aufstiegsstellen erreicht nur noch Frankfurt die Obergrenze der mP-Masse in 4,5 km Höhe, während die Grenzfläche zwischen mP_T und mT schon knapp oberhalb der Gipfelhöhe

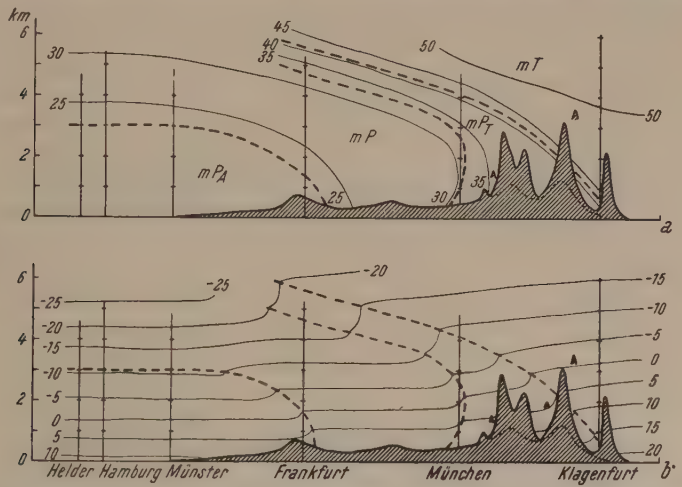


Abb. 14. Aerologischer Schnitt auf der Linie Helder–Klagenfurt am 28. September 1940, 18 Uhr MEZ. a) potentielle Äquivalenttemperatur, b) Temperatur.

bleibt. Am Boden ist die flache mP_A-Masse bereits über Frankfurt hinweggegangen, ihre Obergrenze wird bei 1,5 km Höhe durchstoßen.

Bis in die Morgenstunden des 29. September ändert sich das Bild nicht mehr wesentlich. Der hier nicht wiedergegebene Schnitt vom 29. September, 6 Uhr, zeigt die südlich des Alpenhauptkammes zwischen 1 und 2 km Höhe vorgeneigte Frontfläche der mP-Masse, die über den Alpen in etwa 4 km Höhe verläuft und vom Münchener Aufstieg bei 4,3 km durchstoßen wird. Die mP_A-Masse hat die Alpen erreicht und besitzt über München eine Mächtigkeit von 2,5 km. Sie ist gegen den Vortag etwas auseinandergeflossen und erreicht an keiner Station mehr 3 km.

Das mehrfach belegte Voreilen der Kaltluftmassen in der Höhe, zunächst der mP_T-Masse und nach Überschreiten des Alpenhauptkammes auch der mP-Masse, muß sich auch im Windfeld nachweisen lassen. Nachdem passende Höhenwindmessungen fehlen, wurde als Grundlage für die Nachprüfung der aerologische Schnitt 2 durch das Fronten-

system von Emden nach Klagenfurt am 28. September 1940, 6 Uhr (Abb. 10a, b), gewählt. Zunächst wurde für 10 Punkte auf diesem Profil im Abstand von je 100 km der Gradientwind für die Hauptisobarenflächen 900 bis 500 mb mit Hilfe der Nomogramme von H. BERG [*1*] unter Berücksichtigung der Krümmung der Isopotentialen bestimmt. Dazu wurden die Topographien der genannten Hauptisobarenflächen unter Verwendung sämtlicher aerologischer Aufstiege, der Bergstationen sowie der Pilotballonbeobachtungen mit einem Abstand der Isopotentialen von 10 dynamischen Metern neu gezeichnet. Die aus diesen Topographien entnommenen Windvektoren wurden sodann in Komponenten parallel

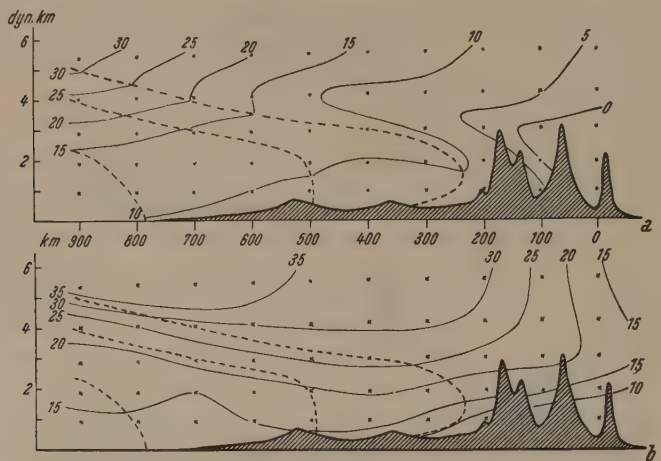


Abb. 15. a) Frontsenkrechte, b) frontparallele Komponente des Gradientwindes (m/sec) am 28. September 1940, 6 Uhr MEZ., Schnitt 2: Emden—Klagenfurt.

und senkrecht zur Front zerlegt. Das in Abb. 15a, b dargestellte Ergebnis zeigt trotz des sehr weitmaschigen Netzes von Meßpunkten innerhalb der mP_T-Spitze und längs der mP_T-Frontfläche ein deutliches Maximum der frontsenkrechten Komponente des Gradientwindes.

Durch den Nachweis der relativ zur Warmluft oberhalb und unterhalb größeren frontsenkrechten Geschwindigkeit in der Kaltluftspitze erscheint die Realität des Voreilens der Kaltluft in der Höhe zusätzlich gesichert. Bleibt die frontsenkrechte Komponente des Gradientwindes in der Umgebung der Frontfläche über der Reibungshöhe in allen Höhen angenähert konstant, dann erfährt die Form der Kaltfront keine Veränderungen und ein reelles Voreilen der Kaltluft in der Höhe ist nicht möglich. Auf diesen Fall bezieht sich aber der entsprechende Nachweis, den PALMÉN in einer wichtigen Untersuchung [*6*] geführt hat.

Der Verlauf des Luftdruckes an den einzelnen Stationen bestätigt dieses auf verschiedenen Wegen erhaltene Bild vom Aufbau der Kaltfronten und ihren Veränderungen beim Überschreiten der Alpen. Abb. 16 zeigt als Beispiel zehn Barogramme von Stationen, die über den ganzen

Alpenraum verteilt sind. Für alle Stationen nördlich des Alpenhauptkammes ist ein Druckverlauf charakteristisch, der durch die Barogramme von Wien, München, Salzburg, Mittenwald, Innsbruck, Rauris und Lausanne vertreten ist. Auf einen gut ausgeprägten Druckfall folgt (Punktmarke in Abb. 16) ein Kurvenstück ohne oder mit nur geringen Druckänderungen. In diesen Abschnitt fällt der Durchgang der ersten Kaltfront (mP_T, einfacher Pfeil), die somit ohne deutliche Diskontinuität im Druckverlauf eintrifft. Die in allen Barogrammen der Alpennordseite deutlich markierte Beendigung des Druckfalles ist mit dem Eintreffen der in der Höhe vorstoßenden Kaltluftspitze über der Station zu deuten. Den Beweis dafür liefert der zur gleichen Zeit stattfindende Flugzeugaufstieg von München, der die Spitze des Kaltluftkeiles gerade schneidet. Die gleiche Form des Barogramms von Wien zeigt, daß der dort nicht auffindbare Einsatz der mP_T-Masse nur durch eine flache Kaltluftschleppe verdeckt sein kann, wofür schon die Registrierungen der Station Semmering beweisend waren. Die Zeitdifferenz zwischen der Beendigung des Druckfalles und dem Durchgang der ersten Kaltfront ist an den Stationen des Alpenvorlandes (München, Salzburg) am größten und nimmt gegen den Alpenhauptkamm hin ab, entsprechend der Zerstörung der in der Höhe vorstoßenden Kaltluftspitze durch die nördlichen Randketten der Alpen.

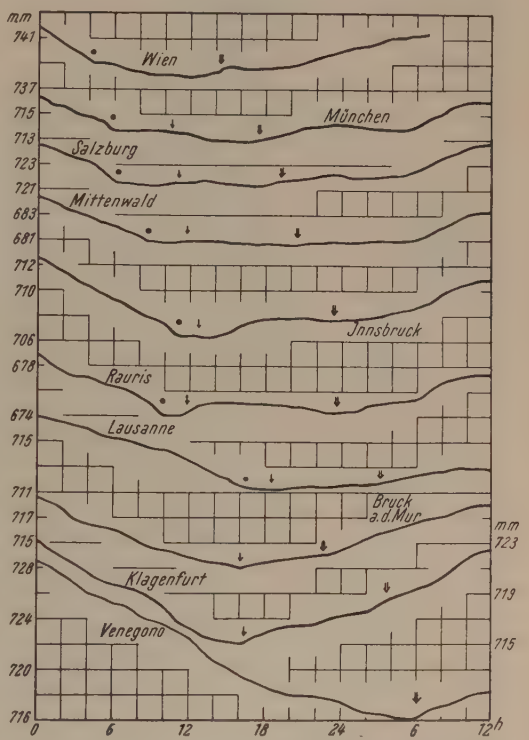


Abb. 16. Barogramme vom 28. September 1940, 0 Uhr, bis 29. September, 12 Uhr MEZ. Punktmarke: Eintreffen der Kaltfrontspitze in der Höhe. Einfacher Pfeil: Durchgang der mP_T-Front; doppelter Pfeil: Durchgang der mP-Front.

Ganz anders verhält sich wegen der veränderten Form der Kaltfronten der Druckverlauf südlich des Alpenhauptkammes. Bruck a. d. Mur und Klagenfurt zeigen den tiefsten Druck bei Eintreffen der ersten Kaltfront, die hier ohne in der Höhe voreilende Spitze keilförmig vordringt. Der Durchgang der zweiten Kaltfront (mP, doppelter Pfeil) ist durch eine Verstärkung des Druckanstieges erkennbar. Das zumindest

Abb. 17. Niederschlagsmenge, mm, vom 28. September 1940, 7 Uhr, bis 29. September 1940, 7 Uhr. Isohyeten konstruiert unter Benützung von 1350 Stationen. Grau schraffiert: Gelände über 1000 m Höhe.

im Klagenfurter Becken nachgewiesene Voreilen der zweiten Kaltfront oberhalb 1000 m Höhe ist auch aus dem Barogramm von Klagenfurt gut zu erkennen. Die Verstärkung des Druckanstieges setzt fast 2 Stunden vor dem Durchgang der zweiten Front ein, also zur Zeit des Eintreffens der hier in der Höhe voreilenden mP-Massen über der Station.

Am Südrand der Alpen erreicht die erste Kaltfront nicht überall den Boden. Ihr Eintreffen ist durch eine Verlangsamung des Druckfalles angedeutet (Venegono um etwa 20 Uhr, Abb. 16). Erst die zweite Kaltfront beendet hier den Druckfall. Ähnliche Typen von Barogrammen werden auch bei den Höhenkaltfronten östlich des nordamerikanischen Felsengebirges beobachtet [*4*, *5*].

Der Durchgang der beiden Kaltfronten wird von zum Teil sehr ergiebigen Niederschlägen begleitet, deren Einsatz auf der Nordseite der Alpen fast

durchwegs mit dem Eintreffen der mP_T-Masse zusammenfällt. An den Stationen im Lee der nördlichen Kalkalpen sowie gegen den Alpenhauptkamm zu verspätet sich der Beginn des Niederschlages gegen den Frontdurchgang um mehrere Stunden. Südlich des Alpenhauptkammes fällt das Maximum des Niederschlages mit dem Eintreffen der mP-Masse zusammen.

Die mit den Ergebnissen von 1350 Niederschlagsmeßstellen konstruierte Karte der Niederschlagsverteilung vom 28. September, 7 Uhr, bis 29. September, 7 Uhr (Abb. 17), gibt ein eindrucksvolles Bild der Wirkung des Nordstaues, da die in dem dargestellten Zeitraum gefallenen Niederschläge ihre Entstehung ausschließlich den Vorgängen an den beiden Kaltfronten verdanken. Vom Berner Oberland bis zum Hochschwab erstreckt sich über dem Nordrand der Alpen ein nur im Rheintal unterbrochener Gürtel mit Niederschlägen über 30 mm, der einige Maxima über 50, bzw. über 60 mm aufweist. Im Lee der nördlichen Kalkalpen sinkt die Niederschlagsmenge rasch unter 10 mm und erst die zentralen Gruppen der Alpen erhalten Niederschlagsmengen zwischen 10 und 20 mm oder etwas darüber. Teile des Rhonetales und des oberen Inntales, sowie auf der Südseite der Alpen das Tessin und Veltlin, der Vintschgau und das Pustertal bleiben überhaupt niederschlagsfrei.

In den Dolomiten sowie südlich des Murtales werden wieder Niederschlagsmengen über 30 mm, in großen Teilen von Kärnten und der südöstlichen Steiermark sogar über 50 mm beobachtet. In den Julischen Alpen fallen über 100 mm Niederschlag. Die ausnehmend starken Niederschläge in diesen südöstlichen Teilen der Alpen sind nur zum Teil auf die starke Labilisierung durch die hier in der Höhe voreilende zweite Kaltfront zurückzuführen. Maßgebend dafür ist vor allem die Ausbildung eines kleinen Tiefdruckgebietes über der Poebene in den Abendstunden des 28. September, das nach einem 24stündigen Druckfall von fast 15 mb (Druckverlauf von Venegono in Abb. 16) mit einem Kerndruck von unter 1000 mb in den Morgenstunden des 29. September über dem Golf von Genua liegt. In seinem Zirkulationsbereich findet in der Nacht vom 28./29. September über dem südöstlichen Teil der Alpen ein kräftiges Aufgleiten von mT an der langsam nach Süden vordringenden mP-Masse statt. Beide Vorgänge zusammen machen die gewaltigen Niederschlagsmengen der Nacht 28./29. September verständlich. Die größten Niederschlagsmengen wurden an folgenden Stationen beobachtet [*9*]:

Tabelle 3. *Maximale Niederschlagsmengen vom 28. September, 7 Uhr bis 29. September, 7 Uhr.*

Flußgebiet	Station	Höhe m	Niederschlag mm
Isonzo	Uccea	663	122
	Passo Predil	1162	167
	Sonzia	476	138
	Na Logu	622	120
Tagliamento	Coritis	641	213
	Oseacco	490	181
	Resia	380	138

Es erscheint nicht überflüssig, kurz darauf hinzuweisen, daß auch an eng benachbarten Stationen der Luftmassenwechsel verschieden ablaufen kann. Die Deutung der Registrierungen einzelner Stationen und die Verallgemeinerung des daraus gewonnenen Bildes kann daher nur mit großer Vorsicht vorgenommen werden. Die um den Sonnblick gruppierten Talstationen (Rauris 950 m und Badgastein 974 m auf der Nordseite, Döllach 1006 m und Mallnitz 1185 m auf der Südseite, vgl. die Lagekarte bei F. STEINHAUSER [8]) dienen als Beispiel (Abb. 18).

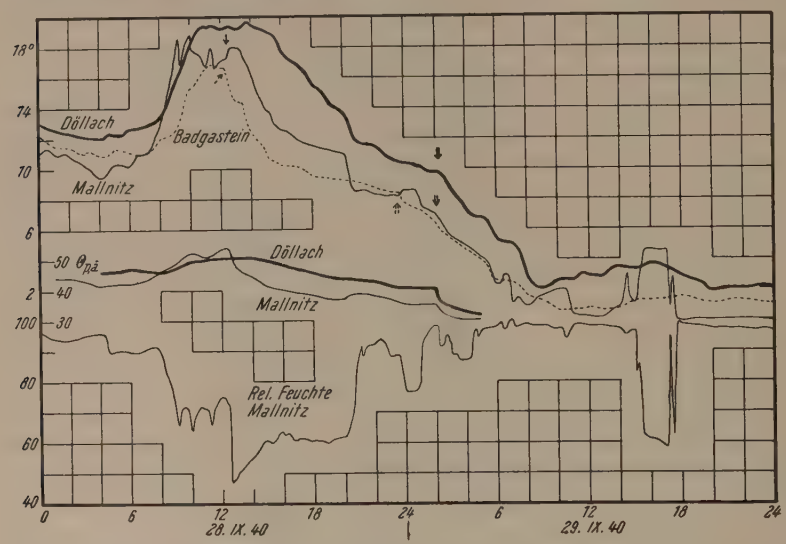


Abb. 18. Stündliche Werte der Temperatur (Mallnitz 1185 m, Döllach 1006 m, Badgastein 974 m), der potentiellen Äquivalenttemperatur (Mallnitz und Döllach) und der relativen Feuchte (Mallnitz) am 28./29. September 1940, MEZ.

Die mP_T-Masse passiert Rauris um 11,8 Uhr (Abb. 8), Badgastein um 12,2 Uhr und trifft bereits um 12,5 Uhr in Mallnitz ein, obwohl diese Station 15 km südlicher, jenseits des Alpenhauptkammes liegt, was nur mit einem Absteigen der in der Höhe vorgeeilten Kaltluft (bei divergenten Winden beiderseits des Kammes) zu deuten ist. Nun fließt die mP_T-Masse als Nordföhn über die Tauernpässe (2420 m bzw. 2470 m). Durch viele Stunden bleibt Mallnitz um 2 bis 3° wärmer als die 200 m tiefer gelegene Station Badgastein, wo ab 14,5 Uhr Niederschlag fällt. Der schroffe Temperaturfall in Mallnitz um 20 Uhr bedeutet keinen Luftmassenwechsel, wie die potentielle Äquivalenttemperatur erkennen läßt, lediglich der Abgleitvorgang des Nordföhns wird um diese Zeit durch Aufgleiten mit Niederschlägen beendet. Die nur 20 km weiter westlich gelegene Station Döllach bleibt während dieser Zeit in der mT-Masse und ist, obwohl nur 180 m tiefer gelegen, um 5° wärmer als Mallnitz. Tabelle 4 enthält die barometrischen Mitteltemperaturen zwischen Sonn-

blick und drei Talstationen. Daraus ist eindeutig zu erkennen, daß die mP_T-Masse bis 20 Uhr nicht in das obere Mölltal eindringt, das nach Norden durch höhere Kämme begrenzt wird. Die Mitteltemperaturen der Luftsäulen über Rauris und Mallnitz dagegen sind gleich.

Tabelle 4. *Barometrische Mitteltemperatur zwischen den Stationen:*
1. Sonnblick-Mallnitz (Δh 1921 m, Südseite),
2. Sonnblick-Döllach (Δh 2100 m, Südseite),
3. Sonnblick-Rauris (Δh 2157 m, Nordseite).

	06	13	20	06
	28. IX. 1940			29. IX. 1940
1.	9,0	9,9	5,1	— 1,1
2.	9,7	12,0	9,3	— 0,4
3.	11,0	9,3	5,3	— 0,6
1. — 2.	— 0,7	— 2,1	— 4,1	— 0,7
1. — 3.	— 2,0	0,6	— 0,1	— 0,5

Der Durchgang der zweiten Kaltluftmasse (mP) erfolgt ohne Komplikationen: knapp vor 24 Uhr wird Rauris und Badgastein passiert, um 1 Uhr des 29. September der Sonnblick, Mallnitz und Döllach um 2 Uhr. Die potentiellen Äquivalenttemperaturen zeigen jetzt überall die gleiche Luftmasse, obwohl Döllach immer noch um 3° wärmer ist als Mallnitz, weil die mP-Masse über höhere Kämme absteigen muß. Am Nachmittag des 29. September kommt es in Mallnitz noch einmal zu verstärktem Nordföhn, erst danach wird die Temperaturschichtung beiderseits des Alpenkammes angenähert normal.

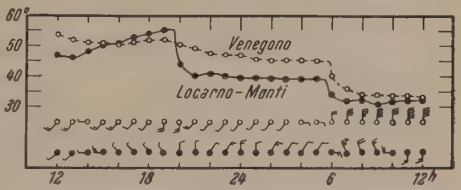


Abb. 19. Stündliche Werte der potentiellen Äquivalenttemperatur, sowie der Windrichtung und Windgeschwindigkeit (eine Fieder = 10 km/h) an den Stationen Locarno – Monti 380 m und Venegono 408 m am 28./29. September 1940, MEZ.

Ähnliche Verhältnisse findet man auch am Südrand der Alpen (Abb. 19). In Locarno-Monti (380 m) trifft die mP_T-Masse mit leichtem Nordföhn um 19,5 Uhr am 28. September ein und die mP-Masse um 5,5 Uhr am 29. September. Die nur 48 km weiter südlich gelegene Station Venegono (408 m) verbleibt dagegen bis zu dem mit stürmischem Nordföhn erfolgenden Eintreffen der mP-Masse um 6 Uhr am 29. September bei leichtem Südwestwind in der stabileren mT-Masse, die während dieser Zeit von der potentiell-äquivalent kälteren mP_T-Masse überweht wird. Ähnliche Unterschiede bestehen auch zwischen den Stationen Bozen (290 m) und Trient (210 m).

Am 29. September, 6 Uhr, sind die Alpen einheitlich von mP überflutet (Abb. 2) und die meisten Stationen ordnen sich gut um die mittlere

Zustandskurve (Abb. 20), die einen vertikalen Gradienten von etwa 0,6° pro 100 Meter erkennen läßt. Nur einige Stationen auf der Südseite der Alpen fallen stark heraus. So ist Trient (210 m) mit 13° trotz geringerer Höhe kälter als Locarno-Monti (380 m) mit 18° und beide Stationen sind viel wärmer als gleich hohe im übrigen Alpengebiet. Diese Verhältnisse lassen sich mit der Nordföhnwirkung leicht erklären. Die Adiabate durch Locarno-Monti trifft die Zustandskurve bei 3000 m Höhe, das ist aber die mittlere Kammhöhe der Tessiner Alpen; die Adiabate durch Trient trifft die Zustandskurve bei 1400 m, das entspricht etwa der Höhe des Brennerpasses.

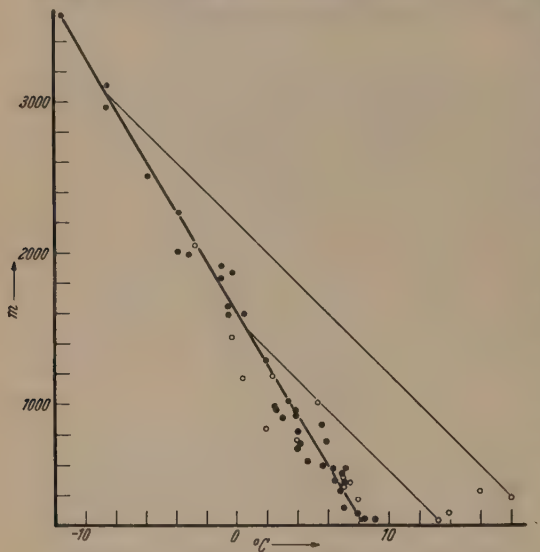


Abb. 20. Zustandskurve der Temperatur im Alpengebiet am 29. September 1940, 6 Uhr MEZ. ● Nordseite, o Südseite der Alpen.

Literaturverzeichnis.

1. Berg, H.: Nomogramme zur Ermittlung des Gradientwindes aus Karten der Topographie bestimmter Isobarenflächen. Erf. Ber. d. D. Flugwetterd., 8. Folge, Nr. 18 (1934).
2. Ekhart, E.: Der große Kälteeinbruch Ende November 1930. 3. Mitt. Gerl. Beitr. Geophys. **53**, 161 (1938).
3. v. Ficker, H.: Der Transport kalter Luftmassen über die Zentralalpen. Denkschr. Wiener Akad. Math.-nat. Kl. **80** (1906).
4. Holzman, B.: Synoptic Determination and Forecasting Significance of Cold Fronts aloft. Month. Weath. Rev. **64**, 400 (1936).
5. Lichtblau, St.: Upper-air Cold Fronts in North America. Month. Weath. Rev. **64**, 414 (1936).
6. Palmén, E.: Discussion of Problems concerning Frontal Analysis in the Free Atmosphere. Mitt. Meteorol. Inst. Helsinki, Nr. 57, 1946.
7. Schnaidt, F.: Über die adiabatischen Zustandsänderungen feuchter Luft usw. Gerl. Beitr. Geophys. **60**, 16 (1943).
8. Steinhauser, F.: Die Meteorologie des Sonnblicks I. Wien 1938.
9. Ufficio idrografico del magistrato alle aque, Venezia, Boll. Mens. Sett. 1940, Roma 1941.

551.513.7 : 551.509.33

(Wetterdienst Rheinland-Pfalz, Wetteramt Neustadt,
Leiter: Dr. Richard Habermehl.)

Kritische Betrachtung einiger Weltkorrelationen.

Von
Albert Cappel.

Zusammenfassung. Eine Neuberechnung bekannter Korrelationskoeffizienten für den Zeitraum 1911 bis 1940 zeigt, daß die meisten Werte nicht stabil sind. Eine Verwendung in der Langfristprognose kann daher nur nach Prüfung der zeitlichen Stabilität erfolgen. Da zudem solche Beziehungen oft einseitig oder nicht linear sind, ist die Aufstellung von Korrelationstabellen unentbehrlich.

Summary. A new computation of the coefficients of correlation for the period 1911–1940 shows that most of the values are unstable. Therefore they can be used in long-range forecast only after an examination of their temporal stability. Such relations being moreover frequently unilateral or not linear, the computation of correlation tables is indispensable.

Résumé. Une nouvelle détermination des coefficients de corrélation pour l'intervalle de 1911 à 1940 montre que la plupart de ces valeurs n'est pas stable. Un emploi pour la prévision à longue échéance ne peut donc avoir lieu qu'après un examen de la stabilité. Comme en plus les relations ne sont souvent pas linéaires ou unilatérales, un tableau complet de corrélations est indispensable.

Es gibt nichts Bleibendes auf
dem Gebiete des Wettergeschehens
in unseren Breiten.
(A. Schmauss)

Zur Erforschung der Zusammenhänge der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre in verschiedenen Teilen der Erde bedient man sich u. a. auch der Korrelationsrechnung. Man geht dabei von der Überlegung aus, daß Änderungen der Zirkulation über einem Gebiet aus Kontinuitätsgründen und infolge Konstanz der Atmosphärenmasse sich gleichzeitig oder zu einem späteren Termin über einem anderen Gebiet auswirken. So wurden im Laufe der Zeit eine große Anzahl von Beziehungen gefunden, die einen „überzufälligen Wert" aufwiesen, und die auch in den meisten Fällen eine hinreichende Erklärung finden konnten. Insbesondere erweitern Untersuchungen, die Änderungen oder Abweichungen der

meteorologischen Elemente an einem Ort mit ebensolchen *gleichzeitigen* [*1*] an einem anderen Ort verbinden, unsere Kenntnisse über die atmosphärischen Vorgänge weitgehend. Andere Arbeiten befaßten sich mit den Auswirkungen auf die Folgewitterung entfernter Gebiete, um letzten Endes bei genügend engem Zusammenhang Unterlagen für eine Langfristprognose zu gewinnen.

Eine Zusammenfassung der wichtigsten bis zum Jahre 1926 untersuchten weltweiten Korrelationen gibt Defant [*2*] in einem Sammelreferat, worauf hier verwiesen sei. Weitere Angaben über Beziehungen zwischen dem Witterungsgepräge verschiedener Teile der Erdoberfläche finden wir bei Baur [*1*].

Obwohl bereits 1930 F. Baur [*3*] auf die „Instabilität" der Beziehung des Luftdrucks im April bis Juni in Buenos Aires zur darauffolgenden Wintertemperatur in Mitteleuropa hinweist und in einer weiteren im Jahr 1937 erschienenen Arbeit [*4*] den Nachweis erbringt, daß die von Petterssen und Meinardus entdeckte stark positive Korrelation zwischen der Golfstromtemperatur im Vorwinter und der Lufttemperatur im nachfolgenden Winter der Jahre 1861 bis 1890, die auch als Grundlage einer „meist erfolgreichen Langfristprognose" in meteorologische Lehrbücher übernommen wurde, im anschließenden Zeitraum 1890 bis 1920 negativ war, und dabei allgemein auf die Notwendigkeit einer Stabilitätsprüfung aufmerksam macht, werden trotzdem auch in der neuesten Literatur [*5*] Korrelationskoeffizienten aus über 30 Jahre zurückliegenden Zeiträumen kritiklos als für heute noch gültig angesehen und zum Teil auch von Fachleuten als Grundlagen für Jahreszeitvorhersagen herangezogen. Die Notwendigkeit einer kritischen Nachprüfung ergibt sich allein schon aus der Tatsache, daß in der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre längerperiodische Schwankungen vorhanden sind, die sich nicht immer gleichsinnig in den Beziehungen weltweiter Gebiete äußern müssen.

Zur Klärung der damit zusammenhängenden Fragen wurde zunächst auf eine Arbeit von Pollak [*6*] zurückgegriffen, die sich mit der Untersuchung der Korrelationen von monatlichen Anomalien der Lufttemperatur ausgewählter Pole mit jener anderer Orte befaßt. Pollak berechnet u. a. die Korrelationskoeffizienten zwischen der Juli- bzw. Januartemperatur für Prag aus den 30 Jahren 1887 bis 1916 und den Temperaturen mehrerer Orte der Erde jeweils für die sechs vorhergehenden Monate und zeichnet danach Isokorrelatenkarten der Erde.

Nach den Gesetzen der Statistik ist bei Verwendung eines 30jährigen Zeitraumes ein Mindestwert von $r = 0{,}53$ erforderlich [*9*]. Da nur wenige Koeffizienten diesen Grenzwert erreichen, ist eine Realität des größten Teiles der Pollakschen Beziehungen fraglich, wenn nicht der Nachweis einer eventuellen Nichtlinearität erbracht wird. Insbesondere mißt Pollak der Tatsache, daß sich ein mächtiges Gebiet hoher positiver Korrelation über Südasien fast unverändert von August bis November hält, prognostische Bedeutung bei. So erscheint ihm für eine Vorausberechnung der Januartemperaturen Mitteleuropas der Spätsommer und

namentlich der ganze Herbst in Vorder- und Hinterindien maßgebend und brauchbar zu sein, während sich für eine Temperaturprognose des Juli nur die Monate März, Mai und Juni eignen.

Um diese Aussage auf ihre Gültigkeit für die folgende Zeit nachzuprüfen, wurden die höchsten Pollakschen Korrelationskoeffizienten herausgesucht und für die Jahre 1911 bis 1940 nach den in den World Weather Records [7] veröffentlichten Temperaturmonatsmitteln neu berechnet. Die Temperaturwerte von Prag wurden einer Arbeit von Hlaváč entnommen [8]. Da die Angaben in den World Weather Records mit dem Jahre 1940 abschließen, konnten die letzten Jahre leider nicht berücksichtigt werden. Um aber trotzdem einen gleich langen Zeitraum zum Vergleich heranziehen zu können, wurden die Jahre 1911 bis 1940 verwendet, so daß die Zeit von 1911 bis 1916 in beiden Korrelationskoeffizienten vertreten ist.

Die nach der Formel $r = \frac{\Sigma x \cdot y}{\sqrt{\Sigma x^2 \cdot \Sigma y^2}}$ berechneten Korrelationskoeffizienten für den Zeitraum 1911 bis 1940 sind in den Tab. 1 und 2 zusammengestellt. Ein Vergleich mit den Pollakschen Werten zeigt sofort, daß *keine einzige Beziehung in ihrer alten Güte erhalten blieb.* Da die neuen Werte alle kleiner als der Grenzwert für Zufall sind, ist ein linearer Zusammenhang zwischen den Temperaturabweichungen im untersuchten Zeitraum statistisch nicht gesichert. Es ist daher zweifelhaft, ob man diese Korrelationen zu einer brauchbaren Langfristvorhersage verwenden kann.

Tabelle 1. *Korrelationen zwischen der Lufttemperatur des Januars zu Prag und derjenigen der Vormonate verschiedener Vergleichsorte.*

Ort	Vormonat	n. Pollak 1887 bis 1916	Cappel 1911 bis 1940	Änderung
Batavia	August	0,52	0,09	— 0,43
Jeypore	September	0,56	— 0,07	— 0,63
Jeypore	Oktober	0,43	— 0,17	— 0,60
Calcutta	November	0,46	0,05	— 0,41
Manila	November	0,44	— 0,05	— 0,49
Zikawei	Oktober	0,41	0,28	— 0,13
Capstadt	August	0,48	0,06	— 0,42
Rio de Janeiro	August	0,40	— 0,18	— 0,58
Trinidad	Oktober	0,43	0,02	— 0,41
Galveston	Dezember	— 0,43	— 0,08	+ 0,35
Nashville	Dezember	— 0,42	— 0,23	+ 0,19
Stykkisholm	September	0,41	— 0,26	— 0,67
Ponta Delgada	September	0,25 (gleich-	0,21 (Horta)	— 0,04
Ponta Delgada	Januar	0,45 zeitig)	0,11 (Horta)	— 0,34
Stykkisholm	Dezember	— 0,01	0,10	+ 0,11
Nashville	September	0,02	— 0,18	— 0,20
Rio de Janeiro	September	— 0,04	0,07	+ 0,11
Toronto	Dezember	— 0,04	— 0,44	— 0,40
Jakobshaven	August	0,07	— 0,08	— 0,15

Tabelle 2. *Korrelationen zwischen der Lufttemperatur des Juli zu Prag und derjenigen der Vormonate verschiedener Vergleichsorte.*

Ort	Vormonat	n. POLLAK 1887 bis 1916	CAPPEL 1911 bis 1940	Änderung
Jeypore	Mai	0,53	0,08	— 0,45
Rio de Janeiro	März	— 0,45	0,16	+ 0,61
Washington	Februar	— 0,42	— 0,14	+ 0,28
Toronto	Februar	— 0,40	— 0,09	+ 0,31
Toronto	Mai	0,57	0,15	— 0,42
Winnipeg	Mai	0,61	0,14	— 0,47
Jakobshaven	Juni	— 0,41	0,39	+ 0,80
Stykkisholm	März	0,52	0,44	— 0,08
Valentia (Irland) ..	Juni	0,51	0,26	— 0,25
Ponta Delgada	Juni	— 0,28	— 0,22 (Horta)	+ 0,06
Trinidad	April	0,00	0,12	+ 0,12
Galveston	April	— 0,01	0,05	+ 0,06
Valentia (Irland) ..	März	0,01	0,32	+ 0,31
Rio de Janeiro	Mai	0,07	— 0,21	— 0,28

Auffallend ist vor allem die Änderung des Korrelationskoeffizienten zwischen der Junitemperatur von Jakobshaven auf Grönland und der Julitemperatur von Prag von — 0,41 in der Periode 1887 bis 1916 auf + 0,39 im Zeitraum 1911 bis 1940. Welche Änderungen in der allgemeinen Zirkulation hierbei eine Rolle gespielt haben, soll in dieser Arbeit offen bleiben. Eine Neubearbeitung des gesamten Materials dürfte aber manche Schlußfolgerung zulassen. Eine nur geringe Änderung von 0,52 auf 0,44 zwischen diesen zwei Perioden weist dagegen der Korrelationskoeffizient zwischen Märztemperatur auf Stykkisholm und Julitemperatur in Prag auf. Vielleicht dürfte hier durch Verschiebung der Korrelationspole oder durch Betrachtung der Luftdruckverhältnisse über größeren Gebieten eine recht brauchbare Beziehung aufzufinden sein, denn ein Zusammenhang zwischen den Temperaturverhältnissen im Frühjahr im isländischen Raum und der Sommertemperatur in Mitteleuropa ist auch physikalisch durchaus erklärbar. Einen Hinweis auf die Richtigkeit dieser Vermutung gibt uns die Änderung des Korrelationskoeffizienten zwischen der Märztemperatur in Valentia und der Julitemperatur in Prag von 0,01 nach POLLAK [*6*] auf 0,32 im Zeitraum 1911 bis 1940.

Nicht unerwähnt soll ein anderes Ergebnis der Untersuchung bleiben. POLLAK gibt für die Beziehung zwischen den Temperaturabweichungen vom August in Jakobshaven und Januar in Prag einen Korrelationskoeffizienten von $r = 0{,}07$ an. Für den Zeitraum 1910 bis 1939 ergibt sich die nur geringe Änderung auf $r = -0{,}08$. Eine Zusammenstellung der einzelnen Wertepaare läßt jedoch zwei grundverschiedene Hälften während dieser neueren Periode erkennen. Während in den ersten 15 Jahren im Verhältnis 6 : 1 auf eine negative Abweichung im August

in Grönland milde Januarmonate in Prag, und im Verhältnis 6 : 2 auf positive Abweichung kalte Januarmonate folgten — von den 15 Jahren sich also nur drei anders verhielten als die übrigen zwölf —, ist in den Jahren von 1925 ab gerade ein entgegengesetztes Verhalten festzustellen, wie Tabelle 3 zeigt. Die Verhältniszahlen sind hierfür 1 : 5 bzw. 1 : 7 (ohne 1937). Nach 1928 wurden überhaupt nur noch gleichsinnige Temperaturabweichungen zwischen August in Jakobshaven und Januar in Prag beobachtet.

Tabelle 3. *Temperaturabweichung des Januar in Prag nach positiver oder negativer Abweichung des vorhergehenden August in Jakobshaven.* (Mittel 1910 bis 1939: Jakobshaven August = 7,0° C, Prag Januar = 0,1° C.)

	1910 bis 1924		1925 bis 1939	
Jakobshaven Δt August:	—	+	—	+
Prag Δt Januar:	— 3,5	— 0,7	— 0,4	2,0
	1,1	— 3,6	2,5	— 5,5
	1,6	— 1,1	— 3,0	1,2
	2,6	4,5	— 0,5	0,3
	5,0	— 2,5	— 2,1	1,6
	1,3	1,1	— 8,8	0,5
	2,7	— 2,2		3,2
		— 3,0		2,6
Fälle: +	6	2	1	7
relative Häufigkeit: % +	86	25	17	87

Ein Einwand, daß der behandelte Zeitraum zu kurz ist, um eventuell aus dem Ergebnis prognostische Schlußfolgerungen ziehen zu können, mag zunächst berechtigt erscheinen. Leider konnte die Untersuchung wegen fehlender Unterlagen nicht ausgedehnt werden. Wenn wir aber beachten, daß schon von verschiedenen Autoren der Nachweis einer Klimaänderung um das Jahrfünft 1925 bis 1930 erbracht wurde, so kann auch unser Ergebnis nicht einfach mit einer rein statistisch-theoretischen Überlegung übergangen werden, zumal auch andere Korrelationskoeffizienten sich nach 1925 wesentlich geändert haben. Es ist durchaus möglich, daß hier eine der nichtlinearen Beziehungen infolge Zirkulationsschwankungen vorliegt. Auch hier muß die Frage nach den physikalischen Zusammenhängen einer weiteren Untersuchung mit einem umfangreicheren Material vorbehalten bleiben.

Überraschend dürfte die verhältnismäßig große Änderung der Korrelationskoeffizienten zwischen Prag und den indischen Stationen sein, die seit der Untersuchung von Pollak noch für einigermaßen stabil gehalten wurden. Sie wird durch ein weiteres Beispiel bestätigt. Nach einer noch unveröffentlichten Berechnung von Dines beträgt der Korrelationskoeffizient zwischen den Luftdruckanomalien im November in Bombay und der nachfolgenden Wintertemperatur in Karlsruhe im Zeitraum 1874 bis 1923 $r = -0{,}40$. Für die Jahre 1911 bis 1940 wurde ein Wert

von nur noch $r = -0{,}20$ errechnet. Da die Beziehung zu Beginn der letzteren Zeitspanne noch verhältnismäßig gut und brauchbar war und sich erst seit etwa 1925 bzw. 1933 änderte, dürfte bei Verwendung der letzten 25 Jahre ein wesentlich anderer Wert herauskommen.

Auch die Zusammenhänge mit den Witterungsanomalien auf dem Atlantik erscheinen heute in einem vollkommen anderen Bild. Einer der am häufigsten und leider auch heute noch immer zitierten [*5*, *9*] Korrelationskoeffizienten ist der mit 0,85 von Gallé [*10*] errechnete, zwischen der Stärke des NE-Passats im Sommer (Juni bis November) und der Wintertemperatur von Europa. Allein die Tatsache der Verwendung von nur 16 Jahren (1899 bis 1914) berechtigt schon zu einem Zweifel an der Güte dieses Wertes. Die Stärke des Passats richtet sich nach der Luftdruckdifferenz Azorenhoch—äquatoriale Tiefdruckrinne. Dinies findet eine Beziehung zwischen dem NE-Passat und dem gleichzeitigen Luftdruck in Ponta Delgada für dieselben Jahre 1899 bis 1914 von $r = 0{,}49$, die noch groß genug ist, um die Bedeutung des Azorenhochs für den NE-Passat zu erkennen. Prüft man nun die Angaben von Gallé für den Zeitraum 1874 bis 1923 nach, so läßt der Korrelationskoeffizient zwischen dem Luftdruck von Juni bis November in Ponta Delgada (Azoren) und der Wintertemperatur in Karlsruhe mit $r = -0{,}01$ praktisch keine Beziehung mehr erkennen. Daraus ist ersichtlich, daß auch der Einfluß des sommerlichen Subtropenhochs über den Umweg des NE-Passats auf unsere Wintertemperatur nur gering sein kann.

Auffallend ist dagegen eine andere Korrelation zwischen den Luftdruckanomalien im Sommer in Ponta Delgada und der Wintertemperatur $1^1/_2$ Jahre später in Karlsruhe. Dinies findet für den Zeitraum 1874 bis 1923 einen Wert von $r = 0{,}43$, wobei während dieser 50 Jahre eine gute Stabilität vorhanden war. Für die Jahre 1874 bis 1898 beträgt nämlich $r = 0{,}404$ und für 1899 bis 1923 $r = 0{,}395$. Bei Verwendung der Jahre 1911 bis 1940 berechnet man dagegen einen Korrelationskoeffizienten von nur $r = 0{,}09$, wobei an Stelle von Ponta Delgada die Werte von Horta (Azoren) verwendet wurden.

Eine Zusammenstellung der einzelnen Wertepaare in Tabelle 4 zeigt, daß im Zeitraum 1911 bis 1940 einem über 0,5 mm zu hohen Sommer-

Tabelle 4. *Temperaturabweichung im Winter in Karlsruhe (1911 bis 1940) nach einer Luftdruckabweichung in Horta $1^1/_2$ Jahre vorher.*

Horta Δp mm	—2,0	—1,5	—1,0	—0,5	—0,0	+0,0	0,5	1,0	1,5	2,0
Δt Karlsruhe	1,8	—1,8	—0,7	1,1	1,7	—0,6	1,4	3,5	1,7	1,6
		0,5	1,2	—0,6	—4,5	1,6	1,7	0,7	—2,0*	
			—1,0	1,4	—0,2	—1,7	1,9	1,7		
					—1,0		1,7	—4,4*		
					—2,5		0,4			
							—4,2*			

* Ausnahmen: 1923/24 $\Delta t = -2{,}0$; 1939/40 $\Delta t = -4{,}4$; 1941/42 $\Delta t = -4{,}2$.

luftdruck über den Azoren im Verhältnis 10 : 3 milde Winter $1^1/_2$ Jahre später in Karlsruhe folgten, womit ein einseitiger Zusammenhang angedeutet ist.

Schließlich sei auch der von Meteorologen häufig zitierte Baursche Korrelationskoeffizient zwischen dem Temperaturfall vom Oktober zum November in NW-Sibirien und der nachfolgenden Wintertemperatur in Mitteleuropa [*9*] einer kurzen Kritik unterzogen (vgl. auch Rodewald [*11*]).

Der von Baur angegebene Wert von $r = 0{,}58$ für die Korrelation zwischen dem herbstlichen Temperaturabfall in Surgut und der Wintertemperatur in Mitteleuropa für den Zeitraum 1885 bis 1930 [*9*, S. 17] wird mit Hilfe der Karlsruher Beobachtungen für die Jahre 1885 bis 1915 mit 0,59 bestätigt. Bei Verwendung der Jahre 1885 bis 1940 sinkt jedoch dieser Wert auf 0,44, und der Zeitraum 1910 bis 1940 liefert nur noch einen Korrelationskoeffizienten von 0,26. Dieser starke Rückgang geht vor allem auf das Versagen der Winter 1939/40 und 1940/41 zurück.

Wenn man die Baursche Aussage: „In *allen* Jahren des Zeitraumes 1885 bis 1940, in denen die Temperatur in NW-Sibirien von Oktober zum November um mehr als 5° stärker absank als im langjährigen Durchschnitt, war der darauffolgende Winter in Mitteleuropa um mindestens 2° zu kalt" näher untersucht, so findet man, daß in dem genannten Zeitraum der Temperaturabfall von 5 und mehr Grad in Surgut nur viermal vorgekommen ist und daß dabei der darauffolgende Winter in Karlsruhe und in Prag nur in zwei Fällen eine negative Temperaturabweichung von mehr als 2° aufwies. Wenn von „allen Jahren" gesprochen wird, erwartet man doch einen größeren Teil der Gesamtzahl und nicht nur zwei bzw. vier Fälle. Die Häufigkeit kalter und milder Winter in Karlsruhe in Abhängigkeit von der Abweichung vom langjährigen Mittelwert des Temperaturabfalls Oktober/November in Surgut zeigt Tabelle 5, aus der man zwar eine gewisse Beziehung zwischen der herbstlichen Temperaturänderung in Surgut und der Wintertemperatur in Karlsruhe erkennen kann; doch reicht diese Häufigkeitsverteilung nicht für eine Vorhersage aus. Wesentlich besser ist die Korrelation in den Jahren, wo der Temperaturrückgang vom Oktober zum November erheblich größer oder erheblich kleiner ($\Delta t \lesssim 3°$) als im langjährigen Durchschnitt ist. Auf eine Tabelle kann hier verzichtet werden, da gegenüber der Rodewaldschen Arbeit [*11*, S. 230], die erst bei Beendigung unserer Untersuchung bekannt wurde, nur unwesentliche Abweichungen gefunden wurden. Die Häufigkeitsverteilung ergibt im 54jährigen Zeitraum bei schwachem Temperaturabfall in Surgut für milde Winter in Karlsruhe ein Verhältnis von 8 : 2 und bei starkem

Tabelle 5. *Häufigkeit positiver und negativer Temperaturabweichung im Winter in Karlsruhe in Abhängigkeit von der Abweichung des Temperaturabfalls vom Oktober zum November in Surgut.*

Surgut Δ (Δt X/XI)		—	+
Karlsruhe Δt_{wi}	+	21	8
	−	11	14

Abfall 4 : 9. Darüber hinaus läßt sich jedoch keine Angabe über die Größe der im gegebenen Fall zu erwartenden Abweichung verantworten. Die Aufstellung einer Korrelationstabelle für Prag ergab keine anderen Gesichtspunkte.

Vielleicht kommt man bei der Surgut-Korrelation einen Schritt weiter, wenn man nicht die monatlichen Temperaturverhältnisse in NW-Sibirien, sondern einzelne Pentadenwerte zur Untersuchung heranzieht. Einen Hinweis hierfür liefert uns eine Arbeit von Dinies [*12*], der u. a. auch Luftdruckänderungskarten von der 65. (17. bis 21. 11.) zur 68. (2. bis 6. 12.) Pentade zeichnete und jeweils vor kalten bzw. milden Wintern ähnliche Isallobarenbilder fand. So ging milden Wintern in Deutschland ein kräftiger Luftdruckfall in West- und Nordwesteuropa voraus, während gleichzeitig der Luftdruck über Nord- bzw. Nordosteuropa anstieg. Gerade umgekehrt lagen die Verhältnisse vor kalten Wintern. Damit scheint die Temperaturentwicklung in der letzten Novemberdekade in den genannten Gebieten von großer Bedeutung für die Gestaltung des nachfolgenden Winters zu sein.

Bekanntlich verwendet Baur [*9*] bei seinen Untersuchungen Temperaturen für Mitteleuropa, die er durch Mittelbildung dreier weit entfernter Orte (Wien, Berlin, De Bilt) gewinnt. Gewiß mögen damit wenigstens teilweise Zusammenhänge leichter aufzufinden sein, der wissenschaftliche und auch praktische Wert dieser Methode ist jedoch wesentlich geringer als statistische Untersuchungen mit Reihen von Einzelstationen. Hinzu kommt noch, daß De Bilt eine ozeanisch und Wien eine kontinental gelegene Station ist, so daß bei einer Mittelbildung Unterschiede besonders im winterlichen Witterungscharakter zweifellos verwischt werden. Es finden sich nämlich Jahre, in denen der Westen im Winter eine positive und der Osten eine negative Abweichung aufwies.

Neben den bisher angeführten Änderungen der Korrelationen nicht gleichzeitiger Elemente läßt sich der Nachweis erbringen, daß auch gleichzeitige Beziehungen zwischen den Witterungselementen verschiedener Orte Schwankungen unterworfen sind. So gibt Pollak [*6*] einen Korrelationskoeffizienten zwischen den Januartemperaturen in Prag und auf den Azoren von 0,45 an. Für die Jahre 1911 bis 1940 errechnet man nur noch 0,11. Wahrscheinlich sind auch bei den gleichzeitigen Beziehungen nur wenige stabil. Zu den letzteren gehören diejenigen zwischen Orten, die innerhalb der Hauptaktionszentren der allgemeinen Zirkulation liegen. Baur [*1*] findet z. B. für die Zeit 1865 bis 1936 zwischen dem Luftdruck im März in Ponta Delgada und dem gleichzeitigen Druck in Stykkisholm einen Wert von $r = -0{,}61$. Für die Jahre 1911 bis 1940 wurde für den gleichen Monat ein Wert von $r = -0{,}65$ zwischen Horta und Stykkisholm errechnet.

Betrachtet man abschließend das Ergebnis unserer Untersuchungen nochmals vom Standpunkt der *Langfristvorhersage*, so kommen wir zur Schlußfolgerung, daß alle bisher gefundenen Beziehungen zwischen verschiedenen Gebieten der Erde einer eingehenden Überprüfung an Hand neueren Beobachtungsmaterials bedürfen; denn wie einzelne Nach-

prüfungen ergeben haben, gelten die Beziehungen nur für den Zeitraum, in dem sie gefunden wurden. Da ein Teil der Korrelationen außerdem einseitig oder nicht linear ist, ist die Aufstellung von Korrelationstabellen zum Zwecke einer Langfristvorhersage nicht zu umgehen. Es kann hier nur nochmals auf die Forderung Baurs [*1*] bei Betrachtung der Walkerschen Weltwetteruntersuchungen nach Neubearbeitung mit größerem Beobachtungsmaterial hingewiesen werden.

Literaturverzeichnis.

1. Baur, Fr.: Beziehungen zwischen dem Witterungsgepräge verschiedener Teile der Erdoberfläche, in Hann-Süring, Lehrbuch der Meteorologie, 5. Aufl. 10. L. S. 945, 957 (1949).

2. Defant, A.: Die statistischen Untersuchungen über die Anomalien der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre. Meteorol. Z. **1926**, 121.

3. Baur, Fr.: Der gegenwärtige Stand der meteorologischen Korrelationsforschung. Meteorol. Z. **1930**, 42.

4. — Zur Frage der Beziehungen zwischen der Temperatur des Golfstromes und dem nachfolgenden Temperaturcharakter Mitteleuropas. Meteorol. Z. **1937**, 188.

5. Berg, H.: Allgemeine Meteorologie, Einführung in die Physik der Atmosphäre, S. 332. Bonn 1948.

6. Pollak, L. W.: Korrelationen der monatlichen Anomalien der Lufttemperatur ausgewählter Pole mit jenen anderer Orte. Gerlands Beitr. Geophys. **33**, 70 (1931).

7. World Weather Records: Smithsonian Misc. Coll. Vol. 79, Washington.

8. Hlaváč V.: Die 165jährige Prager Temperaturreihe 1775—1939. Meteorol. Z. **1940**, 267; G. Schindler, Meteorol. Rundsch. **2**, 93 (1949).

9. Baur, Fr.: Einführung in die Großwetterkunde, S. 67, 142. Wiesbaden 1948.

10. Brenneke, W.: Beziehungen zwischen der Stärke des NE-Passats im Sommer und der Wintertemperatur von Europa. Ann. mar. Meteorol. **1916**, 565.

11. Rodewald, M.: Zur Frage der Winter-Vorbereitung durch die Zirkulationsentwicklung vom Oktober bis Dezember. Ann. Meteorol. **3**, 225 (1950).

12. Dinies, E.: Beziehungen zwischen der Großwetterlage im November und Dezember und dem nachfolgenden Winter. Ber. Deutsch. Wetterd. US-Zone Nr. 12, 72 (1950).

551.515.7 : 551.509.33

Zum Problem der Entstehung und Voraussage von Hochdrucklagen.

Von

Franz Baur, Bad Homburg.

Mit 2 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Ausgehend von der Tatsache, daß die Vertikalkomponente des Rotors der Luftbewegung in Antizyklonen absolut stets kleiner als die Vertikalkomponente des Rotors der Erde ist, wird im I. Teil die These aufgestellt, daß die zur Entstehung von stationären Hochdruckgebieten führenden Vorgänge mit Energieverminderung verknüpft sind. Daraus wird die Arbeitshypothese abgeleitet, daß in der gemäßigten Zone großräumige Abkühlung die Entstehung von Hochdrucklagen begünstigt. Eine statistische Untersuchung ergibt, daß in Potsdam im Zeitraum 1881 bis 1940 in 67% der Fälle, in denen der (auf Meeresniveau reduzierte) Luftdruck mindestens fünf Tage lang gleich oder größer als 1020 mb war, innerhalb der sechs Vortage ein auf höchstens drei Tage verteilter Temperaturfall von mehr als 3,5° C vorausging, und daß diese relative Häufigkeit von 67% außerhalb des Zufallsspielraumes liegt.

Im II. Teil werden bestimmte Nebenbedingungen angegeben, bei deren Hinzutreten zu einem Temperaturrückgang von mehr als 7,3° C im Zeitraum 1881 bis 1940 in allen beobachteten Fällen in den acht bzw. zehn Folgetagen überwiegend trockenes Wetter eintrat. Die beobachtete 100%ige Häufigkeit des Eintrittes definierten Folgewetters nach bestimmten Vorbedingungen liegt weit außerhalb der Erklärbarkeit durch Zufall, vielmehr sind die Zusammenhänge physikalisch einleuchtend.

Im III. Teil wird ein möglicher Einwand entkräftet und gezeigt, daß sich die statistisch abgeleiteten Erfahrungssätze auch in jüngster Zeit nicht nur in Potsdam, sondern auch an anderen Orten Mitteleuropas bewährt und Voraussagen ermöglicht haben, die mit den heute gebräuchlichen Hilfsmitteln der Synoptik nicht gegeben werden konnten.

Summary. Starting from the fact that the vertical component of the vorticity of air motion in anticyclones is always absolutely smaller than the vertical component of the vorticity of the earth, in the first part the thesis is put up, that the processes, leading to the genesis of stationary high pressure areas, are connected with a reduction of energy. From this the working hypothesis is derived that in the temperate zone cooling on a large area is

favouring the genesis of high pressure situations. A statistical examination shows that in the period of 1881–1940 in Potsdam 67% of the cases in which the air pressure (reduced to sea level) was — at least for five days — equal or greater than 1020 mb, had, within the preceding six days a fall of temperature of more than 3,5° C, distributed on three days at the most. It shows furthermore that this relative frequency of 67% stands outside of a random coincidence.

In the second part certain secondary conditions are mentioned which, when combined with a fall of temperature of more than 7,3° C, in the period of 1881–1940 in all observed cases were followed by predominant dry weather in the eight or ten following days respectively. The observed 100% frequency of occurences of defined resulting weather after certain preliminary conditions is far beyond the explicableness by random; on the contrary, the connections are physically obvious.

In the third part a possible objection is refuted and it is shown that the statistical rules derived from experience have proved to be true also quite recently, not only at Potsdam but also in other places of Central Europe. They made forecasts possible that could not be given by means of the methods of synoptics used to-day.

Résumé. Partant du fait que la composante verticale du vecteur tourbillon (curl) du mouvement de l'air dans les anticyclones est toujours plus petit que la composante verticale du vecteur de la rotation terrestre, on émet l'hypothèse, dans la première partie, que les phénomènes engendrant les anticyclones stables sont liés à une diminution d'énergie. On en déduit l'hypothèse de travail selon laquelle un refroidissement à grande échelle favorise la formation d'anticyclones dans la zone tempérée. Une recherche statistique portant sur la période 1881 à 1940 à Potsdam montre que dans 67% des cas où la pression réduite au niveau de la mer a été égale ou supérieure à 1020 mb pendant au moins cinq jours, un refroidissement de plus de 3,5° a eu lieu dans les six jours précédents, réparti sur trois jours au plus, et que cette fréquence relative de 67% est supérieure à la marge probable.

Dans la seconde partie on expose certaines conditions accessoires qui, si elles sont combinées avec une baisse de température de plus de 7,3°, ont été suivies dans tous les cas, pendant la période de 1881—1940, d'un temps essentiellement sec dans les 8 à 10 jours suivants. La fréquence observée de 100% d'apparition d'un type de temps défini à la suite de conditions précises dépasse largement l'explication probabiliste; le lien physique est nettement apparent.

Dans la troisième partie on prévient une objection possible en montrant que les lois empiriques déduites par voie statistique ont été confirmées tout récemment, non pas à Potsdam seulement mais en d'autres lieux d'Europe centrale et ont permis des prévisions que ne fournissent pas aujourd'hui les méthodes usuelles de la synoptique.

I.

Unter *Hochdrucklagen* sind hier *Groß*wetterlagen verstanden, die mit einem *stationären Hochdruckgebiet* verknüpft sind, nicht dagegen kurzfristige Wetterlagen, die durch ein wanderndes antizyklonales System (Hoch oder Hochdruckkeil) entstehen. Die Bedeutung der Hochdruckgebiete für die Witterung längerer Zeiträume ist schon von W. van

Bebber [*1*] erkannt worden und ist bis in die jüngste Zeit hinein von vielen Autoren hervorgehoben und erörtert worden. Dennoch sind über die Entstehung von Hochdruckgebieten bei weitem nicht so viele Überlegungen und Untersuchungen angestellt worden wie über die Bildung von Zyklonen.

Die Luftmassen in einer *Zyklone* rotieren *absolut*, d. h. nicht in bezug auf die selbst rotierende Erde, sondern im Inertialsystem, *schneller* um eine vertikale Achse als die Erde selbst [*2*]. Damit hängt es zusammen, daß zur Entstehung von Zyklonen *Energiezufuhr* notwendig ist. Hierfür gibt es verschiedene Möglichkeiten, die allerdings nicht voneinander unabhängig, sondern in mannigfacher Weise miteinander verknüpft sind: Schwerpunktssenkung einer großräumigen Luftmassengruppe (Margules), Umsetzung der an der Polarfront angereicherten Zirkulationsenergie (V. Bjerknes), kinetische Energie der großen Gesamtdriften, wobei diese Energien dauernd aus der Zirkulationsenergie des Solenoidfeldes ergänzt werden (Mügge), Warmluft als Energiespender (H. v. Ficker [*3*]), Kondensationswärme, Einstrahlung. Im Gegensatz hierzu ist die Vertikalkomponente des Rotors der Luftbewegung in *Antizyklonen absolut* zwar stets von gleichem Richtungssinn wie die Vertikalkomponente des Rotors der Erde, aber *kleiner* als diese. Man wird daher die Entstehung von Hochdruckgebieten in Vorgängen zu suchen haben, die mit *Energieabgabe* oder Energieverminderung verbunden sind. Hierher gehört z. B. die Entstehung stationärer Hochdruckgebiete im Winter durch Ausstrahlung einer weit verbreiteten Schneedecke mit nachfolgendem Nachsinken der Luft in den höheren Schichten. Auch die von Mügge [*4*] vertretene Anschauung der Entstehung hochreichender Antizyklonen durch die langwellige Ausstrahlung der oberen Troposphäre und unteren Stratosphäre in den Weltraum bei fehlender konvektiver Wärmerückfuhr nach oben ist ein mit Energieabgabe verbundener Vorgang.

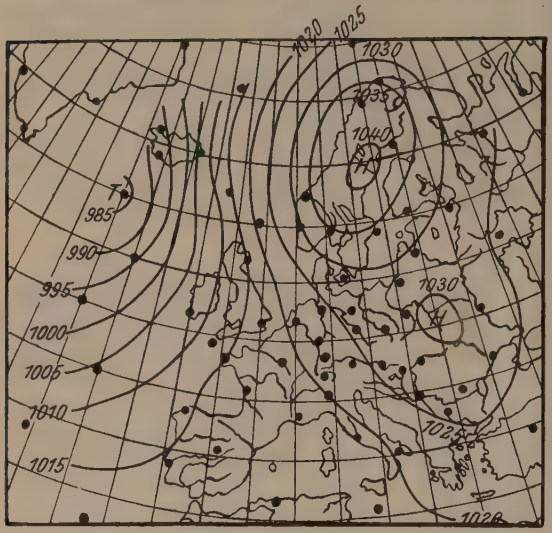


Abb. 1. Mittlere Luftdruckverteilung über Europa im Meeresspiegel in mb vom 26. Januar bis 1. Februar 1950.

Die Energieminderung kann aber auch eine *relative* sein und darin bestehen, daß einem Gebiet weniger Energie zugeführt wird, als es der

Jahreszeit und den geographischen Verhältnissen entspricht. In diesem Sinne kann die Zufuhr von kalter, trockener Luft ebenso als Energieminderung angesehen werden wie die Zufuhr warmer, feuchter Luft als Energiespender. Die eigentliche Energieabgabe ist im Falle der Zufuhr kalter Luft vorausgegangen, indem die Luft aus Gegenden kommt, die durch Ausstrahlung erkaltet sind.

Diese Gedankenkette führt dazu, die großräumige Abkühlung durch Ausstrahlung oder durch Zufuhr von Kaltluft als geeignete Grundlage für die Ausbildung einer stationären *Antizyklone* anzusehen. Hierin scheint ein Widerspruch zu liegen zu der von Bergeron und Swoboda [5] und anderen vertretenen Anschauung, nach welcher gerade die Bereitstellung einer genügend großen Menge von Kaltluft die Bedingung für die Entstehung großer *Zyklonen* ist.

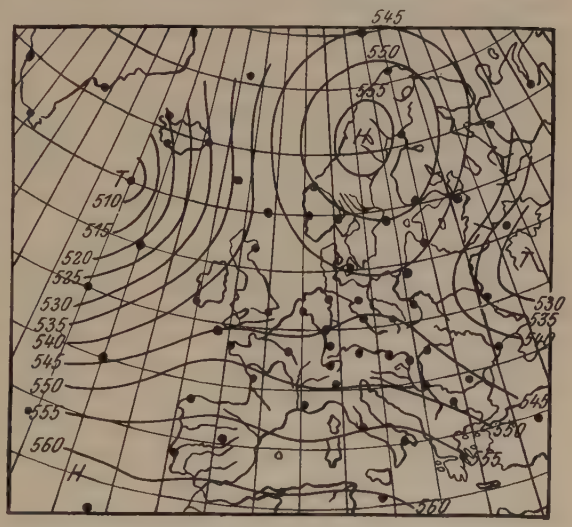


Abb. 2. Mittlere absolute Topographie der 500 mb-Fläche über Europa in geopotentiellen Dekametern vom 26. Januar bis 1. Februar 1950.

Es lassen sich jedoch tatsächlich Fälle angeben, in welchen nach Überflutung eines größeren Gebietes mit Kaltluft ein stationäres Hochdruckgebiet aufgebaut wurde. In allen diesen Fällen sind aber auch andere Erscheinungen mitverknüpft, so daß aus dem Einzelfall kein beweiskräftiger Schluß gezogen werden kann, inwieweit nun tatsächlich die Kaltluft die Bildung einer Antizyklone gefördert hat. Dabei muß betont werden, daß es sich hier ja nicht um die rein statische Erklärung eines mit einer Zyklogenese in Zusammenhang stehenden wandernden Hochdruckkeils handelt, sondern um die Entstehung eines länger anhaltenden Hochdruckgebietes, das bis in hohe Luftschichten hinaufreicht. Denn in der gemäßigten Zone, zum mindesten in Europa, stehen *stationäre* Hochdruckgebiete am Boden nicht nur im Sommer, sondern auch im Winter in Verbindung mit Hochdruckgebieten oder Hochdruckkeilen in der Höhe. Ein Beispiel dafür, daß dies in Europa selbst noch in subpolaren Breiten der Fall ist, geben die Abb. 1 und 2.

Anderseits gibt es auch Entwicklungen von Hochlagen, denen in genügend naher Zeit *keine* stärkere Abkühlung durch Ausstrahlung oder Advektion vorausgegangen ist. Die Frage, ob durch derartige

Abkühlungen tatsächlich die Bildung von stationären Antizyklonen gefördert wird, kann daher nur statistisch entschieden werden. Daraus ergibt sich die folgende

Allgemeine statistische Problemstellung: Treten vor stationären Hochdrucklagen am Boden häufiger *Temperaturrückgänge* auf, als es unter der Voraussetzung der Unabhängigkeit beider Erscheinungen rein zufällig (in vernünftigen Grenzen) möglich ist?

Wahl der Merkmale: Um diese Frage zu beantworten, müssen für die darin vorkommenden Begriffe geeignete, aus den Beobachtungen eindeutig ableitbare Merkmale gewählt werden. Für die stationäre Hochdrucklage wählen wir als Merkmal, daß der auf Meeresniveau reduzierte Luftdruck am Morgen an einer festen Station mindestens fünf Tage hintereinander größer als 765,0 mm Hg (d. h. gleich oder größer als 1020,0 mb) war. Zwar wird es sich nicht in allen Fällen, in denen diese Bedingung gegeben ist, um ein Hochdruckgebiet handeln, dessen Kern in der Nähe der gewählten Station liegt, aber immer handelt es sich in solchen Fällen darum, daß die gewählte Station im Bereich eines Hochdruckgebietes liegt, das trotz Verlagerungen seines Kernes in einem größeren Gebiete als stationär anzusehen ist. Als Merkmal der Abkühlung fordern wir, daß das *Tagesmittel* der Temperatur am gleichen Orte von einem zum nächsten Tag oder in zwei oder in (höchstens) drei Tagen um *mehr* als 3,5° gefallen ist. Diese Überschreitung muß gefordert werden, um annehmen zu können, daß es sich nicht um eine örtlich beschränkte, sondern um eine „großräumige" Abkühlung handelt. Diese Abkühlung muß nicht unmittelbar vorausgegangen sein, da ja die Bildung des stationären Hochdruckgebietes schon begonnen haben kann, als der Druck an dem gewählten Orte — vielleicht mehrere Tage lang — noch unter 1020, aber schon über 1016 oder 1018 mb lag. Anderseits wäre es bedenklich, die Luftdruckgrenze herabzusetzen. Wir fordern daher, daß der Temperaturrückgang um mehr als 3,5° innerhalb der vorangegangenen sechs Tage stattgefunden hat. Wesentlich ist dabei aber, daß es sich um einen *ununterbrochenen* Temperaturrückgang handelt, so daß also z. B. die Folge der interdiurnen Temperaturänderungen ΔT — 2,5°; 0,0°; — 1,6° *nicht* als ein Temperaturrückgang um mehr als 3,5° im Sinne unserer Forderung angesehen werden kann. Als Beobachtungsort wählen wir Potsdam [*6*], als Beobachtungszeitraum die 60 Jahre 1881 bis 1940.

Spezielle statistische Problemstellung: Wie oft sind in den Jahren 1881 bis 1940 ununterbrochene Folgen von fünf oder mehr Tagen mit einem auf Meeresspiegel reduzierten 7^h-Luftdruck von mehr als 765,0 mm Hg in Potsdam aufgetreten? In wievielen von diesen Fällen ist in den vorausgegangenen sechs 24stündigen Änderungen des Tagesmittels der Temperatur in Potsdam eine ununterbrochene, jedoch auf nicht mehr als drei Tage verteilte Temperaturabnahme von mehr als 3,5° C enthalten gewesen? Liegt die beobachtete relative Häufigkeit vorangegangener Temperaturrückgänge des definierten Ausmaßes noch innerhalb des Zufallsbereiches, wenn man diesen so festlegt, daß die Überschreitungswahrscheinlichkeit $\varepsilon = 0{,}0027$ ist?

gegangene 24stündige Änderungen des Tagesmittels der Temperatur.

		Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
1. Tag (0)..		12.	14.	13.	8.	5.	28.	7.	18.	24.	2.	2.	23.
Jahr.....		1882	1881	1881	1881	1881	1883	1885	1883	1881	1882	1881	1881
Dauer in Tagen .		36	11	6	9	9	5	5	9	15	9	6	8
Änderungen des Tagesmittels der Temperatur	— 1/0	— 3,4	+ 0,5	— 4,9	— 0,5	+ 1,9	+ 2,1	+ 0,2	+ 1,2	— 0,5	+ 0,6	— 0,6	— 0,3
	— 2/— 1	+ 0,4	— 1,5	+ 0,8	+ 1,1	— 7,9	+ 1,9	+ 0,5	— 1,4	— 0,6	+ 1,6	— 0,3	— 1,9
	— 3/— 2	+ 0,8	— 4,9	— 1,3	+ 1,8	+ 1,4	+ 2,6	— 1,4	— 4,9	— 7,2	— 0,7	— 1,1	— 0,4
	— 4/— 3	— 0,2	— 1,8	+ 0,8	+ 1,2	+ 2,2	— 1,4	+ 1,1	+ 0,6	— 0,4	— 1,1	— 2,1	— 0,9
	— 5/— 4	— 1,5	0,0	— 3,4	0,0	+ 4,0	+ 3,7	+ 1,5	+ 5,4	— 2,3	— 2,3	— 0,3	— 3,2
	— 6/— 5	— 2,0	— 0,4	+ 6,3	— 2,7	+ 3,5	— 3,9	— 0,8	+ 0,8	+ 3,5	+ 0,5	— 0,2	+ 5,8
		×	×	×		×	×		×	×	×		×
1. Tag (0)..		5.	20.	7.	3.	16.	14.	18.	4.	5.	27.	9.[1]	16.
Jahr.....		1883	1882	1882	1882	1882	1887	1887	1884	1882	1883	1881	1882
Dauer in Tagen .		5	6	13	7	5	6	5	6	6	8	8	6
Änderungen des Tagesmittels der Temperatur	— 1/0	— 2,8	— 0,3	— 4,1	— 0,3	— 0,3	— 1,6	+ 1,7	— 3,3	— 2,2	— 1,2	— 0,8	— 0,8
	— 2/— 1	— 5,0	— 2,6	+ 0,9	— 3,0	+ 1,0	+ 5,1	— 0,2	+ 3,6	— 2,2	+ 3,3	— 1,6	+ 2,2
	— 3/— 2	— 3,7	+ 0,5	+ 0,7	— 0,1	— 1,5	0,0	— 5,5	+ 1,7	+ 3,0	+ 2,4	— 3,8	+ 0,2
	— 4/— 3	+ 5,8	+ 2,8	+ 0,3	— 0,3	— 2,1	— 0,6	— 1,4	+ 1,1	+ 2,6	— 0,2	+ 4,5	+ 1,0
	— 5/ 4	+ 2,4	— 3,0	— 1,9	+ 0,7	— 0,4	— 4,9	+ 2,3	+ 0,8	+ 1,5	— 0,3	+ 9,2	— 0,2
	— 6/— 5	— 5,4	— 1,8	+ 2,7	+ 2,3	+ 2,6	— 1,0	+ 2,6	— 1,3	— 0,8	— 0,4	+ 1,2	+ 1,1
		×	×	×		×	×	×		×		×	
1. Tag (0)..		17.	5.	1.[1]	5.	27.	29.	22.	2.	11.	24.	30.	24.
Jahr.....		1883	1883	1883	1883	1882	1887	1892	1887	1883	1886	1881	1883
Dauer in Tagen .		9	6	5	5	8	6	9	6	9	11	8	11
Änderungen des Tagesmittels der Temperatur	— 1/0	— 0,2	— 0,9	— 2,1	— 2,8	+ 0,2	+ 3,5	— 1,2	— 1,3	+ 0,6	— 0,6	— 2,1	— 2,2
	— 2/— 1	+ 2,4	— 1,6	+ 0,8	— 1,6	+ 1,1	— 2,7	+ 2,3	— 7,5	+ 0,5	— 3,7	— 1,9	— 1,6
	— 3/— 2	+ 0,6	+ 2,3	+ 1,1	+ 2,8	— 1,1	+ 1,5	+ 0,2	+ 1,8	— 1,3	+ 0,6	— 1,3	+ 1,6
	— 4/— 3	+ 2,1	+ 1,3	— 3,4	— 0,2	— 0,9	— 5,7	— 0,2	+ 1,1	+ 0,1	+ 1,3	+ 4,3	+ 4,3
	— 5/— 4	+ 2,0	+ 0,1	+ 1,1	— 0,6	+ 3,9	+ 2,4	— 1,3	+ 1,9	+ 0,5	— 1,8	+ 0,3	+ 0,6
	— 6/— 5	— 1,8	— 3,8	— 0,1	+ 2,9	+ 2,9	+ 0,4	+ 2,1	— 0,5	— 0,2	+ 0,3	— 1,7	+ 0,6
			×		×		×		×		×	×	×

[1] Der erste Tag der Hochdruckperiode ist vom letzten Tag der vorausgehenden nur durch einen Tag getrennt.

Statistisches Ergebnis: In Tabelle 1 sind die ersten drei Fälle mit mindestens fünftägigen Folgen von Luftdruck $> 765{,}0$ mm Hg, die sich in Potsdam in jedem der zwölf Monate ereigneten, nebst den vorausgegangenen sechs Änderungen des Tagesmittels der Temperatur enthalten. In manchen Monaten ist der erste Fall nicht aus dem Jahre 1881, weil in diesem der betreffende Monat keine mindestens fünftägige Hochdruckperiode (mit $p > 765{,}0$) enthielt. Im Juli ist der erste Fall gar erst aus dem Jahre 1885, weil in den Jahren 1881 bis 1884 sich keine entsprechenden Hochdruckperioden im Juli ereigneten. Diejenigen Folgen von Änderungen des Tagesmittels der Temperatur, die eine Änderung um mehr als 3,5° C innerhalb von ein bis drei Tagen enthalten, sind durch ein liegendes Kreuz gekennzeichnet.

In der Festsetzung, daß der Temperaturfall mehr als 3,5° betragen soll und daß gerade die sechs vorausgegangenen 24stündigen Temperaturänderungen berücksichtigt werden, liegt natürlich eine gewisse Willkür. Sie gleicht sich aber dadurch aus, daß ja in jedem Falle immer die Bezugnahme auf die Grundwahrscheinlichkeit (Grundhäufigkeit) notwendig ist. So hätte die Zahl der Fälle mit vorausgegangener Temperaturerniedrigung erheblich vermehrt werden können, wenn auch schon Temperaturrückgänge um 3,4° und 3,5° mitgezählt worden wären oder wenn auch ein auf vier oder fünf Tage verteilter Temperaturrückgang wie z. B. der vor dem 2. November 1881 in Tabelle 1 oder die Temperaturänderung — 7/— 6 mitberücksichtigt worden wären. Aber der Vergrößerung der relativen Häufigkeit in bezug auf die nachfolgenden Hochdrucklagen würde auch eine Vergrößerung der Grundwahrscheinlichkeit entsprechen, so daß das Untersuchungsergebnis kaum geändert würde.

Das Gesamtergebnis der Untersuchung ist in Tabelle 2 zusammengestellt. Daraus ist zu ersehen, daß aus der Gesamtzahl von mindestens fünftägigen Hochdruckperioden diejenigen ausgeschieden wurden, deren erster Tag vom letzten Tag der vorausgehenden Hochdruckspanne nur durch ein bis drei Tage mit $p \leqq 765{,}0$ getrennt ist. Das geschah deshalb, weil man in diesen Fällen nicht mit Sicherheit von der Neuentstehung einer Hochdrucklage sprechen kann, um die ja das ganze Problem geht.

Den Hochdruckperioden, die um mehr als drei Tage von der zuletzt vorausgegangenen Hochdruckspanne entfernt waren, ging in 67% der Fälle ein auf höchstens drei Tage verteilter Temperaturfall von mehr als 3,5° innerhalb der sechs Vortage voraus. Es fragt sich nun, ob dieser Prozentsatz auch bei Unabhängigkeit der Entstehung der Hochdrucklage von dem vorausgegangenen Temperaturfall durch zufällige Schwankungen beider Erscheinungen entstanden sein kann. Dazu muß die relative Häufigkeit (Grundwahrscheinlichkeit) der Tage innerhalb des 60jährigen Zeitraumes 1881 bis 1940 bestimmt werden, an denen in den vorausgegangenen sechs 24stündigen Änderungen des Tagesmittels der Temperatur ein Temperaturfall von mehr als 3,5° innerhalb von ein bis drei Tagen vorkam. Diese Grundwahrscheinlichkeit beträgt 57,6%. Daraus ergibt sich für $N = 424$ als obere Grenze des zufälligen Schwankungsbereiches der relativen Häufigkeit, für deren Überschreitung nach oben

bei bestehender Unabhängigkeit nur eine Wahrscheinlichkeit von 0,0027 besteht,

$$p_1 = 57{,}6 + 0{,}927 \cdot 7{,}2 = 64{,}3\%.$$

Die beobachtete relative Häufigkeit von 67% liegt demnach *außerhalb des Zufallsspielraumes.*

Tabelle 2. *Häufigkeit von Hochdruckperioden von mindestens fünftägiger Dauer in Potsdam und Häufigkeit vorausgegangener Temperaturrückgänge von mehr als 3,5° C in ein bis drei Tagen innerhalb des Zeitraumes vom sechsten Vortag bis zum ersten Tag der Hochdruckperiode. Zeitraum: 1881 bis 1940.*

	Jan.	Feb.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Σ
A = Häufigkeit von Hochdruckperioden	61	54	41	23	35	21	12	23	52	38	56	57	473
B = dasselbe ohne diejenigen, die von der vorausgegangenen nur durch 1 bis 3 Zwischentage getrennt waren	55	40	36	23	35	20	12	23	46	36	49	49	424
C = Anzahl der Fälle B, in denen ein Temperaturfall der angegebenen Größe vorausgegangen war	39	27	22	15	23	16	9	16	30	21	33	33	284
$100 \cdot \frac{C}{B}$	71	68	61	65	66	80	75	70	65	58	67	67	*67,0*

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
B	144	94	55	131
C	99	60	41	84
$100 \cdot \frac{C}{B}$	69	64	75	64

Bemerkenswert ist, daß — wie Tabelle 2 ausweist — die relative Häufigkeit vorausgegangener Abkühlungen im Sommer am größten ist. Damit

tritt die Frage auf, ob der Unterschied zwischen der größten relativen Häufigkeit (75% im Sommer) und der kleinsten (62,7% im März und April) noch als zufällige Schwankung angesehen werden kann oder ob er eine physikalische, in den jahreszeitlichen Bedingungen liegende Ursache hat.

Wir haben nach Tabelle 2:

$$N_1 = 55 \qquad N_2 = 59$$
$$p_1 = 41/55 = 74{,}5\% \qquad p_2 = 37/59 = 62{,}7\%$$
$$p_1 - p_2 = 11{,}8\%.$$

Da die beiden Umfänge nur wenig voneinander verschieden sind, können wir der Rechnung einen mittleren Umfang $N_0 = 57$ zugrunde legen. Dann ergibt sich nach Tafel 5 in [7] als größte zulässige Zufallsdifferenz, wenn man von der kleineren relativen Häufigkeit ausgeht, 26%, wenn man von der größeren ausgeht, 28,5%. In jedem Fall liegt die Zufallsgrenze weit oberhalb des beobachteten Unterschiedes, so daß man mit der *Möglichkeit* rechnen muß, bei erheblicher Vergrößerung des Beobachtungsstoffes einen *anderen* Jahresgang der relativen Häufigkeit zu erhalten.

Dennoch ist die hohe relative Häufigkeit von 75% im Sommer nicht bedeutungslos. Selbst dann, wenn bei einer Materialvergrößerung das Maximum der relativen Häufigkeit nicht mehr im Sommer liegen sollte, zeigt doch die Tatsache, daß im Zeitraum 1881 bis 1940 im Sommer einer mindestens fünftägigen Hochdrucklage in 75% der Fälle eine Abkühlung um mehr als 3,5° C vorausging, daß ein hoher Anteil der hochdruckfördernden Abkühlungen nicht durch Ausstrahlung, sondern durch Zufuhr kalter Luft bedingt ist.

Deutung des statistischen Ergebnisses: Aus Tabelle 2 und den zugehörigen Erläuterungen ergibt sich, daß großräumige Abkühlungen der unteren Luftschichten für die Entstehung von Hochdrucklagen zwar nicht unbedingt notwendig sind, daß aber solche Temperaturrückgänge — und zwar nicht nur die durch Ausstrahlung hervorgerufenen, sondern insbesondere auch die durch Überflutung mit relativ kalter Luft entstandenen — die Bildung von stationären Hochdruckgebieten begünstigen.

2.

Nachdem festgestellt ist, daß die Entstehung länger anhaltender Hochdrucklagen in der gemäßigten Zone tatsächlich durch großräumige Abkühlungen der unteren Luftschichten begünstigt wird, tritt nunmehr die Frage auf, unter welchen Umständen solche Temperaturrückgänge zum Aufbau von stationären Hochdruckgebieten führen. Denn ohne Zweifel — das ist bereits im I. Teil erwähnt worden — spielt das Vorhandensein einer ausgedehnten Kaltluftmasse auch bei der Entstehung von großen Zyklonen eine Rolle. Wann also führt *Abkühlung* zur Ausbildung einer *Antizyklone*, wann zur Formung einer *Zyklone?*

Die Richtschnur zur Beantwortung dieser Frage und aller damit zusammenhängenden physikalischen Überlegungen muß immer die

grundlegende Erkenntnis bilden, daß die Entstehung von Antizyklonen mit *Energieverlust* verknüpft ist, während zur Zyklogenese notwendig *Energiezufuhr* erforderlich ist. Die Neigung zur Ausbildung einer Antizyklone wird daher hauptsächlich dort bestehen, wo keine Versteilung der Luftdruckgradienten, keine Berührung mit warmen Luftströmen stattfindet, also im Inneren großer Abkühlungsgebiete, während in den Randgebieten die Zyklogenese vor sich geht.

Damit die großräumige Abkühlung zur Entstehung einer stationären Antizyklone führt, müssen verschiedene *Nebenbedingungen* erfüllt sein, deren rechtzeitige Erkennung zu einer Voraussage verwendet werden kann. Vor allem muß natürlich der Druck nicht nur am Boden, sondern auch in der Höhe steigen, um so mehr, je mehr er vorher gefallen war. Dieser Druckanstieg kann in zwei Haupttypen erfolgen, entweder bereits während der Abkühlung, wobei der Druckanstieg am Boden größer ist, als er rein thermisch aus der Abkühlung der unteren Luftschichten folgt, oder er kann im Anschluß an die Abkühlung bei am Boden wieder zunehmender Temperatur vor sich gehen. Dazwischen gibt es natürlich eine Reihe von Übergangs- und Verbundtypen. Weiterhin wird die Bildung einer stationären Antizyklone durch eine echte Massenkonvergenz gefördert; kennzeichnend dafür ist, daß dann der Druckanstieg bei bewölktem Himmel (nicht Bodennebel) und Niederschlägen erfolgt (vgl. [8]).

Andererseits können mit dem Temperaturfall Vorgänge verknüpft sein, aus denen geschlossen werden kann, daß sich *kein* stationäres Hochdruckgebiet bildet. Wenn der Temperaturfall in den letzten Tagen mit starkem Druckfall verbunden ist, dann deutet dies auf die Ausbildung eines Höhentiefs oder eines Höhentrogs hin. Auch ein mehrmaliger Vorzeichenwechsel der 24stündigen Druckänderung während eines auf mehrere Tage erstreckten Temperaturfalls oder das Auftreten starker Druckänderungen wechselnden Vorzeichens in der weiteren Umgebung — bis zu etwa 1200 km Entfernung — besonders im Westen und Nordwesten, stellt die Entstehung einer stationären Antizyklone in Frage, weil eine rasche Folge starker Luftdruckänderungen verschiedenen Vorzeichens auf ein starkes Luftdruckgefälle in der Höhe schließen läßt, das zum mindesten in den zentralen Teilen einer hochreichenden Antizyklone nicht möglich ist.

Wie groß die Änderungen im einzelnen sein müssen, um für oder gegen die Entstehung einer Antizyklone zu sprechen, kann nur aus der *Erfahrung* ermittelt werden. Daher wurde, von den genannten Überlegungen ausgehend, eine *statistische Durchmusterung* aller stärkeren Temperaturrückgänge in Potsdam in den Jahren 1881 bis 1940 und der dabei auftretenden Luftdruckänderungen, Niederschlagsverhältnisse und Bewölkung vorgenommen, wobei allerdings die Bewölkung erst ab 1893 Berücksichtigung finden konnte, da die Jahrbücher des Astrophysikalischen Observatoriums (1881 bis 1892) nicht mehr in meinem Besitz sind, sondern nur noch eine vor Jahren daraus entnommene Luftdruckreihe. Diese umfangreiche Untersuchung ist zur Zeit noch nicht abgeschlossen. Aber zwei Teilergebnisse daraus seien jetzt schon mitgeteilt, da es sich hiebei um zwei

Regeln handelt, die außerhalb des Zufallsspieles liegen und in dem 60jährigen Zeitraum *keine Ausnahme* aufweisen, so daß sie beim Eintritt der in ihnen angegebenen Bedingungen prognostisch verwertet werden können.

Zur Abkürzung der Ausdrucksweise und Platzersparnis werden folgen Bezeichnungen verwendet:

Der letzte Tag des Temperaturfalls, an dem also das Tagesmittel der Temperatur ein Minimum aufweist, wird mit t_0 bezeichnet, die folgenden Tage mit $t_1, t_2, t_3 \ldots$, die vorausgegangenen Tage mit $t_{-1}, t_{-2}, t_{-3} \ldots$. Die zugehörigen Tagesmittel der Temperatur in ° C sind: $\ldots T_{-2}, T_{-1}, T_0, T_1, T_2 \ldots$, die um 7^h gemessenen Luftdrucke in mm Hg $\ldots p_{-2}, p_{-1}, p_0, p_1, p_2 \ldots$, die an denselben Tagen um 7^h gemessenen 24stündigen Niederschlagsmengen in mm $\ldots R_{-2}, R_{-1}, R_0, R_1, R_2 \ldots$. Es ist ferner $\Delta T_0 = T_0 - T_{-1}$, $\Delta T_n = T_n - T_{n-1}$. Entsprechend ist $\Delta p_2 = p_2 - p_1$, $\Delta p_n = p_n - p_{n-1}$. Die Bewölkung ist bei den Vorbedingungen als Mittel aus vier aufeinanderfolgenden Terminen gebildet, weil zur Druckänderung Δp_0, welche die Änderung des Luftdrucks von t_{-1}, 7^h bis t_0, 7^h angibt, die Bewölkung $(t_{-1}, 7^h + t_{-1}, 14^h + t_{-1}, 21^h + t_0, 7^h)/4$ gehört. Zur Änderung p_0 gehört auch die Niederschlagsmenge R_0, weil diese ja genau die von t_{-1}, 7^h bis t_0, 7^h gefallene Menge angibt. Mit $\Sigma \Delta T_-$ ist die Summe aller hintereinanderliegenden negativen ΔT bezeichnet. Ebenso bedeutet $\Sigma \Delta p_+$ die Summe aller hintereinanderliegenden positiven Δp_n, bei Regel 1 bis einschließlich Δp_2. Als Stichtag wird jeweils der letzte Tag bezeichnet, von dem noch Beobachtungen in die Vorbedingungen eingehen, also der Tag, an welchem in der Praxis eine Vorhersage gegeben werden könnte. Bei Regel 1 ist dies t_2, bei Regel 2 ist t_1 der Stichtag.

Um Fälle herauszustellen, in denen bestimmt eine großräumige Abkühlung stattgefunden hat, wobei die Säkularstation Potsdam dem zentralen Teile nahegelegen sein dürfte, wurden zunächst alle diejenigen Temperaturrückgänge herausgesucht, bei denen der Gesamttemperaturfall mehr als 7,3° C betrug. Als weitere Bedingungen wurden genommen, daß der Druckanstieg bereits am Ende des Temperaturfalls einsetzte, daß nach dem Temperaturfall Druck und Temperatur zwei Tage lang gleichzeitig stiegen, und daß während des stärksten Druckanstieges Niederschlag fiel oder mindestens der Himmel bedeckt war. Es zeigte sich, daß schon allein mit diesen nur auf die Beobachtungen in Potsdam gestützten Bedingungen hochprozentige Häufigkeiten bezüglich antizyklonaler Merkmale des Folgewetters erzielt werden konnten. Um eine ausnahmslos zutreffende Regel zu erhalten, brauchte nur noch im Sinne der oben angeführten Überlegungen die Bedingung hinzugefügt werden, daß zum Stichtag in Lerwick kein extrem starker Luftdruckfall nach vorausgegangenem starkem Druckanstieg eintrat.

In Tabelle 3 sind alle diejenigen Fälle zusammengestellt, in denen im Zeitraum 1881 bis 1940 für Potsdam diese Bedingungen und noch einige Nebenbedingungen, zahlenmäßig präzisiert, zutrafen. Wie aus der Tabelle zu entnehmen ist, sind in allen diesen Fällen unter den acht unmittelbar

folgenden Tagen mindestens fünf ohne meßbaren Niederschlag gewesen, wobei Niederschlag 0,0 als nicht meßbarer Niederschlag gezählt wurde. Da die relative Häufigkeit von achttägigen Zeitspannen, in denen mindestens fünf niederschlagsfreie Tage vorkommen, in Potsdam etwas kleiner als $^1/_2$ ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß zwischen Vorbedingungen und Folge in den Fällen der Tabelle 3 kein Zusammenhang besteht, kleiner als 10^{-6}.

In 18 (82%) von den 22 Fällen war an mindestens fünf der acht Folgetage der auf Meeresspiegel reduzierte Luftdruck höher als 762,0 mm. In allen von 19 Fällen — für die übrigen fehlten leider die diesbezüglichen Unterlagen — war das Tagesmittel der Bewölkung an mindestens vier Tagen, in 17 (89,5%) Fällen an mindestens fünf Tagen kleiner als 7,0. In dem einen der beiden Fälle, in denen nur an vier Tagen das Bewölkungsmittel unter 7,0 lag, war das Gesamtbewölkungsmittel 7,0, die stärkere Bewölkung wurde überwiegend durch Bodennebel in den Morgen- und Abendstunden hervorgerufen (Januar 1918), im anderen Falle betrug das Gesamtbewölkungsmittel 6,7.

Die Haupt- und Nebenbedingungen und das darauf eingetretene Folgewetter lassen sich in folgende — streng genommen zunächst nur für das mittlere Norddeutschland, vertreten durch Potsdam, geltende — Regel zusammenfassen:

Regel 1: Wenn bei einem Rückgang des Tagesmittels der Temperatur um mehr als 7,3° C — wobei es gleichgültig ist, auf wieviel Tage dieser Temperaturfall verteilt ist — der Druck noch vor dem Morgen des kältesten Tages zu steigen beginnt und unmittelbar nach ihm zwei Tage lang von 7^h bis 7^h steigt, während gleichzeitig auch das Tagesmittel der Temperatur zunimmt, dann kann mit hoher Wahrscheinlichkeit damit gerechnet werden, daß *in den folgenden acht Tagen überwiegend trockenes und freundliches Wetter* herrscht und allerhöchstens an drei Morgen eine 24stündige Niederschlagsmenge von 0,1 mm oder mehr beobachtet wird, falls noch folgende Nebenbedingungen erfüllt sind:

1. $\Delta p_0 > +1{,}0$, falls nicht schon $\Delta p_{-1} > +1{,}0$,
2. $\Delta T_1 \geqq 0{,}0$, $\Delta T_2 > +0{,}2$,
3. $\Sigma \Delta p_+ \geqq 9{,}0$.
4. In den 24 Stunden des größten Luftdruckanstiegs $R > 0{,}3$.

Falls diese Bedingung nicht verwirklicht ist, muß wenigstens während des maximalen Luftdruckanstiegs die über vier Termine gemittelte Bewölkung gleich oder größer als 9,0 sein oder es muß unmittelbar vor- oder nachher bei dauernder Zunahme des Luftdrucks an mindestens drei hintereinander liegenden Terminen die Bewölkung 9 oder 10 sein, wobei eine Bodennebelschicht nicht als Bewölkung in diesem Sinne gilt.

5. $\Delta p_{-1} > -10{,}0$,
6. falls der Temperaturfall sich über mehr als zwei Tage erstreckt, darf von den drei Änderungen Δp_{-2}, Δp_{-3} und Δp_{-4} nicht mehr als eine um mehr als 10,0 mm negativ sein,
7. $(\Delta p_2 - \Delta p_1)$ Lerwick $> -15{,}0$.

Tabelle 3. *Vorausgegangene Luftdruck- und Temperaturänderungen, Nieder-Fällen, in denen die Vorbedingungen der* ***Regel 1***

		—6/—5	—5/—4	—4/—3	—3/—2	—2/—1	—1/0	0/+1	+1/+2
1.	ΔT						— 7,9	+ 1,9	+ 2,8
	Δp					— 2,8	+ 5,1	+ 8,9	+ 4,0
	R						11,5	.	0,0
	Δp Lerwick							(— 2,0)	(— 2,0)
2.	ΔT		— 0,5	— 0,7	— 1,9	— 3,6	— 3,2	+ 4,6	+ 0,3
	Δp		+ 6,1	+ 5,8	+ 4,2	+ 2,6	+ 6,1	+ 8,7	+ 3,4
	R						.	0,5	.
	Δp Lerwick							+ 6,1	— 2,8
3.	ΔT					— 0,7	— 9,1	+ 0,9	+ 2,0
	$p\Delta$					— 8,3	+ 4,1	+ 13,3	+ 4,3
	R						1,3	7,5	.
	Δp Lerwick							+ 7,9	+ 1,2
4.	ΔT				— 0,3	— 8,2	— 1,9	+ 0,3	+ 0,4
	Δp				— 2,4	— 3,3	+ 3,2	+ 8,6	+ 3,7
	R						3,6	0,4	0,7
	Δp Lerwick							+ 3,8	+ 1,1
5.	ΔT		— 5,4	— 0,6	— 1,3	— 2,3	— 2,1	+ 0,9	+ 2,7
	Δp		+ 8,3	+ 7,8	+ 2,3	+ 10,8	+ 0,6	+ 2,2	+ 4,4
	R					1,7	.	0,1	.
	Bew. (4)								9,5
	Δp Lerwick							+ 1,3	— 4,3
6.	ΔT			— 2,2	— 1,3	— 3,8	— 0,5	0,0	+ 0,9
	Δp			+ 0,5	+ 2,7	— 4,7	+ 2,9	+ 4,9	+ 3,4
	R						5,6	0,0	0,2
	Bew. (4)	[1]					9,5	7,8	
	Δp Lerwick							0,0	— 1,3
7.	ΔT				— 2,2	— 4,6	— 3,6	+ 3,8	+ 2,3
	Δp				— 2,1	— 3,0	+11,6	+ 4,6	+ 0,7
	R						0,6	.	.
	Δp Lerwick							+ 3,3	— 1,8
8.	ΔT				— 3,7	— 3,6	— 0,1	+ 0,6	+ 7,0
	Δp				— 4,6	— 1,4	+11,3	+ 8,2	+ 0,7
	R						3,8	0,7	0,1
	Δp Lerwick							+ 5,1	— 2,0
9.	ΔT					— 4,3	— 7,0	+ 4,5	+ 1,2
	Δp					— 8,8	+19,1	+ 10,7	+ 3,2
	R						6,1	2,0	.
	Δp Lerwick							— 6,5	+ 1,0
10.	ΔT			— 4,7	— 2,1	— 1,5	— 0,8	+ 0,7	+ 2,5
	Δp			+ 0,8	— 1,0	— 0,4	+ 4,4	+ 4,3	+ 0,3
	R						1,9	0,6	0,2
	Δp Lerwick							— 4,5	— 1,8

[1]

	14., 14h	14., 21h	15., 7h	15., 14h
Luftdruck (84,9 m)	748,8	49,3	52,1	53,9
Bewölkung	9●	9	10	9

schlagsmenge und Bewölkung und nachfolgendes Wetter in Potsdam in allen gegeben waren. Zeitraum 1881 bis 1940.

Stichtag t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	
6. V. 1881	○ .	○ .	○ 0,0	○ 2,0	○ .	○ .	○ .	× .	*p* *R*
9. II. 1886	○ .	○ .	× .	○ .	○ .	○ .	○ .	× .	*p* *R*
16. V. 1890	.	.	.	12,7	4,7	○ .	○ .	○ .	*p* *R*
20. III. 1893	○ 1,4 9,0	○ 0,1 9,0	○ . 2,3	○ . 1,0	○ . 0,3	○ . 3,3	○ . 1,7	○ . 2,0	*p* *R* Bew. (3)
19. II. 1894	○ . 1,0	○ . 0,7	○ . 0,0	○ . 3,3	. 9,3	1,7 6,0	5,4 6,7	0,8 10,0	*p* *R* Bew. (3)
17. VIII. 1895	○ . 1,0	○ . 3,0	× . 3,0	○ . 3,3	○ . 2,0	× . 2,3	. 4,7	× 18,4 5,7	*p* *R* Bew. (3)
12. VIII. 1898	○ . 2,0	○ . 0,3	○ . 1,7	. 1,7	. 2,7	× 6,1 4,0	○ . 3,3	○ . 2,3	*p* *R* Bew. (3)
20. IV. 1900	○ . 0,0	○ . 1,7	× . 0,7	× . 0,0	. 5,3 .	0,7 4,7	. 9,7	× 1,4 3,7	*p* *R* Bew. (3)
12. I. 1908	○ . 10,0	○ . 0,0	○ . 4,0	○ . 6,0	× 3,9 10,0	○ 0,5 6,7	○ 0,0 9,3	○ . 10,0	*p* *R* Bew. (3)
15. IX. 1908	. 5,0	○ 0,4 7,0	○ . 2,7	○ . 2,7	○ . 0,0	○ . 3,0	○ . 0,7	○ . 0,0	*p* *R* Bew. (3)

Fortsetzung der Tabelle 3.

		−6/−5	−5/−4	−4/−3	−3/−2	−2/−1	−1/0	0/+1	+1/+2
11.	ΔT			− 4,7	− 1,6	− 3,4	− 2,0	+ 0,8	+ 2,4
	Δp			+ 1,4	+ 2,6	− 8,8	+ 7,4	+ 3,5	+ 9,6
	R						5,8	16,3	2,0
	Δp Lerwick							+ 8,4	− 2,3
12.	ΔT					− 9,6	− 4,0	+ 0,2	+ 1,6
	Δp					− 7,9	+ 7,4	+ 4,2	+ 3,0
	R						0,5	.	.
	Δp Lerwick							+ 3,3	+ 2,3
13.	ΔT					− 2,8	− 5,6	+ 0,9	+ 1,6
	Δp					− 4,2	+ 8,9	+ 4,1	+ 0,3
	R						5,2	.	.
	Δp Lerwick							+ 1,7	− 5,1
14.	ΔT	− 3,1	− 0,1	− 0,1	− 0,9	− 2,1	− 1,6	+ 4,8	+ 2,9
	Δp	− 6,7	+ 11,6	− 14,8	− 8,1	− 2,1	+ 9,3	+ 2,4	+ 2,7
	R						0,9	.	.
	Δp Lerwick							+ 4,7	− 4,4
15.	ΔT				− 6,1	− 1,0	− 2,5	+ 1,2	+ 2,2
	Δp				− 8,2	+ 0,8	+ 8,0	+ 4,9	+ 5,3
	R						0,2	0,6	0,6
	Bew. (4)						9,5		
	Δp Lerwick							+ 0,9	− 3,2
16.	ΔT			− 0,1	− 4,7	− 2,1	− 1,0	+ 0,4	+ 1,2
	Δp			− 3,5	− 2,7	− 4,1	+10,5	+ 9,9	+ 1,2
	R						0,0	6,1	.
	Bew. (4)	[1]					6,5	9,0	
	Δp Lerwick							− 0,5	+10,3
17.	ΔT						− 7,6	0,0	+ 2,6
	Δp					− 5,4	+ 2,2	+ 5,0	+ 5,5
	R						0,1	1,1	0,9
	Δp Lerwick							− 8,1	−10,8
18.	ΔT						− 7,6	+ 2,8	+ 1,5
	Δp					− 8,1	+ 5,3	+ 5,3	+ 0,1
	R						2,0	.	.
	Δp Lerwick							+ 5,2	+ 2,5
19.	ΔT	− 1,8	− 0,6	− 1,0	− 0,9	− 2,1	− 1,6	+ 0,2	+ 0,4
	Δp	− 2,0	+ 6,6	+ 1,0	+ 1,8	+ 7,0	+ 1,6	+ 0,8	+ 1,4
	R					0,4	.	0,1	0,0
	Δp Lerwick							− 0,1	− 1,6

[1]

	10., 7h	10., 14h	10., 21h	11., 7h
Luftdruck (84,9 m)	750,2	51,3	55,5	60,1
Bewölkung	10	10	10●	6

Stichtag t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	
3. V. 1909	○	○	○	○	○			×	p
	.	.	.	.	.	0,4	0,9	.	R
	1,3	0,0	0,7	2,7	8,3	7,0	7,3	3,7	Bew. (3)
6. IV. 1911	○	×	○		×			○	p
	0,0	0,1	.	.	.	.	10,7	0,6	R
	5,3	9,3	2,3	7,0	4,3	9,7	9,0	6,7	Bew. (3)
5. V. 1915			○	○	○	○			p
	.	0,1	.	.	.	.	.	.	R
	8,7	6,3	1,7	1,7	1,0	1,0	4,3	7,3	Bew. (3)
4. III. 1918	○	○	○	○	○	○	○	○	p
	0,0	.	.	1,7	.	.	0,0	0,1	R
	4,0	0,3	6,3	10,0	4,0	9,3	6,7	7,3	Bew. (3)
7. II. 1922	○	○	○	○	○	○			p
	0,3	.	.	.	.	.	.	.	R
	2,3	0,7	3,0	4,0	0,7	1,0	1,3	7,0	Bew. (3)
12. III. 1922	○	○	×	○	○	○			p
	0,5	.	.	.	0,5	.	.	.	R
	2,0	3,3	5,3	9,3	0,3	2,0	10,0	9,7	Bew. (3)
30. III. 1925	○	×	×		×	×			p
	0,1	.	.	0,5	4,5	.	.	.	R
	9,0	5,0	6,3	9,0	3,0	0,0	0,0	0,3	Bew. (3)
3. V. 1929								○	p
	.	.	.	.	.	.	0,9	.	R
	5,3	4,3	3,3	5,7	3,7	9,3	6,0	3,0	Bew. (3)
11. XII. 1932	○	○	○	○	○	○	○	○	p
	.	.	.	.	0,2	0,3	.	.	R
	3,3	5,7	6,0	4,7	5,7	3,7	0,3	0,3	Bew. (3)

Fortsetzung der Tabelle 3.

		−6/−5	−5/−4	−4/−3	−3/−2	−2/−1	−1/0	0/+1	+1/+2
20.	ΔT						− 9,2	+ 3,0	+ 4,2
	Δp					− 1,2	+ 5,2	+ 3,2	+ 2,0
	R						.	4,3	.
	Bew. (4)	1					6,2	10,0	6,0
	Δp Lerwick							− 1,8	+ 2,4
21.	ΔT					− 5,7	− 4,1	+ 2,8	+ 3,9
	Δp					− 6,9	+ 5,9	+ 4,6	+ 2,9
	R						12,1	0,1	0,1
	Δp Lerwick							− 1,6	+ 0,7
22.	ΔT					− 7,3	− 1,3	0,0	+ 1,7
	Δp	2				− 2,1	+ 7,2	+ 9,4	+ 5,0
	R						68,5	0,3	.
	Δp Lerwick							+ 11,3	+11,2

1	7., 21h	8., 7h	8., 14h	8., 21h
Luftdruck (84,9 m)	756,6	61,6	63,9	65,3
Bewölkung	9	10●	10●	10●

Zeichen-

ΔT = Änderung des Tagesmittels der Tempe-
Δp = 24stündige Änderung des Luftdruckes von
R = um 7^h gemessene 24stündige Nieder-

Bew. (4) = mittlere Bewölkung in Zehnteln des

Bew. (3) = mittlere Bewölkung aus drei Terminen

○ = Luftdruck auf Meeresspiegel reduziert
= Luftdruck auf Meeresspiegel reduziert

Wenn man die Forderung stellt, daß während des ganzen Temperaturfalls alle 24stündigen Luftdruckänderungen positiv sind und nur in dem Fall, daß der Temperaturfall sich auf sechs oder mehr Tage erstreckt, zuläßt, daß während des ersten Tages der Temperaturabnahme die Luftdruckänderung negativ ist, genügt es, wenn auf den Temperaturfall *ein Tag* folgt, an welchem gleichzeitig Temperatur und Luftdruck steigen, falls einige Nebenbedingungen erfüllt sind, die gewährleisten, daß der Luftdruckanstieg am letzten Tag genügend großräumig ist und am Nordwestrand des Hochdruckgebietes kein lebhafter Wechsel starker positiver und negativer Druckänderungsgebiete stattfindet.

Die zehn Fälle des Zeitraumes 1881 bis 1940, in denen diese Bedingungen und die in Regel 2 genannten Nebenbedingungen zutrafen, sind in Tabelle 4 zusammengestellt. Daraus ist zu ersehen, daß in allen diesen Fällen die Niederschlagssumme der zehn Folgetage weniger als 3 mm betrug und daß in 90% der Fälle allerhöchstens zwei Tage mit Niederschlag auftraten. Da die relative Häufigkeit zehntägiger Zeitspannen mit weniger

Stichtag t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	
10. V. 1934	○	○						×	p
	·	·	·	·	0,0	·	·	0,0	R
	4,3	0,3	6,3	4,3	5,0	0,0	6,7	5,3	Bew. (3)
2. VII. 1937	○	○	×	·	·	·	·	·	p
	·	·	·	0,4	0,0	3,0	3,1	·	R
	1,3	4,0	5,3	5,3	8,3	8,7	4,3	9,0	Bew. (3)
28. VI. 1940	○	○	○	×	·	·	·	·	p
	·	·	·	·	0,0	0,4	7,0	0,0	R
	7,3	2,0	2,7	6,7	9,3	9,7	4,3	5,3	Bew. (3)

[2]	25., 14^h	25., 21^h	26., 7^h
Luftdruck (84,9 m)	740,3	741,0	746,8
Bewölkung	9●	10●	9

erklärung:

ratur von einem Tag zum nächsten.
7^h bis 7^h in mm Hg.
schlagsmenge in mm.
Himmelsgewölbes aus vier Terminen $\frac{7^h + 14^h + 21^h + 7^h}{4}$.
$\frac{7^h + 14^h + 21^h}{3}$.
$> 765{,}0$ mm Hg.
zwischen 762,0 und 765,0 mm Hg.

als 3 mm Niederschlag weit unter 0,25 liegt, so ist die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Zusammentreffens der Vorbedingungen mit den nachfolgenden trockenen Zehntageabschnitten kleiner als 10^{-6}.

Diese Bedingungen und Nebenbedingungen und das zugehörige Folgewetter lassen sich in nachstehender Regel ausdrücken:

Regel 2: Wenn das Tagesmittel der Temperatur um mehr als 7,3° C fällt, während des ganzen Temperaturfalls die 24stündige Änderung des Luftdrucks positiv und dem Betrage nach höchstens einmal kleiner als $^1/_2 |\Delta T_n|$ ist, und wenn unmittelbar nach dem Temperaturfall wenigstens einen Tag lang Temperatur und Luftdruck gleichzeitig steigen, so ist *in den folgenden zehn Tagen mit hoher Wahrscheinlichkeit überwiegend trockenes Wetter mit einer Gesamtniederschlagsmenge von weniger als 3 mm* zu erwarten, falls folgende Nebenbedingungen erfüllt sind:

1. $\Delta p_1 > +1{,}0$, $\Delta p_0 > +1{,}0$,
2. Δp_1 Frankfurt a. M. und Δp_1 De Bilt nicht beide negativ,
3. Δp_1 Lerwick $> -3{,}2$,

4. $|(\Delta p_1$ Potsdam $- \Delta p_1$ Lerwick$) - (\Delta p_0$ Potsdam $- \Delta p_0$ Lerwick$)| < 15{,}0$,

5. falls Temperaturfall auf *einen* Tag konzentriert, dann $\Delta p_{-1} + \Delta p_{-2} > -10{,}0$,

6. falls Temperaturfall auf *zwei* Tage verteilt, dann $\Delta p_{-1} > +1{,}0$ und $\Delta p_{-2} + \Delta p_{-3} > -10{,}0$,

7. wenn Temperaturfall auf $n > 2$ Tage verteilt, $\Delta p_{-1} > +1{,}0$. Wenn $n > 5$, kann Δp_n negativ sein.

Tabelle 4. *24stündige Niederschlagsmengen der zehn Folgetage in Potsdam in den Fällen, in denen die Vorbedingungen der* ***Regel 2*** *gegeben waren. Zeitraum 1881 bis 1940.*

Stichtag t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}
5. V. 1881	0,0	.	.	0,0	2,0	.	.	.	.	.
8. II. 1886	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23. V. 1888	.	.	.	.	0,0	.	.	.	0,4	.
4. I. 1901	0,0	.	0,0	0,0	.	.	.	.	0,0	.
19. IV. 1904	.	.	.	.	1,0	.	.	.	.	1,8
15. X. 1910	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19. XI. 1915	0,1	.	.	.	0,2	.	1,0	1,1	0,1	.
5. X. 1920	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2. V. 1929	.	.	.	.	.	.	.	0,9	.	.
9. V. 1934	.	.	.	.	.	0,0	.	.	0,0	.

3.

Vielleicht wird mancher Synoptiker einwenden: Wozu diese umfangreiche und zeitraubende Statistik? Dem Synoptiker ist ja längst die v. Fickersche Regel [*9*] bekannt, daß „schönes Wetter kommt oder bestehendes Schönwetter noch von Bestand ist, wenn das Barometer steigt, und wenn es gleichzeitig wärmer wird". Ebenso hat R. Mügge [*10*] bereits vor 20 Jahren dargelegt, daß nach Druckanstieg bei bedecktem Himmel („subtropischer Wettertyp") eine längere Schönwetterperiode folgt. Gegen diesen Einwand ist zunächst zu sagen, daß beide Regeln

bei weitem nicht so häufig zutreffen, wie das gemeinhin angenommen wird. Es lassen sich eine ganze Reihe von Fällen angeben, in denen diese Regeln nicht zutrafen.

Zwei Beispiele, in denen beide gleichzeitig versagten, seien hier angeführt:

1. Beispiel: Potsdam, 20., 21., 22. und 23. Oktober 1898.

	20. Oktober			21. Oktober			22. Oktober			23. Oktober		
	7^h	14^h	21^h	7^h	14^h	21^h	7^h	14^h	21^h	7^h	14^h	21^h
Luftdruck*	751,0	51,3	52,6	54,0	54,0	54,1	56,2	57,7	58,9	59,3	59,3	59,5
Bewölkung	10●	10●	10●	9	10	10	10	10	9	9	8	2
Tagesmittel d. Temp. . .	— 0,4°			0,8°			7,0°			14,1°		

Die zweistündlichen Beobachtungen am 22. Oktober ergaben:

	1^h	3^h	5^h	7^h	9^h	11^h	13^h	15^h	17^h	19^h
Luftdruck*	754,4	54,7	55,4	56,2	57,1	57,7	57,8	58,0	58,4	58,8
Bewölkung.....	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Folgewetter: Regen vom 24. abends bis 25., 3^h 50, am 25. von 11^h 45 bis 14^h 55, am 26. 0^h 40 bis 6^h und nachmittags; 24stündige Niederschlagsmenge am 25. morgens 1,4, am 26. 5,6, am 27. 0,2 mm. Obwohl vom 20. Oktober morgens bis 23. Oktober morgens der Luftdruck bei dauernd fast ganz bedecktem Himmel, zeitweise auch von Niederschlägen begleitet, anstieg und gleichzeitig auch die Temperatur sehr beträchtlich zunahm, folgten somit doch drei Tage mit Niederschlägen.

2. Beispiel: Potsdam, 15., 16. und 17. August 1912.

	15. August			16. August			17. August		
	7^h	14^h	21^h	7^h	14^h	21^h	7^h	14^h	21^h
Luftdruck*	751,3	51,4	52,2	51,9	52,1	53,7	55,2	55,8	55,8
Bewölkung	10	9	10	10●	10●	10	10	10	10
Tagesmittel der Temperatur	13,0			14,0			14,5		

Folgewetter: 24stündige Niederschlagsmenge am 18. August morgens 0,6, am 19. nichts, am 20. 0,2, am 21. 1,1, am 22. 1,6, am 23. 1,2, am 24. 5,0, am 25. 8,3 mm, also eine Woche lang fast täglich Regen, obwohl Luftdruck und Temperatur zwei Tage lang gleichzeitig bei bedecktem Himmel und Niederschlägen stiegen.

Nach dem Ergebnis von Abschnitt I und II liegt die Annahme nahe, daß der Grund für das gleichzeitige Versagen der Fickerschen und Müggeschen Regeln in diesen beiden Fällen darin lag, daß in beiden kein Temperaturfall von einigermaßen beträchtlichem Ausmaß unmittelbar oder im Abstand von nur wenigen Tagen vorausging. Die sechs vorausgegangenen 24stündigen Temperaturänderungen waren folgende:

* Luftdruck in Barometerhöhe 84,9 m ü. M.

14./15.	15./16.	16./17.	17./18.	18./19.	19./20. Oktober 1898
— 0,7	+ 1,2	— 0,7	+ 0,5	— 1,3	— 1,5
9./10.	10./11.	11./12.	12./13.	13./14.	14./15. August 1912
+ 0,4	— 0,2	— 0,9	— 0,3	0,0	0,0

Es bleibt nun noch zu untersuchen, ob sich die Regeln auch in jüngster Vergangenheit bewährten und ob in diesen Fällen die Synoptik tatsächlich in der Lage war, eine entsprechende weitausschauende Voraussage zu geben. Fälle, in denen in den beiden letzten Jahren die Vorbedingungen der Regel 2 gegeben gewesen wären, konnten aus dem mir zur Verfügung stehenden Beobachtungsstoff nicht entnommen werden. Dagegen sind die Vorbedingungen der Regel 1 mehrfach eingetreten. Tabelle 5 enthält alle Fälle, in denen die Vorbedingungen der Regel 1 erfüllt waren, soweit mir die dazu nötigen Unterlagen zur Verfügung standen. Wegen der notwendigen Kenntnis der Tagesmittel der Temperatur reichten hierzu die Wetterkarten nicht aus, so daß die Untersuchung nur auf die Stationen und Jahre ausgedehnt werden konnte, von denen die Tagesmittel der Temperatur sowie auch die entsprechenden Wettervorhersagen zu meiner Kenntnis kamen [*11*].

Wie aus Tabelle 5 zu ersehen, hat sich die Regel 1 in allen Fällen der jüngsten Vergangenheit aufs neue erfüllt. Eine an dem jeweiligen Stichtag für den jeweiligen Ort und seine Umgebung gegebene Vorhersage, daß das Wetter in den folgenden sieben bis acht Tagen überwiegend trocken und freundlich sein werde, wäre in allen Fällen vollkommen eingetroffen.

Die Schönwetterlage nach dem *24. September 1948* (vgl. Tabelle 5, Potsdam) wurde auf der Wetterkarte des Zentralamtes für Wetterdienst in Bad Kissingen vom 24. September 1948 mit der Aussage „Der eigentliche Festlandsraum hat bei ungehinderter Sonneneinstrahlung weitere Erwärmung und damit einen typischen Altweibersommer zu erwarten" richtig vorhergesagt. Allerdings enthält diese Aussage keine nähere Angabe, *wie lange* das schöne Wetter dauern wird; und sie ist wohl auch, soweit sie nicht nur das Wetter des folgenden Tages meint, nicht allein „synoptisch" begründet, sondern zum mindesten teilweise durch die von der statistischen Großwetterforschung nachgewiesene Tatsache eines überzufälligen Häufigkeitsgipfels kontinentaler Hochlagen und trockener, heiterer Tage in Mitteleuropa in der Zeit vom 25. bis 30. September beeinflußt.

Die ungefähr siebentägige Trockenperiode nach dem *2. März 1950* in Süddeutschland wurde synoptisch nicht vorausgesehen. Zwar wurde am 2. März auf der Kissinger Wetterkarte für den 3. März richtig „überwiegend heiteres und trockenes" Wetter vorhergesagt, aber unter „weitere Aussichten" hieß es: „Etwa ab Sonntag Übergang zu unbeständiger Witterung". Sonntag war der 5. März, entsprechend dem Tag t_5 in Tabelle 5.

Für Trier ergab sich nach Regel 1 bereits am 1. März 1950 die Möglichkeit, vorauszusagen, daß in den nächsten sieben bis acht Tagen überwiegend trockenes und freundliches Wetter herrschen werde. Der Beginn dieser

... Vorbedingungen und 1 abgeleitet in 1 Fällen der jüngsten Zeit, in denen die Vorbedingungen der **Regel 1** *gegeben waren.*

	−5/−4	−4/−3	−3/−2	−2/−1	−1/0	0/+1	+1/+2	Stichtag t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	
Potsdam																	
ΔT			+ 0,9	− 2,9	− 3,2	− 1,9	+ 0,8	+ 2,9		○	·	·	×	×	○	○	○	p
Δp			+ 6,0	− 8,8	− 2,6	+ 7,1	+ 1,8	+ 4,2		·	·	·	0,0	0,0	·	0,0	·	R
R				0,3	0,0	0,0	5,3	0,0	24. IX. 1948	3,3	6,3	7,7	0,3	5,7	7,7	9,0	9,0	Bew. (3)
Bew. (4)						6,0	7,5											
Δp Lerwick							+ 1,4	− 7,8										
Frankfurt a. M.																	
ΔT			− 0,6	− 6,9	− 1,4	− 0,8	+ 0,8	+ 0,5		○	○	○	○	○	○	○		p
Δp			− 4,6	− 9,3	+ 16,9	+ 5,4	+ 2,1	+ 4,7	2. III.	·	·	·	·	·	0,0	0,0	1,1	R
R			1,3	7,8	4,1	0,0	·	·	1950	4,7	9,0	10,0	7,3	3,3	3,3	8,3	10,0	Bew. (3)[2]
Δp Lerwick							+ 1,0	− 12,0										
Trier																	
ΔT				− 1,8	− 7,0	− 0,5	+ 0,1	+ 0,9		○	○	○	○	○	○	○	○	p
$p\Delta$				− 6,4	− 4,1	+ 15,1	+ 4,1	+ 1,9	1. III.	·	·	0,0	0,0	·	0,0	0,0	·	R
R				5,7	14,2	1,1	·	·	1950	0,0	5,0	6,0	10,0	0,0	3,3	3,3	4,0	Bew. (3)[2]
Δp Lerwick							− 0,3	+ 1,0										
Nürnberg																	
ΔT				− 5,4	− 4,4	− 4,5	+ 0,7	+ 4,4		○	○	○	○	○	○	○		p
Δp			− 5,0	− 17,0	+ 21,4	+ 11,5	+ 3,4	+ 4,7	2. III.	·	·	0,0	·	·	·	·	·	R
R					14,7	0,0	·	0,0	1950	0,7	10,0	9,0	3,7	3,3	4,7	8,3	10,0	Bew. (3)[2]
Δp Lerwick							+ 1,0	− 12,0										
Prag																		
ΔT				− 3,7	− 5,2	− 1,1	+ 1,6	+ 4,6				○	○	○	○	○	○	p
Δp				− 18,0	+ 4,0	+ 9,0	+ 12,0	+ 1,5		0,0	3,7	0,0	·	·	·	·	0,2	R
R				3,3	1,1	0,5	0,0	0,0	11. IV. 1949	10,0	9,3	4,7	4,0	0,3	1,0	4 0	4,3	Bew. (3)
Bew. (3)				9,7	7,0	8,0	9,0	9,7		·	2	0,2	·	·	·	·	0,2	R Cobg.
Δp Lerwick							− 6,0	− 18,5		·	6	·	·	·	·	·	0,0	R Nürnb.

Zeichenerklärung s. Tabelle 3.

[1] Druckänderungen bei Potsdam, Frankfurt a. M. und Trier in mm Hg, sonst in mb. Druckänderungen für Lerwick und Prag nach Wetterkarten interpoliert.

[2] Bewölkung durch häufigen Morgennebel erhöht.

Schönwetterperiode wurde durch die Voraussage des zuständigen Wetteramtes Neustadt a. H. vom 1. März „anfangs einzelne Wolkenfelder mit belanglosem Schneefall, alsdann heiter bis wolkenlos" angekündigt. Da diese Voraussage aber nur bis zum Abend des 3. März galt, kommt darin der Fortbestand des trockenen Wetters bis zum 9. März nicht zum Ausdruck.

Ob die Schönwetterperiode vom 13. bis 19. April 1949 in Prag am 11. *April* vorausgesagt wurde, entzieht sich meiner Kenntnis. Die gleiche Schönwetterzeitspanne trat aber auch in Deutschland auf. Die Niederschlagsverhältnisse in Coburg und Nürnberg waren, wie aus Tabelle 5 zu ersehen ist, in den acht auf den Stichtag 11. April folgenden Tagen ganz ähnlich denen in Prag. Die vom Zentralamt in Bad Kissingen auf der Wetterkarte vom 11. April veröffentlichte, bis zum 15. April (Tag t_6 in Tabelle 5) gültige Vorhersage lautete: „In Norddeutschland unbeständig, zeitweise Regen, auch in Süddeutschland vorherrschend bewölktes Wetter mit einzelnen Regenfällen". Das am 13. von Westen her einsetzende heitere, trockene Hochdruckwetter, das bis zum Nachmittag des 19. anhielt, wurde demnach nicht vorhergesehen.

Es steht somit fest, daß mit Hilfe einer statistisch ermittelten Regel, die *nur Bodenbeobachtungen* einfacher Art, noch dazu größtenteils von einer einzigen Station, enthält, hinsichtlich der Niederschlagsverhältnisse richtigere, zum mindesten weiter ausschauende Vorhersagen gegeben werden konnten als mit Hilfe der synoptischen Methode, für die Zirkumpolarkarten der Bodendruckverteilung nebst Fronten und der absoluten Topographie der 500 mb-Fläche, sowie Karten der relativen Topographie 500/1000 mb und der absoluten Topographie der 850 mb-, 700 mb-, 225 mb- und 96 mb-Fläche sowie der zugehörigen 24stündigen Änderungen herangezogen werden. Diese Tatsache gibt zu denken.

Es wäre natürlich verfehlt, hieraus etwa den Schluß zu ziehen, daß man auf die Darstellungen des Zustandes der höheren Luftschichten ganz verzichten könnte. Das wäre schon deshalb abwegig, weil ja den physikalischen Überlegungen, die zu den statistischen Regeln führten, teilweise Erkenntnisse zugrunde liegen, die erst durch die dreidimensionale Betrachtung der Atmosphäre gewonnen wurden. Aber zwei andere Schlußfolgerungen scheinen mir zwingend zu sein, nämlich die, daß die statistische Methode der bisherigen synoptischen Methode, die hinsichtlich der empirischen Grundlage in der Hauptsache auf der Untersuchung von Einzelfällen, auf Gedächtnisregeln und Fingerspitzengefühl beruht, überlegen ist, und die weitere, daß die derzeitige Ausgabe von Millionen für die Gewinnung und Verbreitung eines schier ins unermeßliche anwachsenden Beobachtungsmaterials nur dann zu dem gewünschten Erfolg führen kann, wenn gleichzeitig auch ausreichende Mittel für systematische statistische Forschungen ausgeworfen werden, um aus dem Riesenmaterial die zugrunde liegenden Gesetze herausschälen zu können. Doch muß in diesem Zusammenhang neuerdings betont werden, daß nur *die* Statistik eine den komplexen atmosphärischen Vorgängen adäquate Forschungsmethode ist, welche die drei Bedingungen erfüllt:

1. die Auswahl der Kollektivgegenstände und Merkmale muß nach physikalischen Überlegungen erfolgen und die statistische Untersuchung muß durch eine physikalische Problemstellung geleitet sein. Theorie

und Statistik müssen sich in der Wetterkunde ebenso durchdringen und gegenseitig befruchten wie Theorie und Experiment in der Physik;

2. bei jeder statistischen Feststellung muß untersucht werden, ob das Ergebnis nicht auch im Rahmen zufälliger Schwankungen zustande kommen kann;

3. durch die statistische Bearbeitung müssen Zusammenhänge ermittelt werden, die bisher mit einer ganz nahe an 1 gelegenen relativen Häufigkeit verwirklicht wurden.

Es muß allerdings zugegeben werden, daß statistische Untersuchungen, die diesen Bedingungen genügen, außerordentlich zeitraubend sind und von einem einzelnen, dem keine Hilfskräfte und Rechenmaschinen zur Verfügung stehen, nur bruchstückweise und mit großer Mühe bewältigt werden können. Dafür winkt ihnen aber der Erfolg, für die Verbesserung der Wetter- und Witterungsvorhersage wesentliches beizutragen. *Labor omnia vincit improbus* (Vergil, Georgica).

Literaturverzeichnis.

1. van Bebber, W.: Die Beurteilung des Wetters auf mehrere Tage voraus. Stuttgart 1896.
2. Raethjen, P.: Arch. Met. Geoph. Biokl. Serie A, **1**, 295—346 (1949).
3. von Ficker, H.: Sitz-Ber. Ak. Wien. **129**, 763 (1920).
4. Mügge, R.: Beitrag zur Kenntnis der warmen Hochdruckgebiete. Diss. Göttingen 1921. — Mügge, R. und G. Stüve: Beitr. Phys. d. fr. Atm. **22**, 206—248 (1935).
5. Bergeron, T. und G. Swoboda: Spez. Arb. Geophysikal. Inst. Leipzig, **3**, Heft 2 (1924).
6. Beobachtungsgrundlagen: a) Jahrbücher d. Astrophysikal. Observatoriums Potsdam 1881—1892, b) Jahrbücher d. Meteorol. Observat. Potsdam 1893—1937, c) Schriftliche Mitteilungen (von Druck, Temperatur und Niederschlägen) d. Meteorolog. Observ. in Potsdam, d) Da für die Jahre 1881—1892 die Tagesmittel der Temperatur für Berlin Innenstadt (in G. Hellmann, G. von Elsner und G. Schwalbe „Klima von Berlin") bereits berechnet vorlagen, wurden für diese zwölf Jahre die Berliner Werte benützt. Dies bedeutet keine die Sache betreffende Inhomogenität, weil es sich in der vorliegenden Arbeit ja nur um die Änderungen der Tagesmittel der Temperatur von Tag zu Tag, nicht um die Temperaturen selbst handelt.
7. Koller, S.: Graphische Tafeln zur Beurteilung statistischer Zahlen. 2. Aufl. Dresden und Leipzig 1943.
8. Baur, F. und H. Philipps: Beitr. Phys. d. fr. Atm. **24**, 1—17 (1935).
9. von Ficker, H.: Sitz.-Ber. Akad. Wien. **131** (1922) und Sitz.-Ber. Preuß. Akad. Wiss. Festvortrag vom 24. Januar 1935.
10. Mügge, R.: Meteor. Z. **48**, 1—11 (1931).
11. Zugrunde gelegt sind bei Potsdam und Frankfurt a. M. die Beobachtungen vom 1. Juli 1948 bis 31. Dezember 1950, bei Trier und Nürnberg 1. Januar bis 31. Dezember 1950, bei Prag April 1949. Für Mitteilung von Beobachtungen bin ich dem Meteorologischen Hauptobservatorium in Potsdam, dem Zentralamt für Wetterdienst in Bad Kissingen, der Staatlichen Meteorologischen Anstalt in Prag und den Wetterämtern in Frankfurt a. M. und Neustadt a. Haardt sowie Herrn G. Schindler in Bad Homburg, der mir die Prager Beobachtungen vermittelte, dankbar.

551.46:551.556.4

(Institut für Meteorologie und Geophysik der Universität Innsbruck.)

Windstau und Auftrieb an ozeanischen Küsten.

Von

A. Defant.

Mit 8 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Einleitend wird eine kurze Übersicht der Wirkung der Winde beim Zustandekommen der Erscheinungen des Anstaues und Abtriebes von Wassermassen an ozeanischen Küsten gegeben. Insbesondere werden die Ergebnisse von H. U. Sverdrup und R. H. Fleming besprochen, die sie aus aufeinanderfolgenden ozeanographischen Aufnahmen eines Profils senkrecht zur kalifornischen Küste gewonnen haben. Sie ergeben ein passendes Schema für die Entwicklung eines kalten Küstenwassers aus einem Vorstadium mit warmem Wasser.

Das große Beobachtungsmaterial des Marine Life Research Programs, das seit 1949 von der Scripps Institution of Oceanography (University of California) in La Jolla in monatlichen ozeanographischen Aufnahmen des Meeresgebietes vor der nordamerikanischen Westküste gewonnen wird, wird die Kenntnisse des für diese Gebiete wichtigen Kaltwasserauftriebsphänomens wesentlich zu vertiefen gestatten. Eine vorläufige Bearbeitung zweier konträrer Situationen von Anstau und Abtrieb von Wassermassen zeigte, daß die Windstörung aus zwei Teilen besteht: 1. Aus einer Störung der Grundverteilung, der der reguläre kalifornische Strom entspringt und die in einer allgemeinen Schwächung bzw. Verstärkung desselben besteht, und 2. aus einer Wellenstörung senkrecht zur Küste, die vom Anstau bzw. Abtrieb der Wassermassen an der Küste ihren Ausgang nimmt.

Ein einfaches theoretisches Modell ließ diese Zusammenhänge zahlenmäßig erfassen, und ein Vergleich eines theoretischen Falles mit Zahlenwerten, die ungefähr den Verhältnissen vor der kalifornischen Küste entsprechen, mit den Beobachtungstatsachen ergab gute Übereinstimmung.

Summary. First a brief survey is given of the wind effect on the phenomena of rising and ebbing water masses on the oceanic coasts. Particularly, the results obtained by H. U. Sverdrup and R. H. Fleming from successive oceanographic measurements of a profile perpendicular to the Californian coast are discussed. From them a convenient scheme is concluded for the development of cold coastal water out of a preceding stage of warm water.

The great number of observation data of the Marine Life Research Programe obtained ever since 1949 by the Scripps Institution of Oceanography

(University of California) at La Jolla from monthly oceanographic measurements of the area off the North American western coast allows a deeper insight into the important phenomenon of upwelling cold water in that area. A preliminary study of two opposite situations of rising and ebbing water masses showed the wind disturbance to consist of two parts: 1. of a disturbance of the ground distribution which generates the regular Californian current, the disturbance consisting in generally weakening or intensifying this current; 2. of a wave disturbance perpendicular to the coast proceeding from the rising, respectively ebbing coastal water masses.

These relations could be established quantitatively by a simple theoretical model. A theoretical case with numerical values approximately corresponding to the conditions off the Californian coast showed good agreement with the observed facts.

Résumé. On donne tout d'abord un court aperçu de l'effet du vent sur le flux et le reflux de masses d'eau sur les côtes océaniques. On expose en particulier les résultats obtenus par H. U. Sverdrup et R. H. Fleming à l'aide de profils successifs, normaux à la côte californienne. Ils fournissent un schéma convenable pour la formation d'une masse d'eau côtière froide dérivant d'un stade préalable d'eaux chaudes.

Le grand matériel d'observations du Marine Life Research programme obtenu depuis 1949 par la Scripps Institution of Oceanography (University of California, La Jolla) sous forme de relevés océanographiques mensuels du domaine marin de la côte occidentale de l'Amérique du Nord permettra d'approfondir nos connaissances sur le phénomène de l'advection ascensionnelle d'eau froide important en ces régions. Une étude préliminaire de deux situations opposées de flux et de reflux de masses d'eau a montré que l'effet du vent se décompose en: 1° une perturbation de la répartition de base donnant naissance au courant régulier de Californie et qui consiste à affaiblir ou à renforcer respectivement ce courant; 2° une perturbation de nature ondulatoire, perpendiculaire à la côte, provenant du flux ou du reflux des masses d'eau le long de la côte.

Un modèle théorique simple a permis de soumettre ces relations au calcul, et la comparaison d'un cas théorique dont les dimensions correspondaient approximativement aux conditions régnant devant la côte californienne a fourni un bon accord avec les faits observés.

1. Eine der Hauptstörungen, die den Meeresströmungen durch die ozeanischen Küsten aufgezwungen wird, ist die Erhöhung bzw. Erniedrigung des Meeresniveaus vor denselben durch Anhäufung bzw. Abtrift von Wassermassen in den Küstengebieten, die zumeist vom Schelf eingenommen werden. Es ist klar, daß diese Erscheinungen eine Folge der hydrodynamischen Randbedingungen sind, denen der Wassertransport in den Meeresströmen unterliegt. Im freien Ozean erfolgt der durch einen Wind bedingte totale Wassertransport stets senkrecht zur Windrichtung, und zwar ohne Rücksicht auf die Tiefe der Windtrift und ohne Rücksicht auf eine Änderung der Turbulenzreibung mit der Tiefe. Da die Windtrift eine beschränkte Mächtigkeit hat, werden durch den Wind in erster Linie die leichteren Oberflächenschichten verschoben und die Randbedingungen an der Küste führen als Endeffekt eines *stationären* Windes schließlich stets zu einer Neigung des Meeresniveaus

in der Richtung senkrecht zur Küste, was mit Windstau bzw. Windsog an den Küsten verknüpft ist. Wenn der Aufbau der ozeanischen Wassermassen geschichtet ist, stellen sich Komplikationen ein, da Windstau und Windsog vor der Küste die vertikale Massenverteilung und damit auch die Druckverteilung ändern. Diese Änderungen haben aber Dichteströme zur Folge, die sich der Windtrift überlagern. Wie sich die Ver-

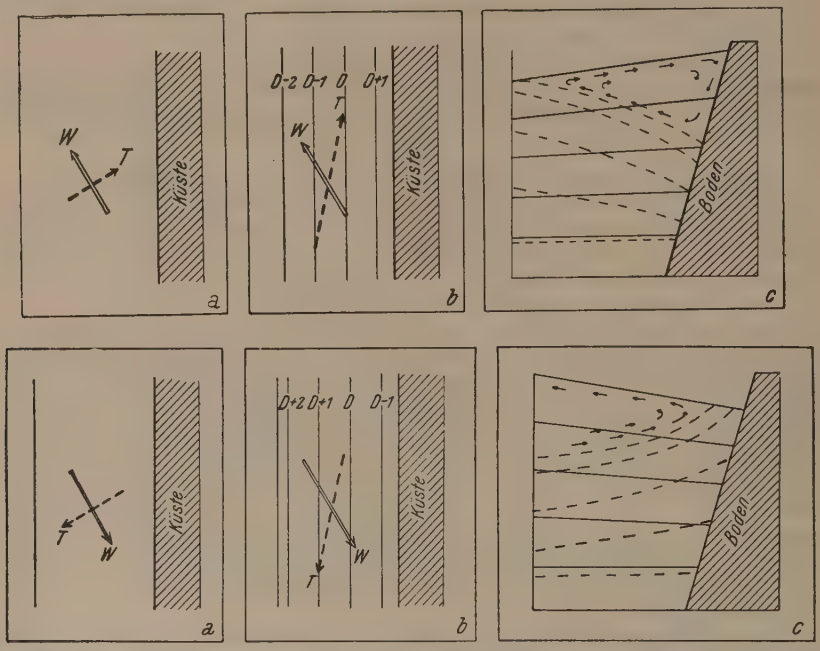


Abb. 1. Darstellung der Windwirkung bei der Erregung von küstenparallelen Strömen und Zirkulationen im Meeresgebiet vor einer Küste (Nordhemisphäre). W = Windrichtung, T = Richtung des winderzeugten Wassertransportes im freien Ozean. $D-1$, D, $D+1$ usw. Niveaulinien der Meeresoberfläche. *a* und *b*: Aufsicht auf die Meeresoberfläche, *c* Querschnitt senkrecht zur Küste. *a* Anfangsstadien, *b* und *c* nahe dem stationären Zustand.

Abb. oben: Anstau der leichteren Wassermasse an der Küste und Sinken der Wassermassen dortselbst.

Abb. unten: Abtrieb des leichteren Oberflächenwassers von der Küste und Aufquellen von kaltem Tiefenwasser dortselbst.

hältnisse bei Wind mit einer Komponente zu einer geradlinig gedachten Küste oder von der Küste weg gestalten, ist in einfacher Weise der Abb. 1 zu entnehmen. Im oberen Teil derselben ist der Fall dargestellt, daß eine Küste auf der rechten Seite eines entlang derselben wehenden Windes liegt. In größerer Entfernung von der Küste wird das Wasser der Oberschicht senkrecht zum Wind nach rechts verfrachtet; aber vor der Küste muß die Bewegung parallel zur Küstenlinie erfolgen. Dies bedingt eine Stromkonvergenz und einen Wasserstau vor der Küste. Zu diesem gehört entsprechend dem geänderten Druckfeld eine Strömung parallel der Küste. So erzeugt der Wind nicht allein eine Windtrift,

sondern vor der Küste, parallel zu dieser einen Zusatzstrom in der Richtung des Windes. Ist der Ozean geschichtet, so wird durch den Windstau vor allem die leichte Oberschicht vor der Küste angehäuft und in ihr bildet sich eine Zirkulation aus, wie sie in der Abbildung angedeutet ist. Sie kann unter Berücksichtigung von Reibungseinflüssen stationär bleiben. Den entgegengesetzten Fall gibt der untere Teil der Abb. 1, bei dem die Küste links vom Winde liegt. Der Wassertransport von der Küste weg erzwingt eine Erniedrigung des Meeresniveaus vor der Küste, was wieder zu einem Zusatzstrom parallel der Küste in der Windrichtung führt. Bei geschichtetem Wasseraufbau wird vor der Küste das leichte Wasser der Deckschicht von schwerem Tiefenwasser ersetzt und dies ist die bekannte Erscheinung des kalten Auftriebwassers, wie sie entlang der Küsten von Nordwest- und Südwestafrika, vor den Küsten Perus und Kaliforniens häufig auftritt.

Einer umfassenden theoretischen Erfassung dieser Erscheinungen vor ozeanischen Küsten stehen einige Schwierigkeiten im Wege, die noch nicht behoben werden konnten. Qualitative Erörterungen über das Auftriebphänomen stammen vor allem von H. Thorade (1909) [*1*], McEwen (1912) [*2*] und E. R. Gunther (1936) [*3*]. Theoretische Untersuchungen über den Einfluß der Küsten, die sich winderzeugten Strömen entgegenstellen, findet man in erster Linie in den klassischen Arbeiten von V. Ekman (1905, 1923) [*4*, *5*] und in einer Arbeit von H. Jeffreys (1923) [*6*], die speziell den Effekt eines stationären Windes auf das Wasserniveau vor der Küste untersucht. Aber im wesentlichen werden in diesen Untersuchungen *homogene* Wassermassen vorausgesetzt, was nur teilweise den Verhältnissen in der Natur gerecht zu werden vermag.

2. Eine Vertiefung der Kenntnisse über den gesamten Ablauf des Phänomens war nur zu erhalten, als es möglich wurde, sich stützend auf mehr oder minder synoptisches Beobachtungsmaterial die Verhältnisse auf ozeanischen Schnitten senkrecht zur Küste zu studieren. Das erstemal erfolgte dies mit dem Beobachtungsmaterial, das von der „Meteor"-Expedition 1924/26 vor den Küsten Südwestafrikas gewonnen worden war (Defant 1936 [*7*]). Aber es ist klar, daß nur in engen Zeitintervallen aufeinanderfolgende ozeanographische Schnitte senkrecht zur Küste imstande sind, Einblick in den sich entwickelnden Vorgang des Windstaues und des Auftriebes an der Küste zu geben und daß nur die auf Grund eines derartigen Beobachtungsmaterials gewonnenen Ergebnisse die Aufstellung geeigneter Modelle für eine nähere theoretische Behandlung des Problems ermöglichen. Solches Beobachtungsmaterial ist zuerst von der Scripps Institution of Oceanography in La Jolla (California), vor dessen Küsten sich das Auftriebsphänomen jahrein, jahraus in besonders eindrucksvoller Form einstellt, gesammelt worden. Es hat eine eingehende Bearbeitung durch H. U. Sverdrup (1938) [*8*] und H. U. Sverdrup and R. H. Fleming (1941) [*9*] erfahren. Die in den Monaten März bis Juni 1937 durchgeführten, fast synoptischen Aufnahmen eines Schnittes vor der kalifornischen Küste querab Port San

Louis (32,5° N, 127,7° E) wurden im einzelnen analysiert und die Dynamik des Auftriebsvorganges studiert.

Schon die „Meteor"-Beobachtungen haben den bei Auftriebserscheinungen vor der Küste charakteristischen vertikalen Aufbau des Meeres und das dazugehörige Stromfeld ergeben. Im wesentlichen handelt es sich bei der Bewegung im Querschnitt um einen länglichen Wirbel mit horizontaler Achse, der einem stärkeren gleichförmigen Strom parallel der Küste überlagert ist. Unter der Achse des Querwirbels fließen im unteren Teil der Deckschicht, in der Sprungschicht und darunter die Wassermassen gegen die Küste und steigen davor allmählich auf. Nur auf diesen schmalen Streifen zwischen einer küstenparallelen Konvergenzlinie und der Küste ist das Aufquellen des Wassers beschränkt. Dieses aufquellende Wasser stammt aus Tiefen von 100 bis 200 m und durch das Stromfeld wird die vertikale Temperaturverteilung vor der Küste horizontal, etwas verzerrt, umgelegt, sozusagen auf die horizontale Oberfläche abgebildet. Eine Bedingung für diese Zirkulation ist, daß im Auftriebgebiet vor der Küste die Sprungschicht zerstört wird. Die Querschnitte des „Meteor" 1937 auf dem nordwestafrikanischen Schelf haben dies deutlich gezeigt. Die allmähliche Auflösung der Sprungschicht, die sonst auch in den küstennächsten Teilen scharf ausgebildet ist, erfolgt, wie die Ankerstationen zeigten, durch Unstabilwerden der internen Gezeitenwellen. Dies ist somit eine Vorbedingung für das Aufquellen von Tiefenwasser vor der Küste. Die Dynamik des ganzen Vorganges hat aber erst die Bearbeitung der Scripps-Beobachtungen ergeben: In Abb. 2 links sind die dyn. Topographien des phys. Meeresniveaus, der 100- und 200 dbar-Fläche relativ zur 500 dbar-Fläche gegeben. Während der beiden Aufnahmen sind charakteristische Massenverlagerungen vor

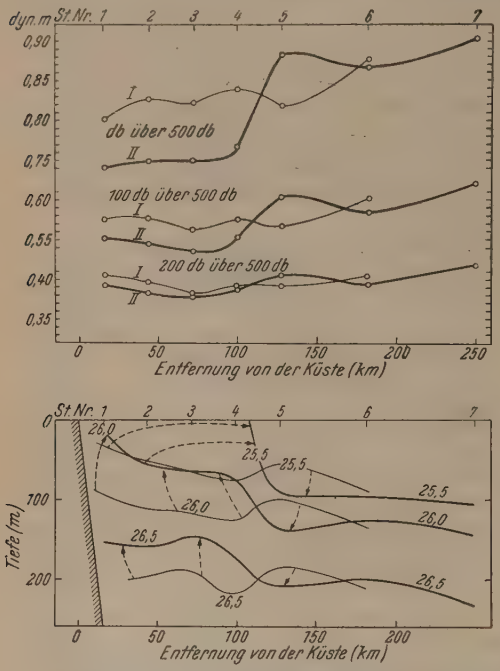


Abb. 2. Oben: Profile der dyn. Topographie des phys. Meeresniveaus (0 dbar) und der Druckflächen von 100, bzw. 200 dbar (alle relativ zur 500 dbar-Fläche). Die dünnen Linien beziehen sich auf die Fahrt vom 25. bis 27. März, die dicken auf die Fahrt vom 5. bis 6. Mai 1937. Unten: Profile der Dichtelinien (σ_t) bei denselben Fahrten und mutmaßliche Verlagerungen des Wassers dieser Deckschicht in der Zeit zwischen den beiden Fahrten (nach SVERDRUP und FLEMING).

sich gegangen. Die bis zur 200 dbar-Fläche eingetretenen Profiländerungen lassen sich nur durch einen Massentransport von der Küste weg und durch Aufstau des leichten Oberflächenwassers seewärts (im Bereiche der Stationen 4 und 5) deuten. Diese Bewegungen sind als eine Folge der Winde anzusehen, die längere Zeit hindurch nahezu parallel der Küste (nach SSW) wehten. Aus der Änderung des Verlaufes der Dichtekurven zwischen den beiden Aufnahmen läßt sich dieser Transport ableiten. Die gestrichelten Kurven in Abb. 2 rechts von den Linien der ersten Aufnahme zu jenen der zweiten zeigen die Umlagerung der Massenverteilung. Das Oberflächenwasser wurde nach außen geschafft und in einer Entfernung von etwa 100 km aufgestaut. Aus der Analyse aller ozeanographischen Felder hat SVERDRUP dann das in Abb. 3 gegebene Bild des mittleren Stromfeldes während der Zeit der Profilaufnahmen abgeleitet. Es zeigt zwischen der Küste und dem weiter draußen aufgestauten Wasser eine teilweise in sich geschlossene Zirkulation, die bis etwa 80 m Tiefe reicht. In der oberen Hälfte des Wirbels fließt das Wasser von der Küste weg, in der unteren zur Küste hin; vor dieser steigt es auf und an einer Grenzschicht draußen sinkt es ab. Diese äußere Grenzschicht bewegt sich selbst von der Küste weg und als Kompensation tritt ein Ersatz von unten aus Tiefen nicht größer als 200 m auf.

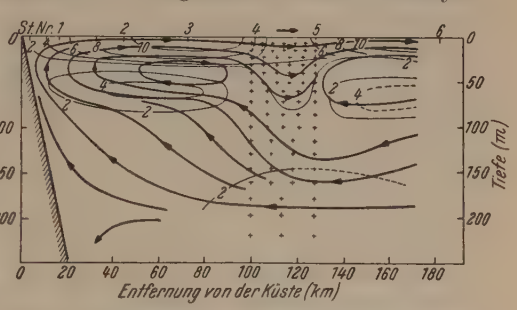


Abb. 3. Wahrscheinliche vertikale Zirkulation vor der Kalifornischen Küste in der Zeit zwischen den beiden Fahrten. Die dicken Linien mit Pfeilen sind Stromlinien, die dünnen horizontale Geschwindigkeiten (cm/sec). Der Raum mit Kreuzen stellt ein Gebiet mit einer Geschwindigkeit parallel der Küste in die Abbildung hinein dar.

Die Entwicklung einer Aufquellperiode aus einem früher quasistationären Zustand läßt sich leicht verständlich machen. Durch das Auftreten einer küstenparallelen Schubspannung der Winde erfolgt bei einem geschichteten Ozean eine derartige Umlagerung des Massenfeldes, daß sich in Küstennähe schwereres, weiter draußen leichteres Wasser einstellt. Zu dieser Massenverteilung gehört ein *Dichtestrom* parallel der Küste. In ihm nimmt die Geschwindigkeit mit der Tiefe rasch ab und ein Teil der Schubspannung des Windes wird hier durch die Turbulenzreibungskräfte ausgeglichen. Dies bedeutet, daß im Bereich des Stromes die Geschwindigkeit von der Küste weg kleiner wird als im Bereich vor der Küste, in dem die ganze Schubkraft des Windes wirksam bleibt. Dadurch stellt sich aber der Bereich des Dichtestromes wie eine Barriere gegen den Wegtransport des Wassers von der Küste; es erfolgt hier eine Stauung und im inneren Teil bildet sich eine in sich geschlossene Zirkulation aus. Die Barriere bewegt sich mit einer kleinen Geschwindigkeit nach außen; deshalb muß die innere Zirkulation entweder immer dünner werden oder sie muß Zufluß von unten erhalten. Das letztere scheint

das wahrscheinlichere zu sein. Außerhalb des Dichtestromes muß ein ähnliches Stromsystem vorhanden sein; die Barriere wirkt selbst nun wie eine sekundäre Küste, aber die aufsteigende Bewegung beschränkt sich bei ihr auf die Deckschicht leichteren Wassers, kann somit nicht von einem Temperaturrückgang im Oberflächenwasser begleitet sein.

Dies ist ein aus den Beobachtungstatsachen im kalifornischen Auftriebgebiet abgeleitetes Schema für die Entwicklung eines kalten Küstenwassers aus einem Vorstadium mit warmem Wasser.

3. Im Rahmen des großen Marine Life Research Program werden seit 1949 von der Scripps Institution of Oceanography (University of California) in La Jolla monatlich ozeanographische Aufnahmen des Meeresgebietes vor der Westküste Nordamerikas zwischen 25 und 43° N ausgeführt [*10*]. Jede Aufnahme besteht aus zwölf Profilen senkrecht zur Küste von je zwölf ozeanographischen Stationen, die mittels drei bis vier Schiffen zugleich gewonnen werden. Die größte Beobachtungstiefe ist 1200 m; das Aufnahmegebiet reicht bis etwa 450 sm gegen den freien Ozean hinaus. Der Hauptzweck dieser außerordentlich extensiven Forschung soll Einblick in die Schwankungen der ozeanischen Zirkulation dieses Meeresgebietes geben, das vom Kalifornischen Strom beherrscht wird. Man erwartet, daß diese Schwankungen auf die biologischen und fischereilichen Verhältnisse dieses Gebietes zurückwirken und auch Aufschlüsse über die auffallenden Ausfälle in der Sardinenfischerei geben, die sich in der letzten Zeit ereignet haben. Diese Zirkulationsschwankungen sind auch innig mit dem Kaltwasserauftriebsphänomen verknüpft, so daß eine Bearbeitung dieses enormen Beobachtungsmaterials Einblick in den Mechanismus dieser Erscheinung verspricht.

Ein fast halbjähriger Aufenthalt am großen ozeanographischen Institut in La Jolla gab mir Gelegenheit, dieses Beobachtungsmaterial eingehend kennenzulernen. Die Durchmusterung der dynamischen Topographien des phys. Meeresniveaus der ersten Fahrten zeigte, daß im Kalifornischen Strom längs aller Profile mehr oder minder große Wirbelstörungen vorhanden sind, die im angenähert gleichen Raumabstand voneinander folgen. Ähnliche Intervalle finden sich auch in den entsprechenden Störungen der Temperatur- und Salzgehaltsverteilungen. Diese merkwürdige Anordnung ließ den Verdacht aufkommen, daß diese Wirbel durch die Schiffsgeschwindigkeit, die der Aufnahme zugrunde liegt, und durch den Stationsabstand, den man gewählt hat, vorgetäuschte Störungen sind und nicht als reell anzusehen sind. Der Nachweis, daß sie durch interne 24- und 12stündige Gezeitenwellen, die im ganzen Raum an der stets gut ausgebildeten Sprungfläche der Dichte vorhanden sind, erzeugt werden, ist nicht schwer zu erbringen. Es ließ sich auch eine Methode angeben, die es ermöglicht, diesen vorgetäuschten Gezeiteneffekt einigermaßen korrekt aus dem Beobachtungsmaterial zu eliminieren (Defant 1950) [*11*, *12*]. Will man eine genaue Untersuchung der zeitlichen Schwankungen des Kalifornischen Stromes vornehmen, dann ist es zunächst unerläßlich, den Gezeiteneffekt aus allen Karten zu eliminieren

und alle Deduktionen auf Karten und Werte zu stützen, die von solchen vorgetäuschten Störungen frei sind.

Eine vorläufige Bearbeitung der dynamischen Topographien des phys. Meeresniveaus der ersten fünf Fahrten (DEFANT 1949) [*13*] bietet

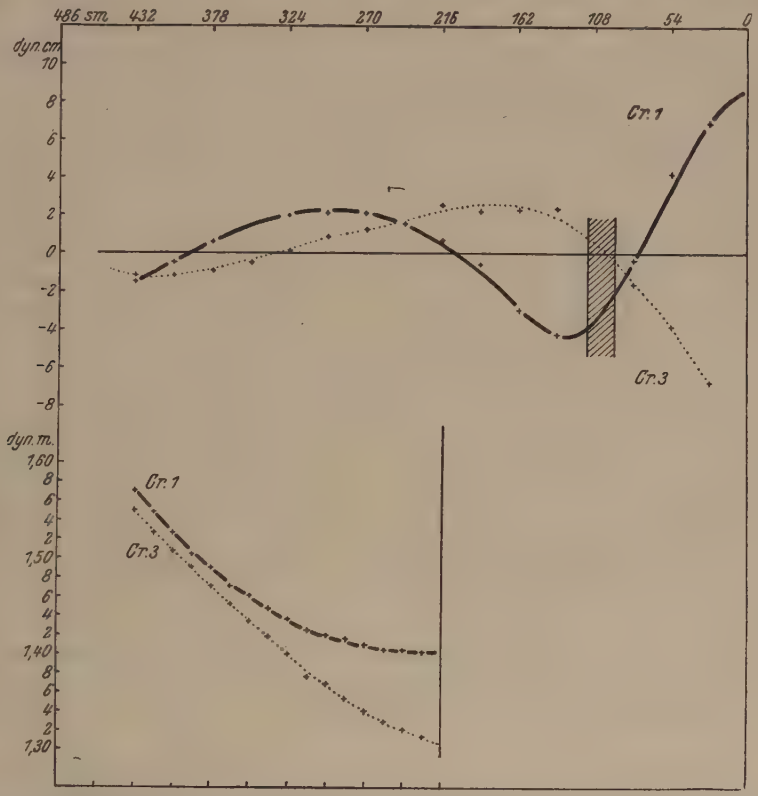


Abb. 4. Mittleres Profil der Grundverteilung der dyn. Topographie des phys. Meeresniveaus senkrecht zur Kalifornischen Küste bei Fahrt 1 (28. Februar bis 15. März 1949) und Fahrt 3 (28. April bis 14. Mai 1949).

Abb. 5. Mittleres Profil der Wellenströmung senkrecht zur Kalifornischen Küste bei Fahrt 1 und Fahrt 3 (s. Abb. 4). Der schraffierte Streifen gibt die ungefähre Lage des Schelfrandes an.

einige neue Gesichtspunkte zum Verständnis der weiträumigen Veränderungen, die gelegentlich im Gebiete der ganzen Kalifornischen Strömung auftreten. Besonders zwei Fahrten (die erste und dritte Fahrt) zeigen auffallende konträre dynamische Topographien und bieten so ein besonderes Interesse. Wenn man die Profile der dynamischen Topographien senkrecht zur Küste näher betrachtet, dann erkennt man, daß sie bei beiden Fahrten aus zwei Teilen zusammengesetzt sind: 1. eine relativ glatte *Grundverteilung*, die einen gleichförmigen Anstieg des phys. Meeresniveaus gegen Westen aufweist. Diese Grundverteilung

gehört zum Kalifornischen Strom, der nach Süden geht. 2. Darüber gelagert ist eine *wellenförmige Verlagerung* des phys. Meeresniveaus. Sie hebt sich überall deutlich hervor. Die Trennung dieser zwei Anteile und ihre geographische Darstellung zeigen, daß die Änderungen der Grundverteilung zu einer Abschwächung (1. Fahrt) bzw. zu einer Verstärkung (3. Fahrt) des regulären Kalifornischen Stromes gehören. Die wellenförmige Störung hingegen ordnet sich in beiden Fällen streifenförmig parallel dem Küstenverlauf an. Diese Verhältnisse sind so gleichartig, daß man ohne weiteres für den mittleren Teil des Gebietes *mittlere* Profilverteilungen dieser beiden Anteile berechnen kann (siehe Abb. 4 und 5). Bei der 1. Fahrt beginnt der reguläre Kalifornische Strom erst in einiger Entfernung von der Küste (erst ab 200 sm vor ihr), bei der 3. Fahrt reicht er in verstärkter Form bis zur Küste. Im ersten Fall ist somit eine Abschwächung, im zweiten eine Verstärkung des Kalifornischen Stromes vorhanden. Abb. 5 gibt die Wellenströmung. Es ist nicht zu bezweifeln, daß man es bei Fahrt 1 mit einem *Anstau* des Wassers an der Küste zu tun hat. Zur Zeit der Fahrt war dieser Anstau schon voll entwickelt und kann sich während der Dauer der Fahrt in diesem Ausmaß nur halten, wenn der tangentiale Winddruck gegen die Küste, der die Erscheinung hervorruft, dem Druckgradienten des geneigten Meeresniveaus gerade das Gleichgewicht hält. Die am Schelf angestauten Wassermassen werden dem Meeresstreifen vor dem Kontinentalabfall entnommen und hier liegt deshalb der Meeresspiegel trogförmig tiefer. Diese Störung greift dann wie bei einer Welle westwärts weiter aus und erzeugt abklingend die westwärts folgenden Wellenstörungen.

Genau dasselbe gilt für die Fahrt 3, nur daß statt eines Wasseranstaues hier ein *Wasserdefizit* vor der Küste auftritt und entsprechend dieser primären Störung sich die folgenden Abweichungen im umgekehrten Sinn einstellen. Die beiden Fälle sind so auch ursächlich konträr und ihre Erzeugung muß durch entgegengesetzte Bedingungen zustande kommen.

Zweifellos sind es die Winde, die in erster Linie diese grundverschiedenen Änderungen im ozeanischen Zustand vor der Kalifornischen Küste erzwingen. Durch ihre Komponente parallel zur Küste verstärken oder schwächen sie den regulären Kalifornischen Strom und bedingen so die Schwankungen in der *Grundverteilung*. Durch ihre Komponente senkrecht zur Küste rufen sie Wasserstau und Wasserabtrieb von der Küste hervor und sind so in erster Linie die Ursache der *primären Wellenstörungen* im Küstenteil. Die viermal täglichen Wetterkarten des Untersuchungsgebietes bestätigen vollauf das Vorhandensein solcher Windverhältnisse während der zwei Fahrten. So bietet die 1. Fahrt ein typisches Beispiel für einen Wasserstau (pulling up of water on the coast), die 3. Fahrt hingegen ein typisches Beispiel für Kaltwasserauftrieb vor der Küste (upwelling of water off the coast).

Die Dynamik der Anstau- und Abtriebprozesse erfordert, daß mit einer Hebung bzw. Senkung des phys. Meeresniveaus eine Senkung bzw. Hebung der Sprungschicht im Innern des Meeres vorhanden ist. Bei

einem zweifach geschichteten Meer geht bei solchen Prozessen, die sich nahe dem stationären Gleichgewicht abspielen, das Meeresniveau stets invers zur Diskontinuitätsfläche zwischen den beiden Wasserkörpern. Die Schwankung der Grenzfläche ist aber dabei vielmals größer und angenähert verkehrt proportional der Dichtedifferenz der beiden Wasserarten. Zur Ausbildung solcher Zustände stellen sich vor allem in der Deckschicht *Zirkulationen* ein, die erlöschen, wenn stationäres Gleichgewicht eintritt. Diese Zirkulationen haben in den oben besprochenen zwei Fällen etwa die in der Abb. 6 gegebene Anordnung.

Abb. 6. Lagerung des phys. Meeresniveaus und der inneren Grenzfläche und dazugehörige Zirkulationzellen der Deckschichte bei Fahrt 1 und Fahrt 3. Im ersten Fall Anstau an der Küste, im zweiten Fall Auftrieb vor der Küste. Die Neigungen der beiden Grenzflächen sind stark übertrieben, jene des phys. Meeresniveaus weit mehr als jene der inneren Sprungfläche.

4. Der Zusammenhang zwischen den Änderungen in den dynamischen Topographien und den gleichzeitig herrschenden Windverhältnissen ist so einfach, daß er als Modell für eine theoretische Erfassung des Windeinflusses vor einer geraden Küste dienen kann. Dieses schematische Modell könnte man sich etwa so vorstellen:

An ein ausgedehntes Meer gleichförmiger Tiefe h_2 schließt sich (rechts in Abb. 7) ein Schelfmeer der gleichförmigen Tiefe h_2' und der Längsausdehnung a an. Das Meer sei *zweifach* geschichtet, wobei die Mächtigkeit der Deckschichten h_1 bzw. h_1' seien. Die Dichten der Ober- bzw. Unterschicht seien ϱ_1 bzw. ϱ_2. Über der ganzen Meeresfläche wirke senkrecht zur Küste, durch den Wind bedingt, ein Tangentialdruck τ_x. Die Deckschicht sei so dünn, daß der Windeinfluß sie voll zu erfassen vermag und ihr eine *gleichförmige* Geschwindigkeit erteilen kann. Die Windströmung wollen wir *periodisch* mit der Frequenz σ ansetzen, also $\tau_x = W \cos \sigma t$. Es ist zu erwarten, daß an der Küste durch den Windeinfluß ein Windstau erfolgt und sich irgendwo im Schelfmeer

eine Knotenlinie einer erzwungenen Wasserverlagerung ausbildet. Diese vom Winde erzwungene Schwingung des Schelfmeeres muß sich mit einer ebenfalls vom Winde erregten Schwingung im freien Ozean so kombinieren, daß am Schelfrand die Amplituden der Oberflächen- und der internen Schwingung übereinstimmen und der Wassertransport in beiden Schichten diesseits und jenseits des Schelfrandes gleich ist. Da die Küste als geradlinig und langgestreckt anzusehen ist, die Verhältnisse in der Querrichtung also symmetrisch sind, braucht man nur die Verhältnisse senkrecht zur Küste in Betracht zu ziehen. Die Reibungseinflüsse werden zunächst außer Betracht gelassen, hingegen muß die Coriolis-Kraft Berücksichtigung finden.

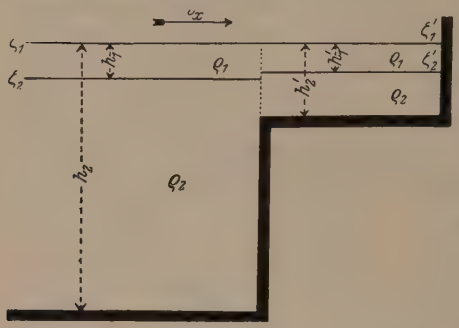


Abb. 7. Schematisches Modell für die theoretische Behandlung der Windwirkung.

Die Lösung des Problems der durch die Windeinflüsse erzwungenen Schwingungen im ganzen Meeresraum gestaltet sich etwas schwierig, da man die Wellenlänge der Schelfschwingung und jene des freien Ozeans nicht kennt und diese sich erst aus der Lösung ergeben sollen. Man weiß nur, daß am Schelfende (Küste) ein Schwingungsbauch der Schelfschwingung vorhanden sein muß. Man muß so bei der analytischen Behandlung die Lage des Koordinatenursprungs ($x = 0$) zunächst frei wählen und die vier Randbedingungen am Schelfrand und die zwei an der Schelfküste fixieren dann das ganze Schwingungssystem. Die etwas langwierigen Berechnungen ergeben drei Gleichungen für die drei Unbekannten: $l =$ = Wellenlänge der erzwungenen Schwingung im freien Ozean, l' = Wellenlänge der erzwungenen Schwingung am Schelf und m = Entfernung der Knotenlinie der letzteren Schwingung vom Schelfrand.

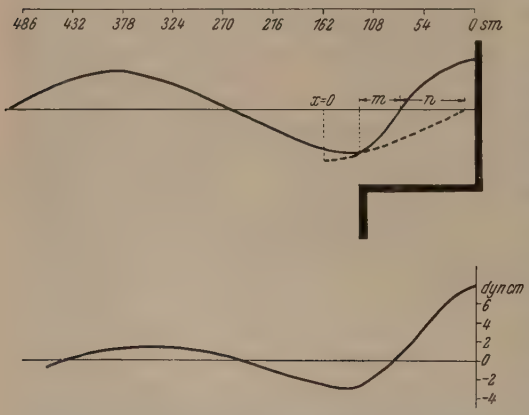


Abb. 8. Oben: Theoretische Verteilung der Amplituden des phys. Meeresniveaus bei der winderregten Wellenstörung senkrecht zur Küste (in relativen Einheiten über bzw. unter dem Ruhezustand). Berechnung mit Zahlenwerten, die ungefähr den Verhältnissen vor der Kalifornischen Küste entsprechen.
Unten: Mittleres Profil der Wellenströmung des phys. Meeresniveaus, bestimmt aus mehreren dyn. Profilen von Fahrten des MLR-Programs senkrecht zur Kalifornischen Küste.

Alle diese Größen lassen sich aus den gegebenen Dimensionen des schwingenden Systems und aus der Periodendauer der Windstörung berechnen. Die rechnerische Durchführung der ganzen Theorie wird an anderer Stelle veröffentlicht werden. Hier möge nur das Resultat eines Falles mit Zahlenwerten, die ungefähr den Verhältnissen vor der kalifornischen Küste entsprechen, gegeben werden. Es stellt der obere Teil der Abb. 8 das phys. Meeresniveau in relativen Einheiten über dem Geoid (Ruhezustand der Meeresoberfläche) in dem Moment dar, wo an der Küste der maximale Wasserstand eingetreten ist. Die Lagerung der Grenzschicht zwischen der Deck- und der Unterschicht verläuft *invers* hierzu mit einer Vergrößerung der Schwankung angenähert verkehrt proportional dem Dichteunterschied der beiden Schichten. Unter der Abbildung steht ein mittleres Profil der dynamischen Topographie des phys. Meeresniveaus, bestimmt aus den Fahrten des MLR-Programs für das Gebiet vor dem mittleren Teil der kalifornischen Küste. Es zeigt dieselbe Form, wie das darüberstehende theoretische Profil, wenn auch in der Amplitudenverteilung der erzwungenen Schwingungen manche Abweichungen vorhanden sind. Es ist aber zu bedenken, daß das theoretische Modell nur ganz roh den Verhältnissen in der Natur gerecht zu werden vermag. Vor allem ist in Wirklichkeit die Tiefe des Schelfmeeres nicht konstant, sondern nimmt zumeist gegen die Küste zu ab. Bei Berücksichtigung dieser Tatsache würden an Stelle der einfachen trigonometrischen Funktionen Besselsche Funktionen treten, die dann eine rasche Zunahme der Amplituden gegen die Küste verständlich erscheinen lassen. Dann werden sich aber weiters am Schelfrand gewisse Reibungseinflüsse geltend machen und nicht die ganze Impulsenergie der Schelfschwingung wird auf die Wassermassen des freien Ozeans übertragen werden. Dies bedingt, daß die Schwingungsamplituden des freien Ozeans kleiner ausfallen als am Schelf. Es besteht wohl kein Zweifel, daß die ganze Form des phys. Meeresniveaus und der damit gekoppelten internen Schwingung auf durch Wind erregte Schwingungen des ganzen Systems zurückzuführen ist.

5. So einfach und schematisch das hier behandelte Modell ist, es gibt doch im wesentlichen alles, was die Beobachtungen erkennen lassen. Man sieht deutlich eine gewisse Ähnlichkeit mit dem von SVERDRUP gegebenen Modell, das aus Beobachtungen zweier aufeinanderfolgender Profile gewonnen wurde. Es läßt sich auch der Fall theoretisch behandeln, daß nur am *Schelf* ein Windeinfluß vorhanden ist. Dann zwingt die winderregte Schelfverlagerung die Wassermassen des freien Ozeans einfach mitzuschwingen. Die theoretische Durchführung dieses Falles zeigt, daß nun die Knotenlinie der Schelfschwingung *stets* am Schelfrand liegen muß und an dieser Knotenlinie schließt sich dann die Mitschwingung des freien Ozeans an. Aber im wesentlichen bleibt es bei ähnlichen Ergebnissen.

Es fehlt noch die theoretische Behandlung der Wirkung eines küstenparallen Windes, die aber auch zu ähnlichen Resultaten führen dürfte. Vielleicht gelingt aber einmal, was wichtiger wäre, eine Lösung mit einer

der Wirklichkeit besser angepaßten Windwirkung und mit Berücksichtigung der wechselnden Tiefenverhältnisse namentlich am Schelf, aber auch mit Berücksichtigung aller Reibungseinflüsse.

Literaturverzeichnis.

1. Thorade, H.: Über die Kalifornische Meeresströmung. Ann. d. Hydrogr. u. mar. Meteor., **37**, 17—34, 63—76 (1909).
2. McEwen, G. F.: The distribution of ocean temperatures along the west coast of North America deduced from Ekman's theory of the upwelling of cold water from the adjacent ocean depths. Intern. Revue ges. Hydrobiol. u. Hydrogr. **5**, 243—286 (1912).
3. Gunther, E. R.: A report on oceanographical investigations in the Peru coastal current. Discovery Reports **13**, 109—275 (1936).
4. Ekman, V. W.: On the influence of the earth's rotation on ocean currents. Ark. f. Mat. Astr. o. Fys. **2**, Nr. 11, Stockholm (1905).
5. — Über Horizontalzirkulation bei winderzeugten Meeresströmungen. Ark. f. Mat. Astr. o. Fys. **17**, Nr. 26, Stockholm (1923).
6. Jeffreys, H.: The effect of a steady wind on the sea-level near a straight shore. Phil. Mag. **46**, 115—125 (1923).
7. Defant, A.: Das Kaltwasserauftriebsgebiet vor der Küste Südwestafrikas. Länderkundliche Forschung, Festschr. N. Krebs, 52—66 (1936).
8. Sverdrup, H. U.: On the process of upwelling. Jour. Marine Research **1**, 155—164 (1938).
9. — and R. H. Fleming: The waters off the coast of southern California, March to July, 1937. Scripps Inst. Oceanogr., Bull. **4**, 261—378 (1941).
10. Scripps Institution of Oceanography: Physical and chemical data. Marine Life Research Program, Division III, Physical Oceanography, Division of Chemical Oceanography. Cruise reports 1—5, La Jolla (1949).
11. Defant, A.: Reality and illusion in oceanographic surveys. Jour. Marine Research **9**, 120—138 (1950).
12. — On the origin of internal tide waves in the open sea. Jour. Marine Research **9**, 111—120 (1950).
13. — Memorandum concerning the work of the Marine Life Research Program. Scripps Inst. of Oceanography, Univ. of California, La Jolla (als Manuskript gedruckt, Februar 1950).

551.574.1

(Signal Corps Engineering Laboratories, Fort Monmouth, N. J., U.S.A.)

A Theory of the Formation of Ice Crystals.

By

H. K. Weickmann.

With 8 Figures.

Summary. As is known from laboratory experiments and investigations in the free atmosphere, ice crystal formation is initiated either at vapor saturation with respect to water or by crystallization of a droplet. Nuclei with special properties are needed. An explanation of their effectiveness can be given by application of the laws of oriented overgrowth (Epitaxy) between two crystals. Any host crystal having a plane with a geometrical pattern similar to, for instance, the base plane of the ice crystal, can orient an adsorbed layer of H_2O molecules already in the ice crystal pattern. The closer the fit between the two crystal planes, the greater the area of oriented H_2O molecules will be. By piling up other layers of H_2O molecules a very small ice crystal, called "*ice seed*", is created which can grow in supercooled water. This crystal is so small that according to the THOMSON-GIBBS Law a high supersaturation would be needed to create it directly from vapor. Calculations of the effective temperature of mica, AgI and quartz as freezing nuclei are in fairly good agreement with the experiment. This theory permits an explanation of the observed thresholds of ice formation which occur at about $-20°$, $-30°$, $-40°$ and $-60°$ C. Occasionally capillary condensation of water molecules on a freezing nucleus will occur when the vapor is saturated with respect to ice but not with respect to water; this has frequently been erroneously ascribed to ice formation by a real sublimation nucleus.

Zusammenfassung. Nach Untersuchungen im Laboratorium und in der freien Atmosphäre entsteht Eis entweder aus Wasserdampf auf dem Umwege über vorherige Kondensation des Dampfes oder unmittelbar aus der flüssigen Phase durch Kristallisation. Zur Einleitung des Kristallisationsprozesses sind Kerne („Gefrierkerne") mit besonderen Eigenschaften notwendig. Eine Erklärung ihrer Wirkungsweise wird durch Anwendung der Gesetze über das orientierte Aufwachsen eines Kristalls auf einem anderen gewonnen. Besteht zwischen einer Gitternetzebene irgendeines Kristalls und z. B. der Basisebene des Eiskristalles eine gewisse Ähnlichkeit, die sich nach ROYER hauptsächlich auf die geometrische Anordnung der Kristallbausteine in beiden Flächen bezieht, dann orientiert sich die erste auf der Kristallfläche adsorbierte

Moleküllage des Gastkristalls in der für sie typischen Gitteranordnung. Eine weitere, wesentliche Bedingung ist sehr gute Benetzbarkeit des Wirtkristalls durch die Bausteine des Gastkristalls, ohne daß es jedoch zur Auflösung des Wirtkristalls kommen darf. Solche Benetzbarkeit zeigt z. B. eine frisch gespaltete Glimmerfläche. Auf der Oberfläche eines gewöhnlichen, nach seiner Struktur geeigneten Aerosolteilchens werden jedoch nur wenige solcher „aktiver Stellen" vorhanden sein. Je besser dann die geometrische Ähnlichkeit beider Kristallflächen ist, um so größer ist die Fläche des Gastkristalls, die orientiert werden kann.

Diese erste orientierte Molekülschicht des Gastkristalls wirkt orientierend auf die Wassermoleküle der Umgebung oder die durch den Kondensationsprozeß angelagerten Moleküle; dadurch entsteht ein kleiner Eiskristall. Dieses Kriställchen wirkt bei einer bestimmten kritischen Temperatur als Kristallisationskeim für das gesamte Wasser. Die Beziehung zwischen seiner Größe und seiner Wirkungstemperatur kann berechnet werden nach einer von J. J. Thomson abgeleiteten Formel. Je größer es ist, um so näher am Gefrierpunkt wirkt es; trotzdem ist es aber noch so klein, daß nach dem Thomson-Gibbsschen Gesetz eine große Übersättigung notwendig wäre, um es direkt aus dem Dampf zu bilden. Durch Analyse der geometrischen Ähnlichkeit zwischen der Basisfläche eines Eiskristalls einerseits und der Spaltfläche von Glimmer, der Basisfläche von Silberiodid und der Basisfläche eines Quarzkristalls anderseits war es möglich, die Größe der Fläche zu berechnen, über die die adsorbierten Wassermoleküle in der Basisflächenstruktur von Eis orientiert werden können. Dadurch war die Größe des Eiskeimes gegeben, dessen kritische Wirkungstemperatur nach J. J. Thomsons Formel berechnet werden konnte.

Die so berechneten Werte stimmen gut mit den experimentell festgestellten Gefriertemperaturen von Wasser auf Glimmer, Silberiodid und Quarz überein. Versuche mit Glimmer deuten darauf hin, daß in der Nähe des Gefrierpunktes eine besonders gute Ableitung der Gefrierwärme erforderlich ist, um den Kristallisationsprozeß in Gang zu bringen. Die Theorie gestattet eine Erklärung der verschiedentlich beobachteten Temperaturschwellen der Eisbildung in den Intervallen —19 bis —24° C, —30 bis —35° C, —39 bis —42° C und —60 bis —65° C. — Kapillarkondensation, durch die an unlöslichen Kondensationskernen Kondensation schon bei 90% rel. Feuchte einsetzen kann, kann das Vorhandensein eines Sublimationskernes vortäuschen.

Résumé. D'après les recherches faites au laboratoire et dans l'atmosphère libre, la glace se forme soit à partir de la vapeur d'eau en passant par la condensation préalable, soit directement par cristallisation à partir de la phase liquide. Le processus de cristallisation exige la présence de noyaux de congélation aux propriétés particulières pour s'amorcer; l'action d'un noyau peut s'expliquer par les lois relatives à la croissance orientée d'un cristal sur un autre. S'il existe entre le réseau moléculaire d'un cristal quelconque et le plan de base d'un autre cristal une certaine ressemblance qui d'après Royer se rapporte essentiellement à la distribution géométrique des éléments cristallins des deux plans de contact, alors la première couche moléculaire du cristal secondaire qui est adsorbée sur une face du premier s'oriente suivant le réseau typique de celui-ci. Une autre condition importante est celle de la parfaite mouillabilité du cristal primitif vis-à-vis du nouveau cristal, sans toutefois que le premier risque de se dissoudre; une face fraîchement clivée de mica par exemple présente cette propriété. Mais la surface d'une particule d'aérosol de structure convenable ne présente que peu de

«points actifs» de ce genre. Plus les deux surfaces cristallines mises en présence sont géométriquement semblables, plus la surface du cristal secondaire qui peut être orientée est grande.

La première couche moléculaire orientée du cristal secondaire exerce un effet directeur sur les molécules d'eau du milieu ou sur les molécules déposées par le processus de condensation; ainsi naît un petit cristal de glace. A une température critique déterminée, ce dernier joue le rôle de germe de cristallisation pour toute l'eau disponible. La relation entre la grosseur de ce cristal et sa température efficace peut se calculer par une formule due à J. J. Thomson. Plus le cristal est gros, plus il agit près du point de congélation; cependant il est encore si petit que d'après la loi de Thomson-Gibbs il faut une grande sursaturation pour qu'il se forme directement à partir de la vapeur. Par l'analyse de la similitude géométrique entre la surface de base d'un cristal de glace d'une part et la surface de clivage de mica, la surface de base de iodure d'argent ou d'un cristal de quartz d'autre part, on pouvait calculer la grandeur des surfaces sur lesquelles les molécules d'eau adsorbées peuvent être orientées selon la structure de la surface de base de la glace. On obtenait ainsi la grosseur du germe de glace dont on pouvait calculer la température critique efficace d'après la formule de Thomson.

Ces valeurs calculées sont en bon accord avec les températures de congélation de l'eau sur mica, iodure d'argent et quartz déterminées expérimentalement. Des essais faits avec du mica semblent montrer qu'au voisinage du point de congélation la chaleur de congélation doit pouvoir s'écouler facilement pour mettre en train le processus de cristallisation. La théorie permet d'expliquer les seuils de température de la formation de la glace souvent observés dans les intervalles de $-19°$ à $-24°$, $-30°$ à $-35°$, $-39°$ à $-42°$ et de $-60°$ à $-65°$ C. La condensation capillaire par laquelle une condensation peut se produire sur des noyaux insolubles pour une humidité relative de 90% déjà est de nature à faire croire à la présence d'un noyau de sublimation.

There have been many investigations of the formation of ice but so far a satisfactory explanation of the process of ice formation has not been established either by physicists or by physical chemists (except the basic theories of Ostwald [*1*, p. 6–9] and Volmer [*1*]). Since, at present, the meteorologists seem to be most interested in this problem, they have been forced to find an explanation of their own.

A theory of ice formation was announced by A. Wegener [*2*] about forty years ago. During expeditions in arctic regions he became convinced that just as condensation nuclei are needed in order to start condensation, sublimation nuclei are needed in order to start sublimation. His idea was that particles are suspended in the atmosphere whose crystal structure is so similar to the crystal structure of ice that they initiate the formation of an ice crystal if ice saturation is reached. This type of similarity between two crystals is called "*isomorphism*"; it requires not only very similar lattice dimensions but also very similar lattice forces of both of the crystals. Since the phenomenon of isomorphism was not too well understood at that time, Wegener stated that quartz crystals serve as sublimation nuclei. The fact that the lattice structure of quartz was found to be very similar to that of ice initially supported Wegener's ideas.

For a long time this theory worked very well. Wegener [3] was able to explain the strange forms of cirrus clouds. The occurrence of the first observed vapor trails over an airfield near Munich, Germany, had been explained by A. Schmauss [4] as being due to a lack of sublimation nuclei; this same explanation was given by Kuhlbrodt [5] for the occurrence of balloon-burst-clouds which he observed at altitudes of 16 to 19 km in tropical latitudes during an expedition with the German research Ship "Meteor". Finally, Findeisen [6] used this theory in his scheme of formation of precipitation.

However, along about 1940, and during the following years, both theoretical and experimental investigations threw some doubt on this theory:

a) According to Volmer's theory on phase transition, Krastanow [7] showed, theoretically, that down to very low temperatures in water vapor which does not contain nuclei, the formation of a water droplet is energetically easier than the formation of an ice crystal.

b) Since the theory of isomorphism had advanced considerably since the time A. Wegener presented his theory, it became evident that ice and quartz never would form isomorphous crystals as was understood by Wegener. True isomorphism, between two crystals, requires practically a complete identity not only of the two crystal structures but also of the binding forces and the sizes of the "bricks". Both crystals have to be so closely related geometrically, physically and chemically that they are able to form "mixed crystals". If this is the case then sublimation of the vapor of one crystal occurs at any plane of the other crystal as soon as the vapor is saturated with respect to the solid phase of the first crystal. Consequently the same similarity must be required between ice and a sublimation nucleus. It is quite obvious that quartz and ice will never be able to form mixed crystals since quartz crystals grow at approximately 1000° C and ice at 0° C; therefore quartz will never act as sublimation nucleus.

c) The main experimental result accomplished during these years was that ice crystals did not form at ice saturation, but did form at or near water saturation. In spite of the fact that vapor trails are really ice clouds, H. J. aufm Kampe [8] found that they are formed if the exhaust gases of an airplane contain sufficient water vapor to saturate the surrounding air with respect to water at the temperature of the mixture of exhaust gases and air. E. Wall [9] studied the formation of ice crystals in supercooled radiation fog and concluded that ice formation required water saturation. The author [10] found in experiments on ice formation at temperatures between —35° C and —40° C using a small cold chamber that ice crystals on a dew plate did form at water saturation or even at a slight supersaturation. A few per mille of the number of crystals formed at water saturation was formed at ca. 85% relative humidity. Also Fournier d'Albe [11] emphasizes: "The most striking characteristic of the formation of the ice crystals is the fact that they do not appear until the air is cooled to well below the frost point and to a point

very close to, if not actually below, the dew point." The nuclei required for this process have been called "freezing nuclei" [*9*]. Investigations by the author [*10*] showed that they must be insoluble in water. This has been confirmed by SCHULZ [*12*] who further found that a crystalline structure of the nuclei similar to the structure of ice favors their effectiveness. The discovery of silver iodide as freezing nucleus, by VONNEGUT [*13*]; of cadmium iodide by FOURNIER D'ALBE [*11*]; zinc

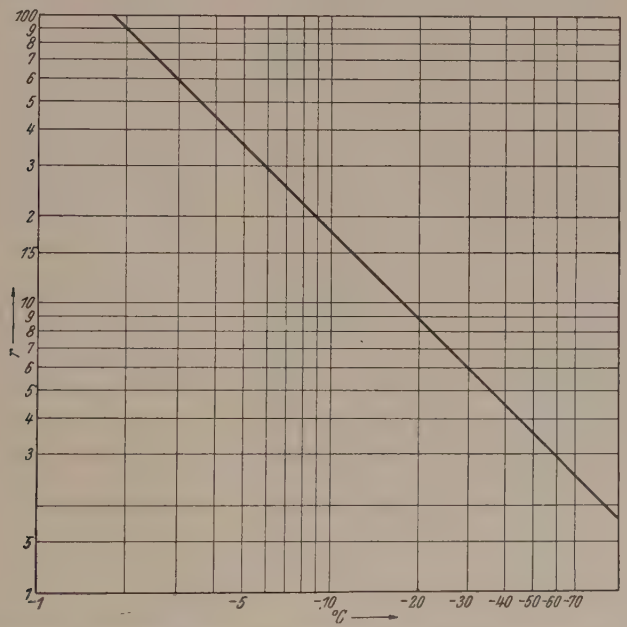


Fig. 1. Critical sizes of stable ice crystals in supercooled water of the temperature -t° C (calculated according to J. J. THOMSON). Abscissa: Temperature in ° C, below freezing. Ordinate: Radius *r* of sphere inscribed in ice crystals in Ångström units.

and cadmium by CWILONG [*14*]; cobalt iodide by AUFM KAMPE and WEICKMANN [*15*] strongly sustained the theory of the importance of the crystal structure of the nucleus, since the crystal structures of all these substances are quite similar to that of ice. The presence of a gas, ozone, did not favor the crystallization process as E. REGENER [*16*] found during experiments in an expansion chamber. During the process of ice formation the nucleus seems to act both as a condensation nucleus in initiating the condensation of H_2O molecules and subsequently (or simultaneously) as a crystallization nucleus in initiating the crystallization of the condensed water (WEICKMANN, [*10*]).

In order to investigate the process of ice formation on freezing nuclei, it may be justified to consider in the following only the crystallization process of water, since the condensation process is well known and has

only the task of forming water. Nevertheless it should be mentioned that the efficiency of a freezing nucleus seems to vary depending on whether it is covered only by a thin film of water (as during the initial stages of the condensation process or during the final stage of the evaporation of a droplet) or whether it is submerged in bulk water (W. Rau, [*17*], note also page 319 of this paper).

It is known that water can easily be supercooled in larger quantities down to —8 and —10° C, that distilled water can be supercooled down to —21° C (as found by Dorsey [*18*]) and that carefully purified distilled water can be supercooled down to —33° C as Meyer and Pfaff [*9*] showed. Cwilong [*20*] observed water suspended in small droplets down to —60 and —65° C. It is evident that purity is essential if water is to be appreciably supercooled.

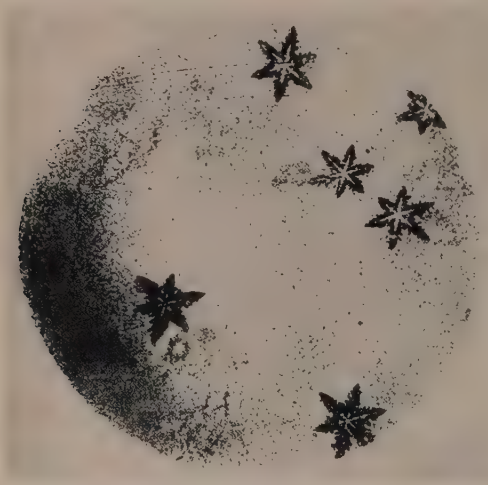


Fig. 2. Ice crystals grown an a mica plane according to Nakaya and associates [*22*].

Theoretically supercooling of water can be understood from a formula given by J. J. Thomson. This formula relates the supercooling of water to the size of a stable ice crystal in water in the same way that the Thomson-Gibbs equation relates the supersaturation of water vapor to the size of a very small droplet. The smaller the droplet the higher the supersaturation of the vapor must be for the droplet to exist; and the smaller the ice crystal the colder the water must be for the crystal to exist. Volmer [*1*, pp. 17, 64] uses Thomson's formula in the following way:

$$\frac{T_s - T_r}{T_s} = \frac{2\,\sigma\,M}{r\,Q_s\,d} \qquad (1)$$

where T_s is 273° K, T_r is the effective fusion temperature of an ice crystal with the radius r, r is the radius of the greatest sphere inscribed in the ice crystal, σ is the interface energy between ice and water, Q_s is the heat of fusion, d is the density of ice and M is the molecular weight. Equation (1) is valid only for small differences $T_s - T_r$. For values of $T_r - T_s$ greater than —10°, the following equation must be used:

$$T_r = T_s\, e^{-\frac{2\,\sigma\,M}{r\,Q\,d}}. \qquad (2)$$

The variation of the interface energy σ and of the heat of fusion Q_s with temperature are assumed to be negligible. In the case of σ, this

assumption is supported by some computations of KRASTANOW [*21*] shown in the following table:

$t°$ Centigrade	0	—10	—20	—30	—40	—50	—60
σ dyn/cm.	10.0	10.2	10.4	10.6	10.8	11.0	11.2

These values, computed in a way suggested by VOLMER [*1*, p. 181] are to be considered only qualitatively correct.

Fig. 1 shows the critical size of stable ice crystals in supercooled water as a function of the temperature of the water, computed using equation (2) above. The curve means that, for instance, an ice crystal having a radius of 8.8 Å is able to crystallize water of the temperature —20° C or colder. At higher temperatures, however, this ice crystal would be dissolved and the water would not freeze. An ice crystal which, at a particular temperature, has a radius at least as great as the value indicated by Fig. 1 will be referred to as an ice "seed".

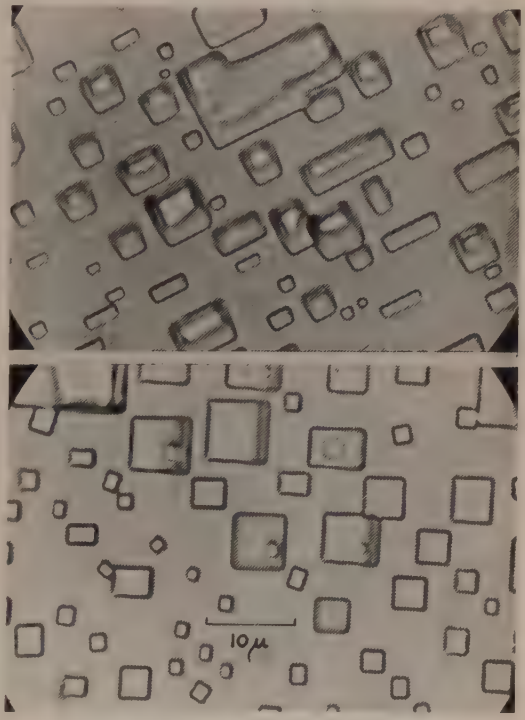


Fig. 3. NaCl crystals grown on a mica plane according to unpublished investigations.

If, by any process, nature is able to create in supercooled water an ice "seed", then the water will freeze; otherwise it remains liquid. Consequently we assume that a freezing nucleus is able to create an ice seed. The most likely process by means of which this is accomplished seems to be the oriented overgrowth of ice on the freezing nucleus (epitaxy).

Illustrations of oriented overgrowth are shown in Fig. 2 and 3. Fig. 2 shows ice crystals which have grown on a fresh-sliced mica plate. This experiment was carried out by NAKAYA and associates [*22*] at —19° C. Notice that all crystals have grown with the hexagonal base plane in contact with the mica plane and that all secondary axes are parallel. Similar results were obtained by the present author by spraying NaCl solution against a fresh-sliced mica plate (see Fig. 3). All NaCl crystals are oriented in the same direction.

This effect was first systematically investigated 1928 by Royer [23]. He found that the distances between the corresponding bricks of the upper layer of the host crystal and the lower layer of the guest crystal must be approximately equal, if the molecules of the guest crystal, after adsorption, are to have their normal lattice spacing. The difference between these distances should not exceed 12% on the average. No other similarity between the lattice structures is required.

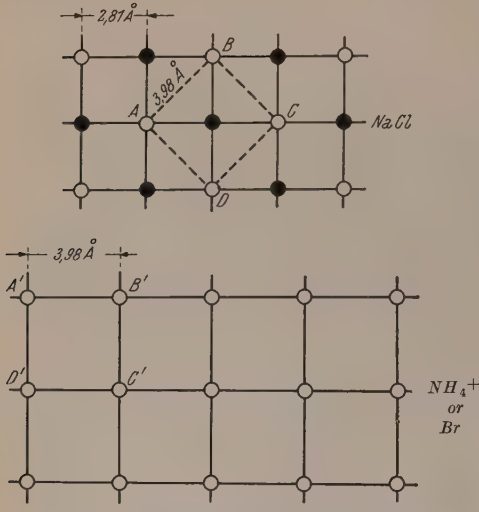


Fig. 4. Oriented overgrowth between NaCl and NH_4Br according to Royer [23].

Fig. 4 shows an example which Royer gave of the oriented overgrowth of NaCl on NH_4^+ or Br^- (ammonium bromide). Under normal conditions no epitaxy between these two crystals can be observed. In special cases, however, it is possible to grow the NH_4Br crystal as a cube and then a plane consisting of only NH_4 or Br ions appears. On such a plane the NaCl-crystal grows in a certain orientation because in planes of both of the crystals there are now identical spacings. The essential process which causes this phenomenon

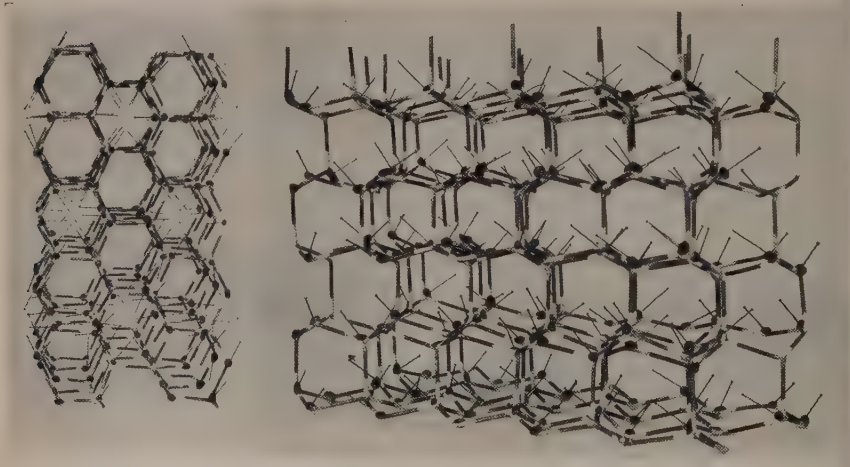


Fig. 5. Lattice structure of an ice crystal. Model made according to Bernal and Fowler [24]. Ice cube 22.5 × 14.7 Å.

is the process of adsorption of the first molecular layer of the guest crystal.

Let us now find the similarities between a mica surface and the base plane of an ice crystal which are responsible for the epitaxy between mica and ice, illustrated in Fig. 2. The crystal structure of ice according to BERNAL and FOWLER [*24*] is shown in Fig. 5. The centers of gravity of

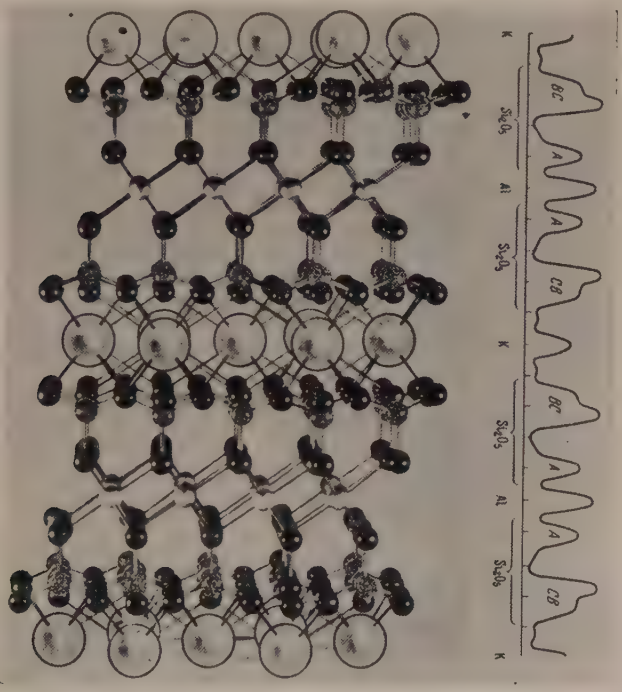


Fig. 6. Scheme of mica structure according to BIJVOET and associates [*28*]: Plates consisting of $(Si, Al)_2O_5$ which are connected at one side by Al^6, at the other by K.

the H_2O molecules are connected by wire. The left side is a view perpendicular to the base plane; the right side perpendicular to a prism plane[1].

Fig. 6 shows a cut through some sheets of mica [*28*, p. 149]. The strongest binding forces occur between Si and O; these molecules are arranged in the form of a tetrahedron. The weakest binding forces occur

[1] The directions indicated by needles are the positive directions of the dipole moment of each molecule. A certain fraction of each dipole moment seems to be oriented in the direction of the main axis which is perpendicular to the base plane. According to L. PAULING [*25*], however, the H ions have considerable freedom in arranging themselves at random around the central oxygen; therefore, the dipole moments are not oriented, thus accounting for the impossibility of getting piezo-electric effects with ice [*26, 27*].

between O and Al, and between O and K. If mica splits then the sheets split in the plane of the K-ions which probably go partly to one side, partly to the other side. As a consequence of this splitting, some binding forces are no longer saturated. These forces favor the adsorption of H_2O molecules.

Fig. 7 shows the similarities between the pattern of the split mica plane and the pattern of the base plane of an ice crystal. Both of the patterns are built from hexagons which, however, are arranged differently. But if we compare some of the corresponding distances we find an almost complete agreement. Between two trigonally arranged oxygen molecules in the mica plane, for instance, the distance is 4.52 Å; between two trigonally arranged H_2O molecules the distance is 4.53 Å. If we cover

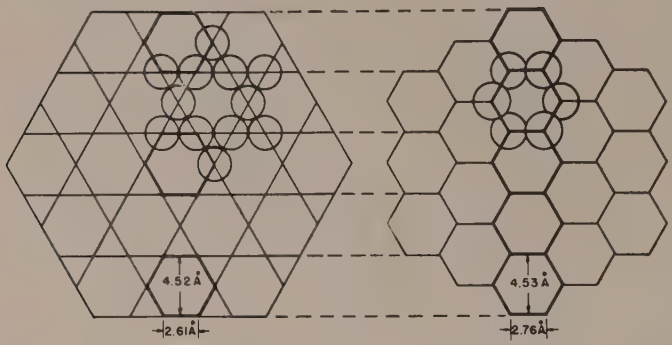


Fig. 7. Lattice structure of a mica plane (left) and of the base plane of an ice crystal (right).

the mica pattern with the base plane pattern of ice, the H_2O molecules can be arranged over a large area in the pattern of an ice crystal. The difference between these distances is much less than the required 12%; it is even less than 1%. Of course the difference accumulates as the oriented area of H_2O molecules increases. It reaches 12% if the oriented area has a radius of 225 Å. This is only an average value—sometimes the area might be still greater, sometimes it might be smaller.

If this area were substituted for an ice crystal plane of the same size, we should expect that sublimation would occur according to the Thomson-Gibbs law at a slight supersaturation with respect to ice. This is not the case. Cwilong [*14*] reports on investigations with fresh-sliced mica plates during which he found that ice formation never occurred at ice saturation, but only after reaching water saturation. This can be explained by a theoretical investigation of Stranski and Krastanow [*29*]; they found that sublimation cannot occur because of the disturbing binding forces of the host crystal which attracts the first molecular layer of the guest crystal but rejects the second, thus requiring a supersaturation for this layer. This holds true even in the case of two crystals which are different only in the binding forces of their "bricks" and not in the geometrical pattern of the lattices.

If water saturation is reached, however, condensation occurs and the condensing molecules are arranged according to the pattern determined by the first adsorbed H_2O molecules. If the number of condensed molecules is sufficiently large to form an ice "seed", crystallization takes place. Since the radius of an ice "seed" on mica has been shown to be about 225 Å, we should expect, according to Fig. 1, that crystallization on a fresh-sliced mica plate would take place at —0.8° C. Experimental results of investigations of freezing of films of water on mica are shown in Fig. 8. When the water was put on the fresh-sliced mica plane in droplet form, it froze only at rather low temperatures. If the water, however, was allowed to form a thin film by breathing on the mica plane, it froze regularly around —5° C on such places where either steps in the mica plane had occurred during the splicing or where the film was just about ready to evaporate. If the plane was strongly ventilated, it was possible to freeze the film regularly at —1° C. This may be caused by the rapid transfer of the heat of fusion.

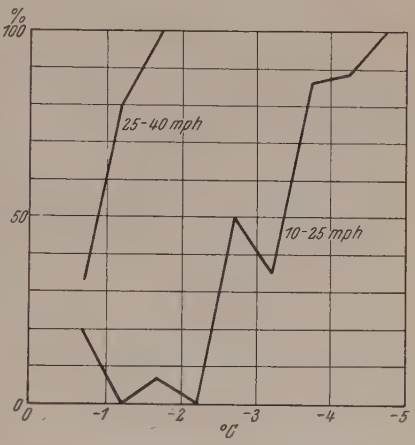


Fig. 8. Crystallization of water on freshly sliced mica as function of the ventilation. Abscissa: Temperature in Centigrade. Ordinate: Ratio of all attempts to the attempts resulting in crystallization.

Similar calculations have been made for AgI and quartz. The lattice structures of both of these crystals bear a closer resemblance to ice than does mica; however, the differences in lattice spacing are greater than in the case of mica. Consequently, the greatest area which can be oriented by AgI has a radius of 41 Å; for quartz this radius is only 18 Å. We would not expect that in these cases these small areas act as sublimation nuclei at ice saturation, since they would require a supersaturation of 34% and 100% respectively. Referring to Fig. 1, however, we would expect crystallization to take place at —4.4° C and —10° C respectively. These temperatures agree satisfactorily with measured threshold temperatures of these materials, shown in Table 1.

It has not as yet been possible to extend this theory to more complicated crystal structures, as for example graphite or cadmium iodide. Perhaps for these cases, Dankow's [*30*] more complete theory of epitaxy is required.

The theory of ice formation discussed above also accounts for the critical temperatures which have been observed by many investigators. These critical temperatures are either minimum temperatures to which water can be supercooled or threshold temperatures marking a sudden increase of the ice crystal number. There are one or two between —19

Table 1. *Threshold Temperatures ° C of Different Freezing Nuclei.*

Material	Calculated	Measured (Average)	Investigators
Mica.....	— 0.8	— 1.0	Weickmann (see Fig. 8, p. 319)
AgI	— 4.3	— 4.0	Vonnegut [13]
		— 2.9	Cwilong [35]
		— 4.5	aufm Kampe and Weickmann [15]
Quartz ...	— 9.8	— 10.2	Tammann and Buechner [37]
Tridymit..	— 9.8	— 10.5	Schulz [12]

to —24° C as Rau [17], Dorsey [18], Meyer and Pfaff [19] found; another one at —30 to —33° C as Findeisen and Schulz [31], Fournier d'Albe [11], Cwilong [20], Meyer and Pfaff [19] found; a third between —38 and —41° C as Schaefer [32], Cwilong [20] and Fournier d'Albe [11] found. Finally Cwilong's investigations [20] indicate that a fourth threshold seems to exist between —60 and —65° C. It has been suggested that these temperatures may be threshold temperatures of different kinds of freezing nuclei [33]. However, it now appears that a more fundamental process is involved in the formation of the ice "seed". The size of an ice "seed" can be expressed either by the radius of the inscribed sphere or, for a certain size of the base plane of the seed (determined by the process of epitaxy), by the number of base planes accumulated one over the other. (The ice lattice model of Fig. 5 for example consists of 5 base plane layers.) Since the distance between two layers according to Barnes' [34] analysis of the ice lattice amounts to 2.455 Å, the number of base plane layers necessary to make an ice seed can be calculated. At —1.4° C, 100 layers are required, 50 at —2.9, 10 at —14.2, 5 at —28.6 and 2 at —71° C. Thus, if the thickness of an ice seed is decreased by one layer, the corresponding decrease in effective temperature is small when there are many layers in the seed, but the decrease is quite marked when there are only a few layers as is the case at lower temperatures. [This can be verified by differentiation of equation (2) above.] Table 2 gives,

Table 2. *Explanation of Measured Threshold Temperatures in the Process of Ice Formation.*

Thickness of Ice Crystal		Critical Temperatures		
Molecule Layers	Ångström Units	Calculated acc. to Equation (2) $\sigma \simeq 10.8 \frac{\text{dyn.}}{\text{cm}}$	Calculated acc. to Equation (2) but $\sigma \simeq 9.2 \frac{\text{dyn.}}{\text{cm}}$	Measured
6	14.7	— 24.5° C	— 20.5° C	— 21 to — 24° C
5	12.3	— 28.0° C	— 24.0° C	— 21 „ — 24° C
4	9.8	— 36.0° C	— 30.5° C	— 30 „ — 33° C
3	7.4	— 47.5° C	— 40.0° C	— 39 „ — 42° C
2	4.9	— 70.0° C	— 60.0° C	— 60 „ — 65° C

in column 2, the thickness of an ice seed consisting of the layers listed in column 1. The third column gives the corresponding critical temperatures taken from Fig. 1. (Note that Fig. 1 should be entered with a value of r which is half the crystal thickness.) If the curve of Fig. 1 is shifted by an amount corresponding to a 15% decrease in interface energy, critical temperatures shown in column 4 are obtained. These temperatures are in surprisingly good agreement with the measured critical temperatures of crystal formation listed in column 5.

The energy E required for the formation of such an ice seed can be expressed according to GIBBS-VOLMER by the equation:

$$E = \frac{w r^2 \sigma}{3}, \tag{3}$$

where w is a geometrical factor due to the form of the ice seed, r the radius of the inscribed sphere and σ the interface energy. Since r decreases stepwise at certain temperatures, as explained above, this energy likewise decreases stepwise at the same temperatures. Since with decreasing energy E, the probability of ice formation increases as shown by VOLMER, it can be expected that the number of formed crystals in the unit volume will increase stepwise at these temperatures.

The theory of ice formation presented above seems to permit crystal formation only at water saturation. It is, however, known that ice formation occurs also between the frost-point and the dew-point, sometimes even nearer to the frost-point. This happens, for instance, with AgI as CWILONG [*35*] found. It can be explained without resurrection of the sublimation nucleus theory. This effect can be the consequence of capillary condensation, which is caused by irregularities such as steps, holes and grooves in the surface of the host crystal. These lattice mistakes affect the process of adsorption near the dew-point. Since the vapor pressure increases according to the THOMSON-GIBBS law over a convex curved surface, it decreases over a concave surface. According to EUCKEN [*36*, p. 1232] within a cavity of 100 Å radius, condensation can occur even at 90% relative humidity. If we have, therefore, an AgI crystal at —10° C with such a cavity, this crystal would start ice formation exactly at the frost-point—thus giving the impression of being a sublimation nucleus! CWILONG's findings [*14*] on sublimation of water vapor on freshly deposited cadmium and zinc crystals can be explained in the same way.

This theory does not postulate an entirely new process of ice formation but presents only a better understanding of a process which was presumed by A. WEGENER. Still, quartz particles will be very important in the crystal formation, especially in the vicinity of —10° C. The lower the temperature drops, the less critical are the requirements for the formation of such an ice seed. We therefore understand, that the number of effective freezing nuclei in the atmosphere increases strongly with decreasing temperatures.

Acknowledgement.

The writer wishes to thank Dr. C. J. Brasefield, Chief, Atmospheric Physics Section, Signal Corps Engineering Laboratories for his participation in the very stimulating discussions related to this work and for his editorial help.

References.

1. Volmer, M.: Kinetik der Phasenbildung. Dresden und Leipzig, Theodor Steinkopff, 1939.
2. Wegener, A.: Thermodynamik der Atmosphäre. Leipzig, F. A. Barth. 1911.
3. — Frostübersättigung und Cirren. Meteorol. Z. **37**, 8 (1920).
4. Schmauss, A.: Bildung einer Cirruswolke durch einen Flieger. Meteorol. Z. **36**, 265 (1919).
5. Kuhlbrodt, E.: Gerlands Beitr. Geophys. **34**, 9 (1931).
6. Findeisen, W.: Die kolloidmeteorologischen Vorgänge bei der Niederschlagsbildung. Meteorol. Z. **55**, 121 (1938).
7. Krastanow, L.: Über die Bildung der unterkühlten Wassertropfen und der Eiskristalle in der freien Atmosphäre. Meteorol. Z. **57**, 357 (1940).
8. aufm Kampe, H. J.: Kondensation und Sublimation in der oberen Troposphäre. Zentrale wiss. Berichtswesen, Forschungsber. Nr. 1491. Berlin-Adlershof, 1—59 (1942).
9. Wall, E.: Material zur Frage der Eiskeimbildung in der Atmosphäre. Meteorol. Z. **59**, 109 (1942).
10. Weickmann, H.: Experimentelle Untersuchungen zur Bildung von Eis und Wasser an Keimen bei tiefen Temperaturen und ihre Folgerungen bezüglich des Wachstums der atmosphärischen Eiskristalle. Zentrale wiss. Berichtswesen, Forschungsber. 1730 (1942) (Translation edited by Dr. Charles F. Brooks 1946, Blue Hill Obs., Harvard University, Milton, Mass.).
11. Fournier d'Albe, E. M.: Some Experiments on the Condensation of Water Vapour at Temperatures below 0° C. Quart. J. Roy. Met. Soc. **75**, 1—14 (1949).
12. Schulz, G.: Der Einfluß von Fremdkörpern auf die Unterkühlungsfähigkeit des Wassers. Meteorol. Rundschau **1**, 237 (1948).
13. Vonnegut, B.: The Nucleation of Ice Formation by Silver Iodide. J. appl. Physics **18**, 593 (1947).
14. Cwilong, B. M.: Observations on the Incidence of Supercooled Water in Expansion Chambers and on Cooled Solid Surfaces. J. Glaciology **1**, 53—57 (1947).
15. aufm Kampe, H. J. and H. Weickmann: The Effectiveness of Natural and Artificial Aerosols as Freezing Nuclei (to be published).
16. Regener, E.: Versuche über die Kondensation und Sublimation des Wasserdampfes bei tiefer Temperatur. Schr. Deutsch. Akad. Luftfahrtforschg. **37** (1941).
17. Rau, W.: Gefriervorgänge des Wassers bei tiefen Temperaturen. Schr. Deutsch. Akad. Luftfahrtforschg. **8**, 65 (1944).
18. Dorsey, N. E.: Supercooling and Freezing of Water. J. Res. Nat. Bur. Stand. **20**, 799 (1938).
19. Meyer, J. and W. Pfaff: Zur Kenntnis der Kristallisation von Schmelzen III. Z. anorg. allg. Chem. **224**, 305 (1935).

20. Cwilong, B. M.: Sublimation in a Wilson Chamber. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. *A* **190**, 137 (1947).
21. Krastanow, L.: Beitrag zur Theorie der Tropfen- und Kristallbildung in der Atmosphäre. Meteorol. Z. **58**, 37 (1941).
22. Nakaya, U., M. Hanazima and K. Dezuno: Experimental Researches on Window Hoar Crystals, a General Survey. J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ., Ser. II. Physics, Vol. **III**, 1 (1939).
23. Royer, L.: Recherches expérimentales sur l'épitaxie ou orientation mutuelle des cristaux d'espèces différentes. Bull. Soc. franc. Minéral. **51**, 7 (1928).
24. Bernal, I. D. and R. H. Fowler: Theory of Water and Ionic Solutions, with Particular Reference to H and OH ions. J. chem. Physics **1**, 515 (1933).
25. Pauling, L.: The Structure and Entropy of Ice and of Other Crystals with some Randomness of Atomic Arrangement. J. Amer. chem. Soc. **LVII**, 2680 (1935).
26. Hettich, H. and A. Schleede: Beiträge zur Methodik der Kristallklassenbestimmung. Z. Physik **50**, 249 (1928).
27. — and A. Steinmetz: Piezoelektrische Versuche nach der Methode von Giebe und Scheibe. Z. Physik **76**, 688 (1932).
28. Bijvoet, F. M. and associates: Röntgenanalyse von Kristallen. Berlin, Springer-Verlag, 1940.
29. Stranski, I. N. und L. Krastanow: Zur Theorie der orientierten Ausscheidung von Ionenkristallen aufeinander. Ber. Akad. Wiss. Wien, Abt. II*b*, **146**, 797 (1938).
30. Dankow, P.: Szw. Sekt. Phys. Chem. Anal. Acad. Sci. U. S. S. R. **16**, 82 (1943). Quoted on page 258 in: J. J. Bikerman: Surface Chemistry. New York, Academic Press Inc. 1948.
31. Findeisen, W. and C. Schulz: Experimentelle Untersuchungen über die atmosphärische Eisteilchenbildung I. Forschungs- und Erfahrungsberichte des Reichswetterdienstes A, Nr. 27 (1944), reprinted in: Ber. Deutsch. Wetterd. U. S.-Zone, Nr. 1, 38 (1947).
32. Schaefer, V. J.: The Production of Ice Crystals in a Cloud of Supercooled Water Droplets. Science **104**, 457 (1946).
33. Weickmann, H.: Die Eisphase in der Atmosphäre. Ber. Deutsch. Wetterd. U. S.-Zone, Nr. 6 (1949).
34. Barnes, W. H.: Crystal Structure of Ice Between 0° C and —183° C. Proc. Roy. Soc. (London) **125**, 670 (1929).
35. Cwilong, B. M.: Sublimation in Outdoor Air and Seeded Sublimation. Nature **163**, 727 (1949).
36. Eucken, A.: Lehrbuch der chemischen Physik. Vol. II, Leipzig, Akad. Verlagsges. 1944.
37. Tammann, G. and A. Büchner: Die Unterkühlungsfähigkeit des Wassers und die lineare Kristallisationsgeschwindigkeit des Eises in wäßrigen Lösungen. Z. anorg. allg. Chem. **222**, 371 (1935).

551.501.45

(Harvard University.)

A Method of Estimating the Periodic Constituent of a Geophysical Series.

By

V. Conrad.

With 4 Figures.

Summary. Small temperature variations of hot springs, having an apparent period length of one year, had to be examined as to their reality. A method was introduced by which the periodic constituent of a series could be determined that consisted of twelve numerical values and was prevalently subject to an oscillation of the length of a whole year. The periodic component, surprisingly, proved to be quasi-constant for series of various geophysical elements with an undoubtedly real annual (daily) variation. The average periodic portion of the annual (daily) variation of twelve different geophysical elements amounted to 69% ± 2.5%.

Only one element has thus far been found, variations of which had a much greater periodic constituent, viz. the annual temperature variation at places with a high continentality; there, the average periodic part was 91% ± 1.8%. Thus, a gap of 22% exists between these two cluster-points of periodic constituents.

The method, applied to the annual temperature variations of nine hot springs, leads to a division of the springs into two groups. One group with a periodic constituent *below* 60% (average = 44%), the other group with a periodic constituent *above* 60% (average 69%). A comparison with the real variation of other geophysical elements indicates that the latter group shows a real annual variation of temperature, the former does not. Since the average temperatures of the springs are known from another geophysical investigation, it can be stated that the average temperature of the group with a large periodic component is, on the average, 10° F cooler than that of the other. The group with a *real* annual temperature variation has a higher source level. These geophysical relations were revealed by the present method.

Zusammenfassung. Kleine Temperaturvariationen heißer Quellen von der anscheinenden Länge eines Jahres sollten auf ihre Realität geprüft werden. Es wurde eine Methode benutzt, die erlaubte, den periodischen Gehalt von Reihen zu berechnen, die aus den Zahlenwerten von zwölf äquidistanten Ordinaten bestehen und vorzüglich einer Ganzjahresschwankung

unterworfen sind. Diese Methode, angewendet auf verschiedene geophysikalische Reihen mit zweifellos realem Jahres- (Tages-) Gang, zeigte überraschenderweise, daß der periodische Gehalt dieser geophysikalischen Reihen *quasi-konstant* zu sein scheint. Der mittlere periodische Gehalt der Jahres- (Tages-) Schwankung von zwölf verschiedenen geophysikalischen Elementen war 69% ± 2,5%. Nur *ein* Element konnte bisher gefunden werden, dessen periodischer Gehalt bedeutend größer war, und zwar der *Jahresgang der Temperatur* an kontinental gelegenen Orten. Sein periodischer Gehalt beträgt 91% ± 1,8%. Zwischen den beiden Häufungsstellen des periodischen Gehaltes existiert so eine Lücke von 22%.

Wenn man die Methode auf den Jahresgang der Temperaturen von neun heißen Quellen anwendet, kommt man zu einer Einteilung der Quellen in zwei Gruppen. Die eine hatte einen periodischen Gehalt *unter* 60% (Mittel = = 44%), die andere einen *über* 60% (Mittel 69%). Der Vergleich mit den realen Gängen anderer geophysikalischer Elemente führte zu der Feststellung, daß die letztere Gruppe einen *realen* Temperaturgang aufweist, was bei der ersteren Gruppe *nicht* der Fall ist.

Aus einer anderen geophysikalischen Untersuchung sind die mittleren Temperaturen der Quellen bekannt. So kann nun festgestellt werden, daß die Gruppe mit hohem periodischem Gehalt im Mittel um 10° F kühler ist als die andere. Die Gruppe mit *reeller* Jahresschwankung der Temperatur hat ein höheres Quellniveau. Diese geophysikalischen Beziehungen konnten durch die dargelegte Methode aufgedeckt werden.

Résumé. Il s'agissait de prouver la réalité de faibles variations de température de sources chaudes, variations à période apparemment annuelle. On a utilisé une méthode permettant de calculer la part périodique de séries obtenues à partir de valeurs numériques de 12 ordonnées équidistantes et présentant particulièrement une période annuelle. Cette méthode appliquée à différentes séries d'observations géophysiques à périodicité indiscutable (annuelle ou diurne) a révélé d'une façon surprenante que la part périodique de ces séries semble être *quasi-constante*. La part périodique moyenne de la variation annuelle (ou diurne) de 12 grandeurs géophysiques différentes était de 69% ± 2,5%. On n'a trouvé qu'un seul élément dont la part périodique était nettement plus grande, savoir *la marche annuelle de la température* de lieux à situation continentale; la part périodique était dans ce cas de 91% ± 1,8%. Entre les deux points de fréquence maximum de la part périodique il y a donc un intervalle de 22%.

Appliquant la méthode à la marche annuelle de la température de 9 sources chaudes, on aboutit à un classement de ces sources en deux groupes. L'un présente une part périodique *inférieure* à 60% (moyenne 44%), l'autre *supérieure* à 60% (moyenne 69%). La comparaison avec la marche réelle d'autres grandeurs a conduit à la conclusion que le dernier groupe présente une variation de température *réelle*, ce qui n'est pas le cas pour le premier. Grâce à une autre recherche géophysique, on connaît les températures moyennes des sources. On peut donc constater que le groupe dont la part périodique est grande est en moyenne de 10° F plus froide que l'autre. Le groupe à variation annuelle *réelle* de la température présente un niveau de source plus élevé. La méthode exposée a permis de découvrir ces relations géophysiques.

A study of the physical features of deep-seated springs, surprisingly, showed variations of their temperatures with a period of an apparent

length of a year. As interesting and important as this result was, it appeared doubtful from the geophysical point of view, because of the great depth of the source level of the springs, and, from the statistical point of view, because of the small amplitudes of the variations.

An attempt has been made to find a criterion that would enable us to decide whether the variation of the temperatures in question were real or were produced by random fluctuations. The application of a criterion such as that of Sir Arthur Schuster, based on his concept of the "expectancy"[1], was not feasible for various reasons. Therefore, a new method had to be sought that permitted a quantitative comparison of the surmised annual variation with variations of other geophysical phenomena subject to an unquestionably real variation of the length of one year. The comparability of the various series is based on the evaluation of their respective periodic constituent. Here, the *special* problem of series consisting of the *values of twelve equidistant ordinates with* an oscillation of the *full length of the period* (12 months or 12 double-hours) is considered exclusively. Cases, in which waves with a length of a fraction of the entire period evidently prevail, cannot be treated by the method described in the following pages. These restrictions are of importance.

Two extreme alternatives exist. A series can consist either of random numbers or of numbers influenced in a systematical way.

The criterion of E. ABBE distinguishes between these two cases, and may be taken as a starting point for the following considerations.

Let the series of *deviations* read:

$$e_1,\ e_2,\ \ldots\ldots\ e_n.$$

From this series two others may be derived:

$$A = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \quad (1) \qquad B = \sum_{i=1}^{n} (e_i - e_{i+1})^2. \quad (2)$$

If the original series is considered as cyclic, so that the term e_1 again follows e_n, the last term of the series B is $(e_n - e_1)^2$. Then, the number of terms of the series B equals that of A.

We write B now in the form:

$$B = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 + \sum_{i=1}^{n} e_{i+1}^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} e_i\, e_{i+1}$$

where

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} e_{i+1}^2$$

because $e_1 = e_{n+1}$.

[1] See f. i.: CONRAD V. and L. W. POLLAK: Methods in Climatology etc. 2nd ed. Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass. 1950; BAUR, F.: Periodogramm Analysis in F. LINKE, Meteorologisches Taschenbuch, Leipzig 1939.

The most probable value of S, when

$$S = e_1 e_2 + e_2 e_3 + \ldots e_{n-1} e_n + e_n e_1.$$

is zero if the deviations are random numbers and n is large.

In actual cases, S deviates from zero according to the number of items of the series. Finally, ABBE's criterion reads:

$$\frac{2A}{B} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$$

where n equals the number of deviations.

"If S differs significantly from the value given by the above standard deviation, there is good a reason for the assumption that the deviations e_i are not random numbers but systematically influenced[1]."

On the other hand, the criterion is a necessary but not a sufficient one. Two examples may illustrate this fact:

Example 1: A period may exist of the length four times the interval between individual observations:

$e_1 = 0$	$e_5 = 0$	$e_9 = 0$
$e_2 = +a$	$e_6 = +a$	.....
$e_3 = 0$	$e_7 = 0$	.....
$e_4 = -a$	$e_8 = -a$	.....

Obviously, $S = e_1 e_2 + e_2 e_3 + \ldots = 0$
and

$$\frac{2A}{B} = 1.$$

The criterion is exactly fulfilled, although the deviations represent a pure periodic series.

Example 2: Given a linearly increasing function and $n = 5$. The deviations might be:

$$e_1 = -2,\ e_2 = -1,\ e_3 = 0,\ e_4 = +1,\ e_5 = +2.$$

In the series of this example, which, if iterated, represents a sawlike curve, S would again equal zero and $2A/B = 1$. Both series consist of numbers arranged systematically and, nevertheless, ABBE's criterion is fulfilled.

These examples show that it is possible to find series arranged in a fully systematical manner, for which ABBE's criterion fails absolutely. Therefore, one must be cautious and critical, especially when expanding the usual application of the criterion. Despite this difficulty it seemed promising to examine ABBE's criterion empirically regarding its reaction to series with a periodic constituent of various magnitudes.

A) For this purpose, the criterion was slightly modified. The new form can be written:

$$\frac{2A}{B} - 1 = \frac{k}{\sqrt{n}}.$$

[1] STUMPFF, K.: Analyse periodischer Vorgänge, Berlin 1927, p. 9 (translation).

If $k \leq 1$, the criterion is fulfilled. If $k > 1$, a systematical influence could be suspected. This modification seems to be useful for the present problem.

B) Series of a certain periodic constituent should be constructed. There are two extreme alternatives:

1. Series with no periodic constituent consisting of random numbers.
2. Series satisfying a purely periodic function, e. g., a sine function.

Transition series with various periodic portions can be calculated from a combination of a series with zero periodic component and one in which the periodic constituent amounts to 100%.

If A_r is a series with ξr parts of periodic constituent and $(1 - \xi r)$ random constituent, where r is an integral number and ξ a decimal fraction, and if R is the random series, and P is the series of full periodic character, the transition series A_r can be calculated by means of the mixing rule:

$$A_r = R\,(1 - r\,\xi) + r\,\xi\,P.$$

If we put $\xi = 0.1$ and $r = 0, 1, 2, 3, \ldots, 10$, nine transition series can be inserted between R and P. If we put $\xi = 0.05$ and $r = 0, 1, 2, \ldots$ 20, nineteen transition series result between R and P, etc.

As mentioned above, in the subsequent investigation, *series of twelve numbers* are exclusively considered according to the specific aim of this study, as outlined in the introduction.

Twelve numbers representing the fully periodic series P are calculated from the equation:

$$P = 100\,\sin^2\,(i - 1)\,15°;\; i = 1,\; 2,\; \ldots,\; 12.$$

The twelve random numbers of R are taken from a collection of random numbers[2]. Finally the sum of the numbers of P must be equalized to that of the R-numbers. The terms of the P-series, are multiplied for this purpose by the ratio: sum of R over the sum of P. Thus, the amplitudes of the resulting series are made comparable.

As previously mentioned; the R-series consisting of twelve random numbers has zero per cent periodic constituent, whereas the all-periodic P-series has 100 per cent. By means of the mixing rule, transition series can be calculated with $\xi = 0.1$, so that, e. g. $A_{(r=1)}$ is a series consisting of 90% random and 10% periodic constituent.

Thus, series of a defined periodic constituent are computed by a very simple method. Figure 1 shows a set of eleven series; on the top, the R-series is represented, then nine A_r-series, and the all-periodic P-series at the bottom.

From each of the eleven series the factor k_r is calculated with the equation[3]:

---

[2] Tippett, L. H. K.: Random Sampling Numbers, Tracts for computers, ed. by K. Pearson. Cambridge Univ. Press. London 1927, Plate 16.

[3] It would not be difficult to proceed from the factor k_r to the autocorrelation coefficient of the respective function.

$$k_r = \sqrt{n}\left(\frac{2A}{B} - 1\right)$$

where r varies from $r = 0$ to $r = 10$.

The factor k_r increases steadily with increase in the periodic constituent of the series. A smooth curve results (Fig. 2) with one, well understandable, inflection point. This curve originates from the set of series shown in Fig. 1 and is subsequently referred to as k(I)-*curve*.

It was doubtful whether or not a k-curve calculated from a set of series based on a different random series would show an identical type. In order to answer this question, ten sets of series (I to X) were constructed. Each set was

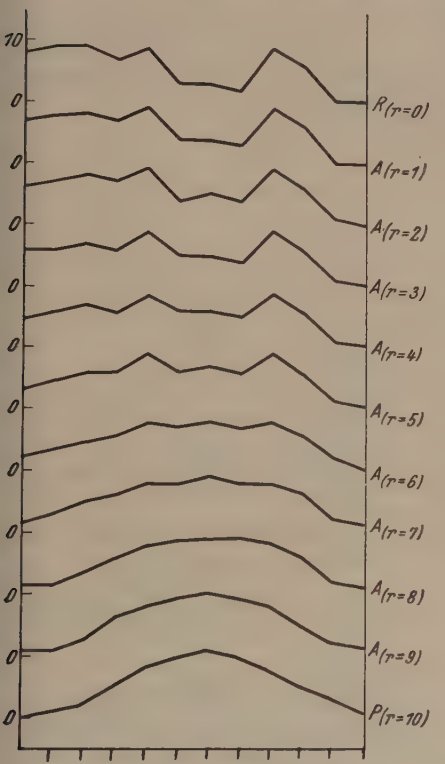


Fig. 1. Transforming a random series *(R)* into an all-periodic series *(P)*.

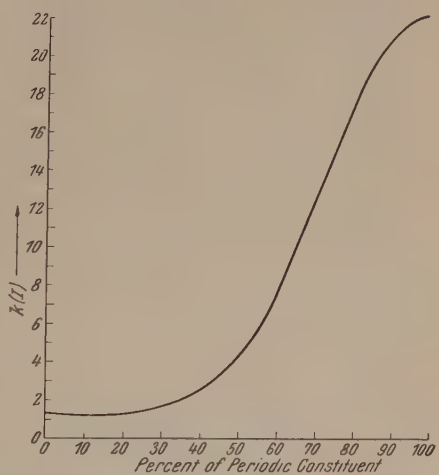


Fig. 2. k-values from one set of series, starting from the random series R_1. Example for a k-curve.

started from an individual random series of twelve numbers ($r = 0$) which was then transformed into the all-periodic series deduced from the sine function.

From the ten different sets of eleven series each, the factors $k_{(r=0)}$ (I), $k_{(r=1)}$ (I), ..., $k_{(r=10)}$ (I), were computed from the first set, the factors $k_{(r=0)}$ (II), $k_{(r=1)}$ (II), ..., $k_{(r=10)}$ (II) from the second set, etc. Ten k-curves were drawn, and the following results deduced:

a) In view of the great frequency with which ABBE's criterion is used in geophysics and, especially, in geodesy, we begin with a secondary result of the investigation of the 10 series. The first series of each set

consists of twelve random numbers to which ABBE's criterion was applied. Since these random numbers are free of any systematic influence according to their definition, the criterion should be precisely satisfied; this means that in the present case of twelve numbers

$$0.71 \leqq \frac{2A}{B} \leqq 1.29.$$

In reality, the scattering of the ratio $2A/B$ is rather great, and six out of ten ratios lie outside of the theoretical limits. Even though the deviations from the limits are insignificant, these data are valuable for a correct appraisal of the results from ABBE's criterion.

Table 1. *Quantities of $2A/B$ for ten random series.*

Set No.	I	II	III	IV	V
$2A/B$	1.38	0.85	0.94	0.89	0.68
Set No.	VI	VII	VIII	IX	X
$2A/B$	1.30	0.67	1.30	0.69	0.99

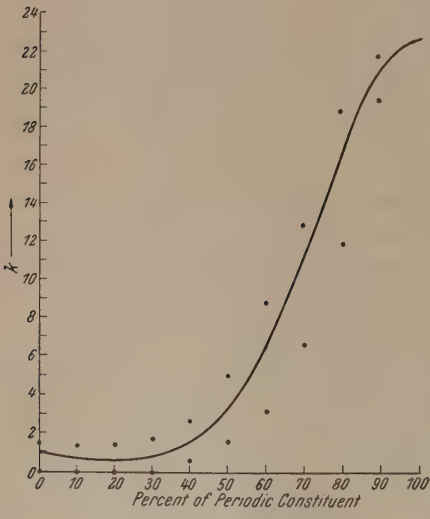


Fig. 3. Standard $\bar{k}$-curve.

An average k-curve starts, therefore, at zero per cent periodic constituent with

$$\bar{k}\begin{Bmatrix} \text{rand.} = 100\% \\ \text{period.} = 0\% \end{Bmatrix} = 0.97.$$

At 100 per cent periodic constituent, the constant value

$$\bar{k}\begin{Bmatrix} \text{rand.} = 0\% \\ \text{period.} = 100\% \end{Bmatrix} = 22.39$$

is reached.

b) All of the ten k-curves are, without exception, of one and the same type as was described earlier, so that, as far as the shapes of the curves are concerned, chance can be considered excluded. There appears to be no reason why the ten k-curves could not be combined to an average *standard curve* that is represented in Fig. 3. Table 2 shows the values of $\bar{k}$ for 0,10, .., 100 per cent periodic constituent of the series. These values were used for drawing the standard curve in Fig. 3.

The dots above the standard $\bar{k}$-curve in Fig. 3 give the absolute maxima of k, the dots below the curve the absolute minima of the ten sets of the series: The range of the extremes of k reaches its maximum at about $\bar{k} = 11$.

Table 2. *Values of $\bar{k}$ for $r = 0, 1, 2 \ldots 10$ and $\xi = 0{,}1$ rounded off to two decimals.*

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{k}$	0.97	0.70	0.58	0.71	1.52	3.33	6.46	11.12	16.53	20.90	22.39

With regard to the scattering of k, the accuracy in determining the periodic constituent is about $\pm 8\%$ between $\bar{k} = 3$ and $\bar{k} = 17$.

Table 3. *Application of the $\bar{k}$-curve to the analysis of the variations of various geophysical elements.*

No.	Geophysical Element	$\bar{k}$	Periodic Part %	Aperiodic Part %
1	Annual frequency variation of earthquakes in the Eastern Alps	9.5	67	33
2	Average daily variation of the atmospheric electric potential gradient above the Pacifc Ocean	12.4	72	28
3	Daily variation of the atmospheric potential gradient on Mt. Sonnblick, East Alps (47° N, 13° E, 10200 ft.)	10.0	67	33
4	Daily variation of the total intensity of terrestrial magnetism at Potsdam, Germany, July (52° N, 13° E)	9.6	67	33
5	Annual variations of air temperature at San Francisco, California (low continentality) (38° N, 122° W)	9.8	67	33
6	The same for Fernando Noronha (4° S, 32° W) (very low continentality)	9.3	67	33
7	Annual variation of the surface temperature of the Atlantic Ocean between 10° N and 10° S..	10.4	69	31
8	Annual variation of gale frequency on Mount Washington, N. H. (44° N, 71° W)	12.0	72	28
9	Annual variation of the relative duration of sunshine (percent) at an average elevation of 1000 ft. in a mountainous country	14.1	75	25
10	Annual variation of atmospheric potential gradient at Davos, Switzerland (47° N, 10° E)..	12.7	73	27
11	Annual variation of average monthly means of air pressure for Central Europe	10.1	68	32
12	Annual variation of air pressure on Sonnblick 1935	9.0	66	34
13	Annual variation of air temperature at Chicago, Ill. (42° N, 88° W)	21.2	91	9
14	The same for Verkhoyansk, Siberia (68° N, 133° E)	21.6	93	7
15	The same for Port Nelson, Hudson Bay (57° N, 93° W)	21.1	90	10
16	The same for Williston, N. D. (48° N, 104° W)....	21.6	93	7
17	The same for Bismarck, N. D. (47° N, 101° W)..	20.3	88	12
18	The same for Yakutsk, Siberia (62° N, 130° E)..	21.8	94	6

The Periodic Constituent of Annual (Diurnal) Variations of Various Geophysical Elements.

By means of the $\bar{k}$-curve, variations of geophysical elements were examined as far as the respective variation could be characterized by twelve numbers, and a prevailing whole-year or whole-day oscillation could be assumed; the annual variation is given by twelve monthly averages, the daily by twelve two-hourly values.

Table 3 contains 18 examples of annual and daily variations of various geophysical elements mentioned in the second column. Col. 3 gives the values of $\bar{k}$; Col. 4 contains the per cent of periodic constituent. Col. 5 the percentage of aperiodic disturbances. Corresponding values of $\bar{k}$ and the periodic constituent in per cent can be taken from the numerical Table 4 which represents the standard $\bar{k}$-curve. The graph in Fig. 4 shows the distribution of the percentages of the periodic constituent of eighteen different geophysical series along the standard $\bar{k}$-curve. Although the variations of these series fulfil the conditions mentioned above, they are of quite diverse character. Some of these series are derived from a few years' records and one (Table 3 no. 12) from one year observations. Except No. 4 (Table 3), the average daily variations originate from short observational periods. In conformity with the assumption, each of the curves representing the various series consists of a periodic wave with superimposed random disturbances. The ratio of mixing of the two effects can be estimated from the standard $\bar{k}$-curve. In view of the entirely different geophysical nature of the series (atmospheric electric potential gradient, total intensity of terrestrial magnetism, air temperature, earthquake frequency, etc.) one would expect that the amount of periodic constituent would be more or less evenly distributed over the upper half of the standard $\bar{k}$-curve.

References to the sources from which the numerical series of Table 3 are taken:

1. Conrad, V.: Die zeitliche Verteilung der in den österreichischen Alpen- und Karstländern in den Jahren 1887 bis 1907 gefühlten Erdbeben pt. I. Mittl. Erdbeben-Kommission Akad. Wiss. Wien. Neue Folge Nr. 36, 1909.
2. Benndorf, H.: Atmosphärische Elektrizität, Hdbch. d. Experimentalphysik. Geophysik I, Leipzig 1928. [The numbers are taken from the graph (Fig. 1)], p. 285.
3. Conrad, V. und F. M. Exner: Registrierungen des luftelektrischen Potentials auf dem Sonnblick. Beiträge z. Kenntnis d. atmosph. Elektrizität Nr. 12. Wien. Ber. vol. 112 (1903), p. 413.
4. Nippoldt, A.: Erdmagnetismus. Müller-Pouillet, Lehrb. d. Physik, 11th ed. vol. V (first half), ed. A. Wegener, Braunschweig 1928, p. 458.
5. Brooks C. F. and R. DeC. Ward: The Climate of North America. Köppen-Geiger, Hdbch. d. Klimatologie, vol. II J, Berlin 1936, p. 226.
6. Knoch, K.: Klimakunde von Südamerika, Köppen-Geiger, Hdbch. d. Klimatologie, vol. II G, Berlin 1930, p. 261.

7. Defant A.: Physik des Meeres. Hdbch. d. Experimentalphysik; Geophysik II, vol. 25, pt. II, Leipzig 1931, p. 603.
8. Mt. Washington News Bulletin, Nos. 1—18.
9. Conrad, V.: Anomalien und Isanomalen der Sonnenscheindauer in den österreichischen Alpen. Jahrb. d. Zentralanstalt f. Meteor. Wien. Beiheft z. Jahrb. 1932, Wien 1938.
10. Hann-Süring: Lehrb. d. Meteorologie. 4th ed. Leipzig 1926, p. 755 (numbers given by C. Dorno).
11. See reference No. 10, p. 212.
12. Steinhauser, F.: Die Meteorologie des Sonnblick. Wien 1938, p. 175.
13. See reference No. 5, p. 213.
14. Köppen, W.: Klimakunde von Rußland. Köppen-Geiger, Hdbch. d. Klimatologie, vol. IIIN, Berlin 1939, p. 40.
15. Connor, A. J.: The Climate of Canada, Köppen-Geiger, Hdbch. d. Klimatologie, vol. IIJ, pt. II. Berlin 1938, p. 390.
16. See reference No. 5, p. 216.
17. See reference No. 5, p. 217.
18. See reference No. 10, p. 38.

Table 4. *Corresponding values of $\bar{k}$ and periodic constituent of a series in per cent (interpolated values).*

$\bar{k}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.0 . . .	43	44	44	45	45	46	46	47	47	48
3.0 . . .	48	48	49	49	50	50	50	51	51	52
4.0 . . .	52	52	53	53	54	54	54	55	55	56
5.0 . . .	56	56	56	57	57	57	57	57	58	58
6.0 . . .	58	58	59	59	59	60	60	60	60	61
7.0 . . .	61	61	61	62	62	62	62	62	63	63
8.0 . . .	63	63	64	64	64	65	65	65	65	66
9.0 . . .	66	66	66	67	67	67	67	67	68	68
10.0 . . .	68	68	68	69	69	69	69	69	70	70
11.0 . . .	70	70	70	71	71	71	71	71	72	72
12.0 . . .	72	72	72	72	72	73	73	73	73	73
13.0 . . .	73	73	73	74	74	74	74	74	75	75
14.0 . . .	75	75	75	76	76	76	76	76	77	77
15.0 . . .	77	77	77	78	78	78	78	78	79	79
16.0 . . .	79	79	79	80	80	80	80	80	81	81
17.0 . . .	81	81	81	82	82	82	82	82	83	83
18.0 . . .	83	83	83	84	84	84	84	84	85	85
19.0 . . .	85	85	85	86	86	86	86	86	87	87
20.0 . . .	87	87	88	88	88	89	89	89	89	90
21.0 . . .	90	90	91	91	92	92	93	93	94	94
22.0 . . .	95	96	97	99	100	—	—	—	—	—

Fig. 4 however, shows, surprisingly, that the periodic constituents are clustered around two points of the standard $\bar{k}$-curve. The series Nos. 1—12 are crowded around the arithmetic mean of

$\bar{k} = 10.7 \pm 1.4$, corresponding to the periodic constituent of

$$69\% \pm 2{,}5\%.$$

Series Nos. 13—18 crowd around 91.5% periodic constituent.

The first group comprises very different geophysical elements for which the ratio of mixing of periodic constituents and random disturbances is on the average

$$69/31 = 2.2.$$

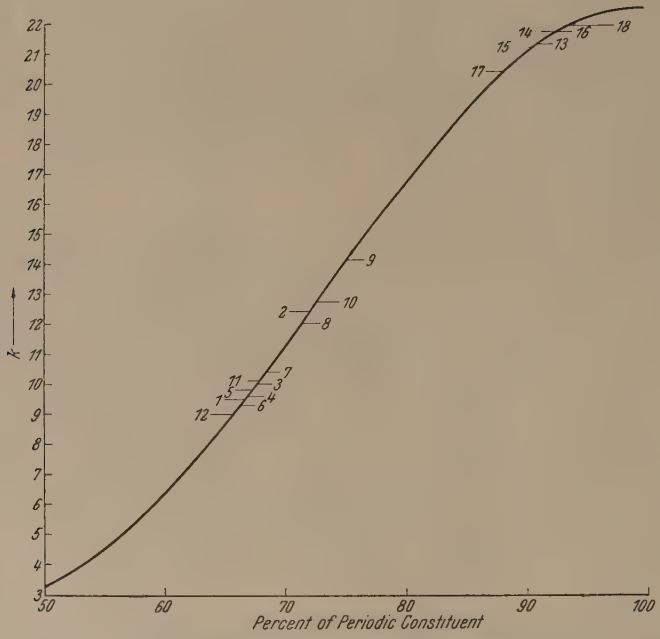


Fig. 4. Position of the periodic constituents (per cents) of several geophysical series along the standard $\bar{k}$-curve. (For numbers see Table 3.)

As far as twelve geophysical elements permit a conclusion, the *mixing ratio* of about two parts periodic constituents and one part random disturbances represents a *quasi-constant value*. The scattering is small.

Before we continue the discussion of this point, the second group of elements with an average periodic constituent of

$$91.5\% \pm 1.8\% \qquad (\bar{k} = 21.3 \pm 0.4)$$

may be briefly discussed. The first element (No. 13) of this group is the average annual variation of temperature at Chicago, Ill., a place chosen for its rather continental climate. The periodic constituent excels the average periodic portion of the first group by 22%. It was first surmised that the temperature curve of Chicago had been smoothed. In smoothing, the individual terms of a series are influenced by the neighboring terms;

the autocorrelation of the series is thus artificially increased, and the random disturbances are smoothed away to a certain degree. The periodic constituent of a smoothed series is, therefore, increased.

Actually, two interpretations are possible: either a smoothing process increases the periodic constituent of the present series or the annual variation of air temperature in continental climates presents a periodic phenomenon with very small portion of random disturbances. This latter assumption proved true, without exception, for the temperature curves of five additional continental places. The lowest periodic constituent amounted to 88%, the highest to 94%. No other geophysical element could, thus far, be found that had a similarly large periodic constituent.

Returning to *the first* group, it must be emphasized that the choice of the geophysical elements was arbitrary. It was only intended to find annual and daily variations of as many different geophysical elements as possible. The length of the observational period from which the averages were computed was not taken into consideration; in some cases, it was not even possible to determine this length from the references given.

There is no doubt that the periodic constituent increases with increasing length of the observational period. The random disturbances compensate each other the more, the greater the number of averaged values. Two examples were computed:

1. The annual variation of the atmospheric electric potential gradient at Davos, Switzerland (Table 3, No. 10) is derived from ten years and the portion of random disturbances is 27%. Ninteen years of observations of the same element at Potsdam (Germany) (not in Table 3) yield a random portion of 19%.

2. The other example is, perhaps, even more convincing, because it was computed from the same material. The annual course of air pressure on the Sonnblick mountain (Austria), (Table 3, No. 12) for the single year 1935 shows 34% random disturbances. Fifty years (1887—1936) (not in the table) yield 19%. About 3/5 of the random disturbances were compensated by using 50 years instead of one.

It is very likely that the compensation process is a logarithmic function of the length of the observational period, so that a direct comparison between the amount of decay in the two examples cannot be made. Further investigation will clarify this point. In any event, the method can be applied to determine whether or not a given length of a observational series is affected by random disturbances to an undesirable extent, in which case a series of perhaps 10, 20, etc. more years must be chosen in order to diminish the effect of random fluctuations. Perhaps the gap on the standard $\bar{k}$-curve between 75% periodic constituent, the maximum amount of the group of mixed geophysical elements and 88%, the minimum amount of the group of temperature variations in continental climates, could be filled with amounts of periodic constituents of annual (daily) variations of elements derived from especially long series of observations.

Application of the $\bar{k}$-Curve.

As it was mentioned in the introduction, this investigation started from the analysis of a series of temperatures of hot springs. The observations showed a variation having an apparent period of a year. The amplitudes, however, were so small that a distinction between a real variation and random fluctuations was impossible. Moreover, the source level of the springs was so deep that an annual variation of temperature was unlikely from the first.

The values of k and the corresponding periodic constituents of the annual variations of temperature of the hot springs was computed. These periodic components are comparable with those found for geophysical elements that undoubtedly are subject to real annual variations. The lowest periodic constituent calculated for such elements was 66 per cent, the average 69%. Although the assumption is arbitrary, it is likely that a true annual variation should have at least 60% periodic constituent if its reality should be approximately equal to that of, e. g., the annual variation of air pressure deduced from one year of observation. This fact, incidentally, shows how high the periodic portion must be, in order to assure the reality of a given period, and may explain the unfounded inferences frequently made in the analysis of hypothetical hidden periodicities.

The advantage of the present method is, that it is not necessary to make a definite decision about real or spurious annual variation. The method merely indicates whether or not an apparent annual variation of a given element has a periodic constituent similar to that of the well-understood real annual variation of another element.

The method was applied to the nine hot springs (No. 1 to No. 9). The values k were calculated from twelve average monthly temperatures for each hot spring. The k-values, when entered into Table 4, yielded the corresponding periodic constituents, given in Table 5.

Table 5. *Periodic constituents of the annual temperature variations of nine hot springs.*

No.	Periodic Constituent %	No.	Periodic Constituent %
1	68	5	54
2	62	6	53
3	81	7	30
4	67	8	36
		9	47

This separation into two groups Nos. 1—4 with periodic constituents above 60% and Nos. 5—9 below 60% originates from purely mathematic-statistical inferences, disregarding any geophysical consideration.

When averaging the *temperatures* of the two groups, we find:

springs No. 1 to No. 4 40.36° C + 2.22 C deg standard deviation
springs No. 5 to No. 9 46.01° C + 0.96 C deg standard deviation

Thus, the method separates the springs into two groups contrasted by the significant temperature difference of not less than 10 F deg.

The method reveals that the group with lower temperatures, originating from a higher level (smaller depth) shows real annual variations of temperature, whereas the other group, from a lower level, does not. Before the method had been applied, it appeared as if the temperature curves of the springs from either of the two groups indicated annual real variations.

The periodic constituent of the annual variation of still more various geophysical series may be investigated by means of the present method. On the other hand, it is likely that the restrictions imposed upon this first attempt can be removed without encountering serious difficulties. The method, generalized and extended to series with a large number of terms might prove useful in many geophysical problems of periodicity.

551.508.812 : 551.524.7

(Schweizerische Meteorologische Zentralanstalt, Zürich und Payerne.)

Bestimmung der Temperaturfalschmessungen von Radiosondenaufstiegen infolge des Trainageeffektes.

Von

Jean Lugeon und **Paul Ackermann.**

Mit 4 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Die gegenüber dem Radiosondenthermometer relativ große Masse der übrigen Sondenteile bildet die Ursache einer Temperaturfalschmessung ab zirka 7 bis 8 km Höhe, welche *Trainageeffekt* genannt wird, und in verschiedenen Arbeiten in den Annalen der Schweizerischen Meteorologischen Zentralanstalt [*1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*] beschrieben wurde. In vorliegender Arbeit wird der Einfluß dieses Effektes auf die frühere schweizerische Dienstsonde gemessen. Zu diesem Zwecke wurde dieser Sondentyp jeweils zusammen mit einer Spezialsonde am gleichen Ballon gestartet und die Temperaturdifferenz in Funktion der Höhe bestimmt.

Summary. The relatively big thermal mass of radio-sondes as compared with their thermometer, can falsify the measurement of the temperature above 7 to 8 km., what is called the thermal "training effect" (lag effect); this effect has been described in the Annals of the Swiss Central Meteorological Institute [*1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*]. The present paper shows the influence of the training effect on the former Swiss official sonde. The difference of temperature has been measured by means of a series of soundings where this type was coupled at the same balloon with a special sonde where this effect had been avoided.

Résumé. Le *trainage thermique*, provenant de la grande masse calorifique des sondes peut fausser notablement la mesure de température dès 7 à 8 km d'altitude. La théorie de cet effet a été publié dans les Annales de la Centrale Suisse de Météorologie [*1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*]. L'article présent décrit l'influence du trainage thermique sur l'ancienne sonde du service suisse. Il a été mesuré à l'aide d'une série de sondage, en comparant l'indication de température de cette sonde, avec celle d'une sonde spéciale dénuée de trainage thermique et suspendue au même ballon.

Einleitung.

Der Trainageeffekt kann die Temperaturmessung mittels Radiosonden ab zirka 7 bis 8 km Höhe stark fälschen. Er wurde von uns anläßlich der Plafonnierung von während des Krieges benutzten Celluxballonen entdeckt [*2*, *3*, *4*, *5*]. Dabei nimmt während des Verweilens der Radiosonde auf konstanter Höhe die Temperatur zu und überraschenderweise nach einiger Zeit wieder ab, und zwar für Tages- wie für Nachtsondierungen. Die Ursache für diese Erscheinung ist in der gegenüber dem Thermometer viel größeren Wärmekapazität und Trägheit der übrigen Radiosondenteile zu suchen. Unterschreitet die Luftventilation infolge Abnahme der Luftdichte und der Steiggeschwindigkeit einen bestimmten Grenzwert, so entwickelt sich ein Wärmefluß von der Sondenmasse auf das Thermometer.

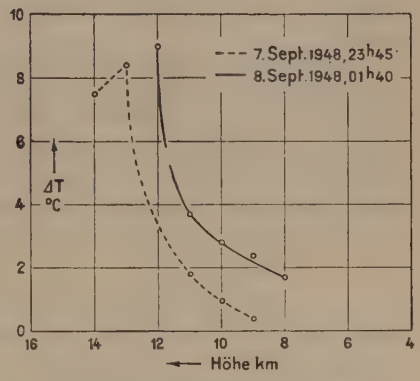


Abb. 1. Temperaturdifferenz der beiden Vergleichssonden bei Nachtaufstiegen.

Die Größe dieses Effektes hängt natürlich vom Sondentyp und von der Geschichte des Aufstieges ab. Er wurde im polytropen Eichcaisson von Payerne künstlich reproduziert und für unsere ehemalige Dienstsonde wie auch für verschiedene ausländische gebräuchliche Sondenmodelle durchgemessen.

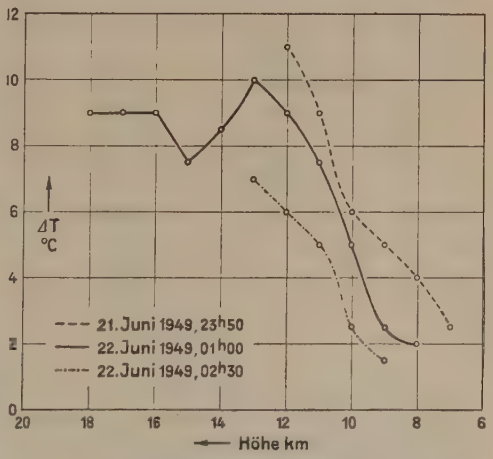


Abb. 2. Temperaturdifferenz der beiden Vergleichssonden bei Nachtaufstiegen.

Messung des Trainageeffektes in der Atmosphäre.

Zur Bestimmung des Trainageeffekts wurde eine Spezialsonde benützt, deren Konstruktionsmerkmale diesen verfälschenden Einfluß möglichst ausschließen [*6*]. Im Prinzip besteht hierbei das Meßthermometer aus einem dünnen Widerstandsdraht ohne Strahlungsschutz, der möglichst weit weg von den übrigen Sondenteilen zu liegen kommt; bei unseren Versuchen wurde der Draht auf einen Plexiglaskörper aufgewickelt. Ein Milliampèremeter in einer

Brückenschaltung mißt den mit der Temperatur variablen Widerstand.

Eine Serie von Sondierungen wurde nun in der Weise durchgeführt, daß jeweils die Spezialsonde zusammen mit unserer Vergleichssonde am gleichen Ballon angehängt und gestartet wurde. Temperatur- und Luftdruckangaben beider Sonden wurden jede Minute gleichzeitig abgelesen.

Abb. 1 und 2 zeigen die Temperaturdifferenzen der beiden Sonden in Funktion der Höhe, wobei die Spezialsonde immer die niedrigere Temperatur hat. Außerdem gibt Tabelle 1 die mit der Spezialsonde gemessene Temperatur in Funktion der Höhe für die verschiedenen Aufstiege wieder. Aus dem Vergleich mehrerer Aufstiege der gleichen Nacht ergibt sich, daß wir in den uns interessierenden Höhen mit einer Meßgenauigkeit von zwei Grad rechnen dürfen.

Tabelle 1. *Lufttemperatur nach Spezialsonde.*

Höhe km	21. Juni 1949 2350 MEZ °C	22. Juni 1949 0100 MEZ °C	22. Juni 1940 0230 MEZ °C	7. Sept. 1948 2345 MEZ °C	8. Sept. 1948 0140 MEZ °C
1	15,9	15,1	13,6	8,5	7,9
2	8,4	8,1	8,2	6,4	6,0
3	4,3	3,0	2,2	4,0	5,4
4	— 2,0	— 2,1	— 2,3	— 0,6	— 0,4
5	— 6,6	— 7,2	— 8,2	— 7,6	— 9,1
6	— 14,2	— 14,0	— 14,7	— 14,3	— 15,4
7	— 23,1	— 25,1	— 24,0	— 19,3	— 17,7
8	— 32,0	— 33,0	— 31,2	— 25,5	— 26,6
9	— 39,7	— 41,1	— 39,5	— 35,8	— 36,8
10	— 48,9	— 50,2	— 48,0	— 46,3	— 48,0
11	— 56,2	— 59,2	— 57,3	— 55,0	— 57,1
12	— 66,0	— 66,6	— 65,1	— 62,4	— 64,6
13		— 68,2	— 68,5	— 73,5	
14		— 65,9		— 73,7	
15		— 64,0			
16		— 64,0			
17		— 64,0			

Da die Kurven der Abb. 1 und 2 oberhalb einer bestimmten Höhe weitaus größere Temperaturdifferenzen zeigen, so ist damit die Existenz des Trainageeffektes praktisch bewiesen. Dazu ist noch zu bemerken, daß die Temperaturmeßbrücke der Spezialsonde so geschaltet ist, daß ein eventueller Spannungsverlust der Meßakkumulatoren eine zu hohe Temperaturanzeige bewirken müßte; ein instrumentell bedingter Fehlschluß ist somit nicht möglich.

Um dieses Resultat mit demjenigen aus den Laboratoriumsversuchen [5] zu vergleichen, haben wir den mittleren Trägheitskoeffizienten

α_{global} der fünf Nachtaufstiege in Funktion der Höhe berechnet; dabei ist jedoch daran zu erinnern, daß die normale Formel für den Trägheitskoeffizienten:

$$\alpha = \alpha_0 \sqrt{\frac{v_0\, \varrho_0}{v\, \varrho}},$$

v = Ventilationsgeschwindigkeit,
ϱ = Luftdichte,

für diesen Zweck nicht anwendbar ist.

Abb. 3 zeigt die Kurven von α_{global} für die Sondenaufstiege und die Versuche im Caisson; es ergibt sich daraus, daß die im Laboratorium ermittelten Werte zu groß sind. Dieses Resultat erklärt sich wenigstens teilweise dadurch, daß der Temperaturgradient pro Minute während der Aufstiege mit 2,5° C/min kleiner war als der künstlich im Caisson erzeugte von 3,1° C/min.

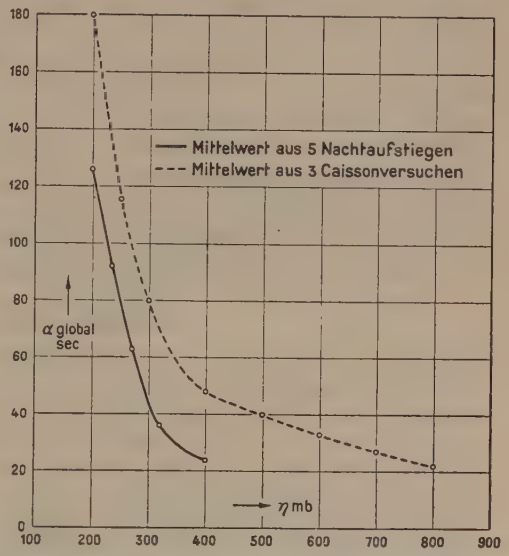


Abb. 3. Vergleichung der mittleren Trägheitskoeffizienten α_{global} für fünf Nachtaufstiege und drei Caissonversuche in Funktion der Höhe.

Abb. 4 stellt schließlich die Temperaturdifferenzen der zwei Vergleichssonden für drei Tagesaufstiege dar. Es zeigt sich dabei, daß bei Tage die Differenzen, besonders für größere Höhen, im allgemeinen kleiner sind als in der Nacht. Die Strahlungseinwirkung auf den nackten Plexiglaskörper ist für große Höhen relativ größer als auf das normale Sondenthermometer, das durch einen Strahlenschutz abgeschirmt ist. Aber auch hier ist die Existenz des Trainageeffektes feststellbar, da sonst bei Tagesaufstiegen die Spezialsonde infolge der Einstrahlung eine höhere Temperatur anzeigen müßte als die Vergleichssonde.

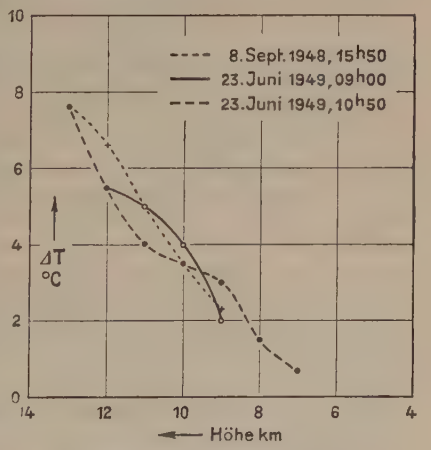


Abb. 4. Temperaturdifferenz der beiden Vergleichssonden bei Tagesaufstiegen.

Schlußfolgerung.

Da der beschriebene Effekt, wie schon erwähnt, außer vom Sondentyp auch in unkontrollierbarer Weise vom Ablauf des Aufstieges ab-

hängig ist, würde es illusorisch sein, nach einer Korrekturmethode zu suchen. Die einzige Möglichkeit für genaue Temperaturmessung in diesen Höhen besteht in der thermischen Isolierung des Thermometers von der übrigen Sondenmasse, was wohl am leichtesten durch möglichst große Distanzierung des Thermometers von der übrigen Sonde erreicht werden kann. Dabei wird man allerdings bei den heute gebräuchlichen Thermometern, besonders für große Höhen, nicht um die Anbringung eines Strahlungsschutzes herumkommen, wobei man zwei sich widersprechenden Bedingungen gegenübersteht. Wählt man einen Strahlschutz mit kleiner Wärmekapazität, so riskiert man ein Durchdringen der Strahlungswirkung; entscheidet man sich aber für eine größere Masse, so leistet man wieder dem Trainageeffekt Vorschub.

Literaturverzeichnis.

1. Lugeon, J.: La correction des températures des radiosondes dans le Mémoire: Quelques innovations aux méthodes suisses de radiosondage. Ann. M. Z. A. 1942, Zürich 1943.
2. —: Un nouveau phénomène de réchauffement des thermomètres de radiosondes dans la stratosphère: le trainage thermique. Actes Soc. Helv. Sci. nat., Sils-Maria, 1944.
3. Lugeon, J. et P. Ackermann: Le rôle du support des thermomètres dans les mesures stratosphériques ou le trainage thermique. Ann. M. Z. A. 1943, Zürich 1944.
4. Ackermann, P.: Verfälschung der Temperaturangaben von Radiosonden durch den Strahlschutz. Ann. M. Z. A. 1942, Zürich 1943.
5. Lugeon, J. et P. Ackermann: Le traînage thermique dans la stratosphère. Ann. M. Z. A. 1944, Zürich 1945.
6. Ackermann, P.: Versuche mit einer neuen Radiosonde ohne Trainageeffekt zur Messung der Stratosphärentemperaturen bis 20 km. Ann. M. Z. A. 1944, Zürich 1945.

551 . 510 . 534 : 551 . 510 . 535

(U. S. Weather Bureau, Washington.)

Ozone Measurements during Sudden Ionospheric Disturbances.

By

Sigmund Fritz.

With 4 Figures.

Summary. In order to investigate the effect of increased solar ultraviolet radiation on total atmospheric ozone, ozone observations have been made during sudden ionospheric disturbances (S. I. D.). If one can assume that the ratio of the extraterrestrial intensity of sunlight at 3110 Å to that at 3300 Å (the wavelengths observed by the measuring instrument) remains unchanged during days with S. I. D., it is found that ozone changes associated with S. I. D.s are small or absent, in agreement with qualitative theoretical expectation.

Zusammenfassung. Um die Auswirkung einer Zunahme der ultravioletten Sonnenstrahlung auf das atmosphärische Ozon zu untersuchen, wurden beim Auftreten des MÖGEL-DELLINGER-Effekts (Sudden Ionospheric Disturbances, S. I. D.) Ozonmessungen angestellt. Unter der Annahme, daß an den Tagen mit S. I. D. das Verhältnis der Intensität der extraterrestrischen Sonnenstrahlung bei 3110 Å zu der bei 3300 Å konstant bleibt, findet man, daß die gleichzeitigen Ozonänderungen entweder sehr klein sind oder ganz fehlen, was in Übereinstimmung mit dem theoretisch zu erwartenden Verhalten ist.

Résumé. Pour examiner l'effet de croissance de la radiation solaire ultraviolette sur l'ozone total atmosphérique, des mesures de l'ozone ont été faites pendant certains jours avec des perturbations ionosphériques brusques (Sudden Ionospheric Disturbances, S. I. D.) qui apparaissent ordinairement simultanément avec une éruption solaire. Si l'on suppose que le quotient de l'intensité extra-terrestre du rayonnement solaire pour $\lambda = 3110$ Å à celle pour $\lambda = 3300$ Å est constant, on constate que les variations de l'ozone coïncidentes avec les S. I. D. sont petites ou manquent complètement ce qui est en bon accord qualitatif avec la théorie.

Introduction.

There has been some speculation (see for example [*1*]) regarding the change of total atmospheric ozone during periods of increased emission

of ultraviolet radiation from the sun. It therefore seemed desirable, in the course of ozone measurements [2] with a Dobson ozone spectrophotometer, to measure the ozone during disturbed solar conditions whenever practicable.

It is well known that sudden ionospheric disturbances (S. I. D.) are usually accompanied by (in fact, are usually caused by) solar flares which emit relatively large amounts of ultraviolet energy; and consequently times of occurrence of S. I. D. may be considered as approximate times of enhanced ultraviolet solar emission (see footnote, Table 1). Therefore to see the effect of increased ultraviolet radiation, we decided to measure atmospheric ozone during S. I. D. s.

On many occasions, by prior arrangement, personnel of the Central Radio Propagation Laboratory (CRPL) of the National Bureau of Standards kindly telephoned the Weather Bureau when an S. I. D. was observed by them, and ozone measurements using direct sunlight were begun as soon as possible thereafter. On most occasions one or more ozone measurements had already been made before the S. I. D. occurrence. Additional S. I. D. information was obtained from the CRPL-F series [3].

Unfortunately, although it is known that solar ultraviolet emission usually increases during S. I. D. s, the *wavelengths* of the increased ultraviolet radiation are not known. Some authors [4] believe that energy near 1000 Å is responsible for S. I. D. s. Wulf and Deming [5] have suggested emission in the 2300–2800 Å spectral region as the cause. Other spectral regions, such as the X-ray region, have also been suggested. If increased radiation occurs in the spectral region which affects the photochemical equilibrium of ozone (from about 1300 Å to 3300 Å), perhaps the amount of ozone does change during S. I. D. s, although even under these conditions Craig [1] estimates that the amount of the ozone change would be small. It is this *possible ozone change* which is discussed here.

For purposes of examining the ozone measurements let us assume at first that no increased emission occurs at wavelength, λ, 3110 Å relative to that at 3300 Å. These are the wavelengths observed by the Dobson spectrophotometer.

Assumption (1).

Ratio of intensity at $\lambda = 3110$ Å to that at 3300 Å unchanged during S. I. D.

A formula which is often[1] used to calculate ozone, $\varkappa$, from direct sun measurement with a Dobson spectrophotometer is

$$\varkappa = \frac{L_0 - L}{\mu p} - 0.085, \tag{1}$$

[1] The constant 0.085 is supposed to account for selective scattering by the atmosphere and by "dust". From time to time several variations in this "correction" factor have been proposed (e. g., see [6]).

where L is $\log \frac{I'}{I}$ and is determined from the instrumental observations, L_0 is the extraterrestrial value of L, μ is the optical path of the solar beam through the ozone "layer", when the vertical path is taken as unity, and p (= 1.17) is the difference between the ozone absorption coefficients for wavelengths 3110 Å and 3300 Å. I and I' are, respectively, the intensities at these wavelengths. This formula was used in the ozone measurements considered here.

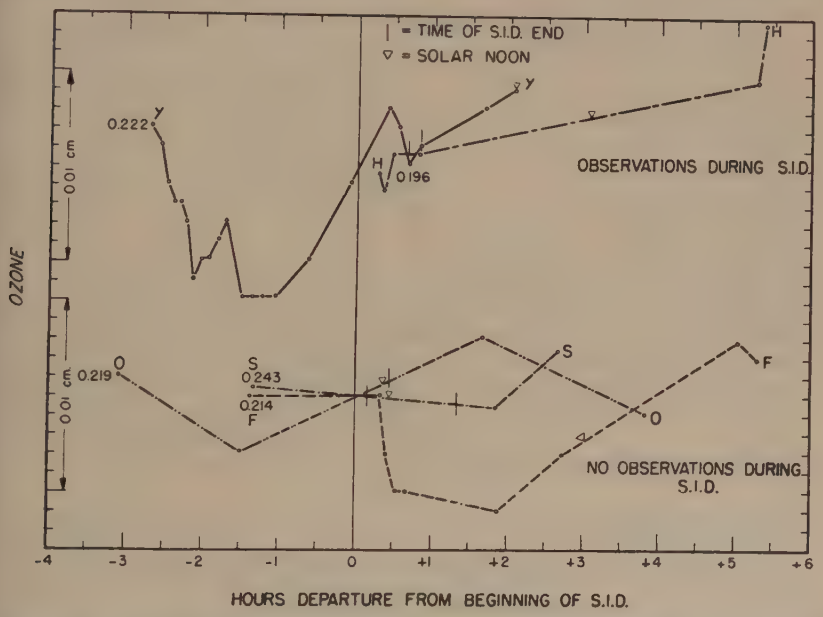


Fig. 1. Ozone observations during days with sudden ionospheric disturbances (S.I.D.). S.I.D. began *before solar noon.*

In the usual application of equation (1), L_0 is assumed to remain constant with time. Under our assumption (1), it is therefore valid to apply equation (1) according to standard procedure.

With the aid of the S. I. D. times described above, the ozone observations were arranged in the form of Fig. 1 and 2, where each broken line represents measurements of ozone during one day. The lines were labelled with letters which designate the dates listed in Table 1. They are also labelled with the amount of ozone at the first observation of the day, the variation of ozone during each day being indicated by the scale of ordinates. The amount of ozone is the total ozone in a vertical column of one sq-cm. cross section, and is expressed as the number of centimeters which the ozone would occupy if it were reduced to standard temperature and pressure.

The zero hour is the time of beginning of S. I. D. For purposes of orientation, small triangles were affixed to each curve, one corner of the triangle touching the curve at solar noon. One can then readily see the number of hours before noon (Fig. 1) or after noon (Fig. 2) when the S. I. D. began. Each ozone line contains a vertical dash which designates the time of the end of the S. I. D., so that the S. I. D. duration is readily seen in the figures. For purposes of easy comparison the ozone curves were moved up and down so that they intersected on the zero hour line.

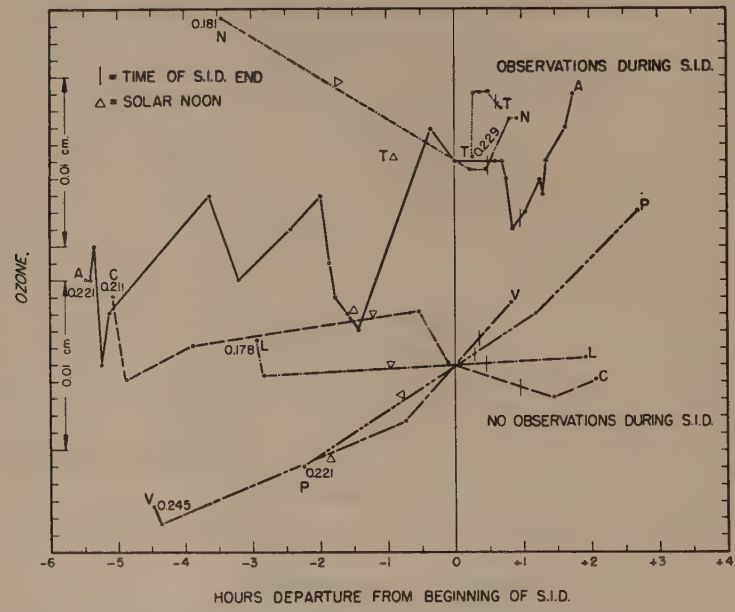


Fig. 2. Ozone observations during days with sudden ionospheric disturbances (S.I.D.). S.I.D. began *after solar noon.*

One would expect that if a marked ozone increase occurs following an S. I. D., then all the curves would bend upward after the zero hour. Conversely, they should bend downward following the S. I. D., if S. I. D.s are associated with an ozone decrease. However, when ozone observations were made during the S. I. D., (upper portions of Fig. 1 and 2) the changes observed were very small, amounting to a few thousandth of a centimeter of ozone, and the changes were not always in the same direction. Similarly, when one considers the entire course of the ozone measurements during each day, no definite trend is apparent. On some days, ozone increased following the S. I. D., (Fig. 1, line *H*; Fig. 2, line *P*); on other days it decreased after the S. I. D. (Fig. 2, line *C*).

It should be pointed out that the limit of accuracy of these ozone measurements is not exactly known. In these measurements [*2*] any

change of less than 0.01 cm. was (somewhat arbitrarily) considered to be a doubtful change. In Fig. 1 and 2, the ozone variations during one day are mostly about 0,01 cm. or less and so even the variations which are shown may possibly not be real, depending perhaps on such things as variations in atmospheric contamination from observation to observation.

Table 1. *Dates of Ozone — S. I. D. Observations.*

S. I. D. before Noon (Fig. 1)		S. I. D. after Noon (Fig. 2)	
Letter Designator	Date	Letter Designator	Date
F	June 30, 1948*	*A*	June 8, 1948*
H	Oct. 21, 1948	*C*	June 24, 1948
O	Feb. 17, 1949	*L*	Nov. 8, 1948*
S	Apr. 29, 1949	*N*	Nov. 18, 1948*
Y	July 28, 1949**	*P*	Apr. 28, 1949
		T	May 18, 1949
		V	May 31, 1949

* Except for November 8 and 18, 1948, solar flares were reported [7] on every date listed above, but on the additional dates marked with an asterisk (*) the times of *reported flares* did not coincide with times of S. I. D. However, since the observing of flares is affected by several factors, such as "seeing" conditions, it cannot be assumed that flares were not present on the sun at the S. I. D. times. On the contrary, the occurrence of an S. I. D. is often taken to mean that a solar flare occurred.

** Complete report of the times of solar flares not yet available.

Under the assumption that L_0 is constant, we may then agree with CRAIG that if any changes in total ozone do occur, these changes are of small magnitude. Because of the possible random errors in the observations, it would be necessary to examine numerous observations statistically to find any ozone variations which might be caused by increased ultraviolet emission from the sun associated with S. I. D. s.

The conclusions based on the data of Fig. 1 and 2 assume that L_0 remained constant. However, there is a possibility that L_0 does change during S. I. D.s and this possibility will now be discussed under assumption (2).

Assumption (2).

Ratio of intensity at $\lambda = 3110$ Å to that at $\lambda = 3300$ Å possibly changed during S. I. D.

By equation (1), L_0 can be obtained from a series of observations of L during the day, if L_0 is assumed constant. In such a series L is plotted against μ; if a straight line results, the line is extrapolated to $\mu = 0$, and the value of L at $\mu = 0$ is L_0. The occurrence of the straight line is commonly taken to mean that $\varkappa$ did not vary; curvature is taken to indicate that $\varkappa$ changed during the measurements, although changes in "dust" might affect the results.

Fig. 3 and 4 are graphs of the curves Y (Fig. 1) and A (Fig. 2). These were days when sufficient ozone observations were taken to make L_0 determinations[1] feasible by plotting L against μ. In neither Fig. 3 nor in Fig. 4 do the points lie exactly on a straight line; on the contrary, definite curvature of the lines is suggested. Since this curvature occurred during days with abnormal ultraviolet emissions, one may question whether, instead of $\varkappa$, L_0 changed, especially since the wavelengths of the enhanced energy are in doubt.

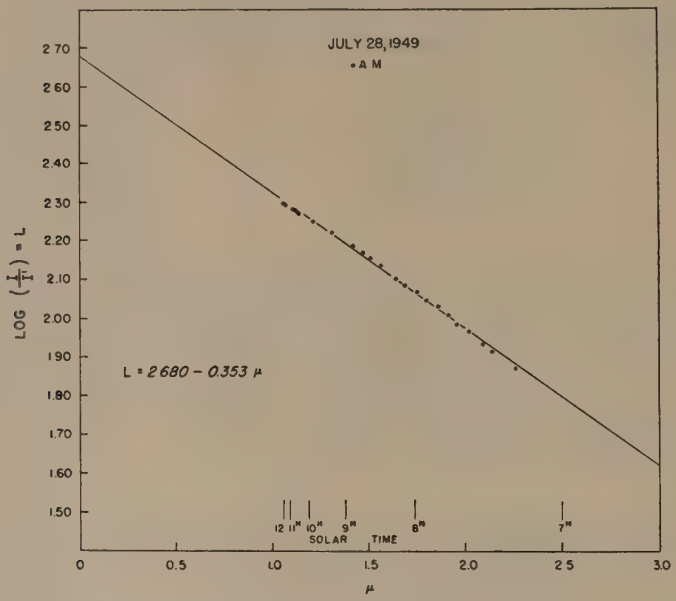


Fig. 3. Plot of L versus μ for curve Y of Fig. 1.

Equation (1) may be written as

$$L = L_0 - \mu\, p\, (\varkappa + 0.085) \qquad (2)$$

or differentiating with respect to μ

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \frac{\partial L_0}{\partial \mu} - p\,(\varkappa + 0.085) - \mu\, p\, \frac{\partial \varkappa}{\partial \mu}.$$

If neither L_0 nor $\varkappa$ is changing with time (or with μ, since μ depends on time of day), then the slope, $\partial L/\partial \mu$, of an L–μ curve should be constant, i. e., the line should be straight. Judging by the curvature in Fig. 3 and 4, $\partial L/\partial \mu \neq$ constant and therefore, if we disregard a possible change due to atmospheric contamination, $\frac{\partial \varkappa}{\partial \mu} \neq 0$ and/or $\frac{\partial L_0}{\partial \mu} \neq$ constant, i. e.,

[1] The large difference of the two values of L_0 given in Fig. 3 and 4 is due to a change in the instrument after June 8, 1948.

$\varkappa$ was changing, or L_0 was changing non-linearly with μ, or both were changing during the period in which the observations were taken[1]. Fig. 1 (curve Y) and Fig. 2 (curve A) already show the variations in ozone when L_0 is assumed constant. (Of course these ozone changes may have had meteorological rather than solar causes.) If, alternately, one assumes that *ozone* was constant during the day, and that it had some specific value, then the change in L_0, if any occurred, can be computed.

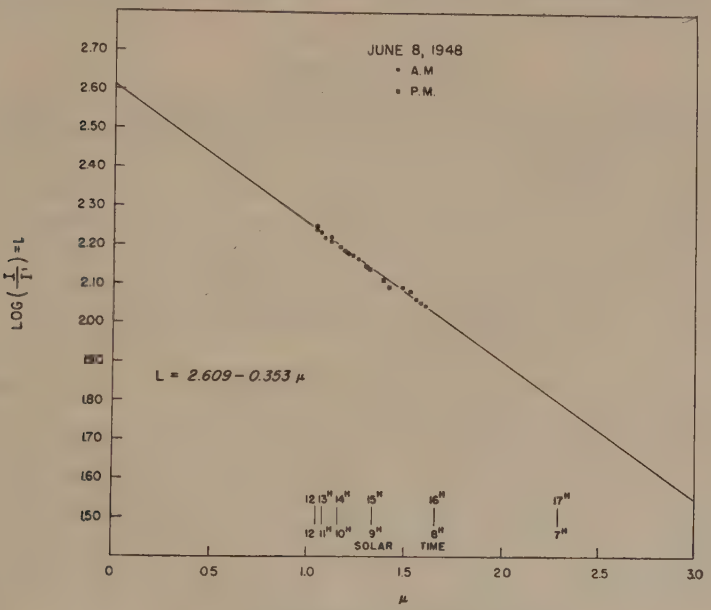


Fig. 4. Plot of L versus μ for curve A of Fig. 2.

However, without an independent determination of ozone and of L_0 it does not seem possible to ascribe the non-linearity of the L–μ curve in this case (Fig. 3 and 4) specifically to variations of either L_0 alone or of ozone alone or to some other non-considered variable such as atmospheric contamination.

Conclusion.

We have examined atmospheric ozone observations taken on a few days when S. I. D.s occurred in order to investigate ozone changes associated with increased solar ultraviolet emissions of uncertain wavelength. It is known that ultraviolet radiation at some wavelengths for $\lambda < 3110$ Å generally increases during S. I. D.s. If no change in the ratio of intensity at $\lambda = 3110$ Å to that at $\lambda = 3300$ Å occurs, as is generally assumed in the use of equation (1), Fig. 1 and 2 indicate that

[1] Due to temperature changes in the ozone "layer" p may also change.

ozone changes are small or absent during increased solar ultraviolet emission associated with S. I. D.s.

However, it is possible that significant increased relative radiation for $\lambda = 3110$ Å and $\lambda = 3300$ Å also occurs, and this possibility casts some doubt on the results of Fig. 1 and 2.

The solar spectrum is undoubtedly somewhat different for different S. I. D.s. But if it can be shown that L_0 is rarely affected during S. I. D.s, this uncertainty can be removed.

Acknowledgement.

The assistance of the personnel of the Central Radio Propagation Laboratory (Warning Service) of the National Bureau of Standards is gratefully acknowledged.

References.

1. Craig, R. A.: The observations and photochemistry of atmospheric ozone and their meteorological significance. American Meteorological Society. Meteorological Monographs **1**, No. 2, (Sept. 1950). 50 pages.
2. Fritz, S. and G. C. Stevens: Atmospheric ozone at Washington, D. C. Mon. Weath. Rev. **78**, 135 (1950).
3. Central Radio Propagation Laboratory: Ionospheric Data, CRPL-F Series, National Bureau of Standards, Washington, D. C.
4. Mitra, S. K.: The Upper Atmosphere. 1948, Royal Asiatic Society Bengal, Calcutta (see p. 306).
5. Wulf, O. R. and L. S. Deming: On the production of the ionospheric regions E and F and the lower altitude ionization causing radio fade-outs. Terr. Mag. Atm. El. **43**, 283 (1938).
6. Ramanathan, K. R. and R. V. Karandikar: Effect of dust and haze on measurements of atmospheric ozone made with Dobson's Spectrophotometer. Qu. J. R. Met. Soc. **75**, 257 (1949).
7. International Astronomical Union: Qu. Bull. on Solar Act., Nos. 82—86 (April 1948–June 1949).

551.594.13 : 551.584.3

(Physics Department of the Fordham University, New York.)

A Comparative Study of Atmospheric Conductivity at Ground Level and at One Meter above Ground.

By

George A. O'Donnell and **Victor F. Hess.**

With 12 Figures.

Summary. Observations made at various locations, with portable apparatus, from within New York City to one-hundred miles of the city show the following results: (1) The total conductivities at ground level and at one meter above ground are not equal. In general, the one-meter conductivity is greater than the ground during the day, but at night the ground value is the greater. Also, for high values of conductivity the total one-meter conductivity is greater than that at ground level. For lower values the reverse is the case. This might not be true for all locations. (2) The ratios of the polar conductivities of one sign at ground level to the corresponding values at one meter are not constant, and the ratio of the total conductivity at ground level to that at one meter is not constant. (3) These ratios depend upon wind velocities, the amount of pollution in the air, on the nature of the terrain, and upon the time, i. e., day or night.

(4) Under normal conditions, conductivity rises to an early morning maximum, the ground maximum rising more sharply than the one-meter, and remains fairly constant during the day but drops in the late afternoon or early evening reaching a minimum between 20h and 22h. (5) When variation in conductivity takes place under constant turbulence (wind 0—1), the one-meter conductivities change more rapidly than those at the ground (except at the time of maximum), where terrain is level. Local conditions may alter the above (e. g., smoky air rising from lower ground). Also, under all conditions the one-meter conductivity is more variable than ground conductivity. (6) Our findings do not confirm those of P. J. Nolan [*1*] and A. R. Hogg [*2*] that the unipolar (positive) conductivity at ground is almost equal to the total conductivity at one meter above ground.

Zusammenfassung. Unsere Beobachtungen über die atmosphärische Leitfähigkeit in Bodenhöhe und einen Meter darüber, die mit einem Gerdienschen

Aspirator mit Wulf-Elektrometer in der näheren und weiteren Umgebung der Stadt New York (bis 160 km Entfernung) ausgeführt wurden, führten zu folgenden Resultaten: 1. Die totale Leitfähigkeit der Luft nahe dem Erdboden und in 1 m Höhe ist nicht gleich. Im allgemeinen ist bei höheren Werten die Leitfähigkeit in 1 m Höhe während der Tagesstunden größer als am Erdboden, während es in der Nacht umgekehrt ist. Bei niedrigen Werten der Leitfähigkeit kehrt sich dieses Verhältnis um; doch trifft dies möglicherweise nicht für alle Orte zu. 2. Das Verhältnis der polaren Leitfähigkeit je eines Vorzeichens am Boden zu der entsprechenden in 1 m Höhe ist nicht konstant; dasselbe gilt auch für die Gesamtleitfähigkeit. 3. Die numerischen Werte dieser Verhältniszahlen hängen von der Windgeschwindigkeit (Turbulenz), dem Gehalt der Luft an Verunreinigungen, den Terrainverhältnissen und der Tageszeit ab. 4. Normalerweise erreicht die Leitfähigkeit ein Maximum in den frühen Morgenstunden; dabei erfolgt der Anstieg zum Maximum am Boden steiler als in 1 m Höhe. Während des Tages bleibt die Leitfähigkeit ziemlich konstant, fällt dagegen am späten Nachmittag und erreicht ihr Minimum zwischen 20 Uhr und 22 Uhr. 5. Wenn bei konstanten Turbulenzbedingungen (Windstärke 0—1) eine Änderung der Leitfähigkeit erfolgt, so ändert sich die Leitfähigkeit über ebenem Terrain in 1 m Höhe stärker als am Boden (außer zur Zeit des Hauptmaximums). Lokale Verhältnisse (wie z. B. Rauch) können dies ändern. In allen Fällen ist die Leitfähigkeit in 1 m Höhe stärker veränderlich als am Boden. 6. Unsere Ergebnisse bieten keine Bestätigung der Resultate von P. J. Nolan [*1*] und A. R. Hogg [*2*], wonach die positive Leitfähigkeit am Boden fast ebenso groß ist wie die gesamte Leitfähigkeit in 1 m Höhe über dem Boden.

Résumé. Nos mesures de la conductibilité atmosphérique au niveau du sol et à un mètre de hauteur effectuées avec un aspirateur de Gerdien et un électromètre de Wulf aux environs immédiats et lointains de New-York (jusqu'à 160 km de distance) ont conduit aux résultats suivants. 1. La conductibilite totale au niveau du sol n'est pas la même qu'à un mètre. En général pour les valeurs élevées la conductibilité est plus forte à un mètre qu'au sol pendant le jour; l'inverse a lieu la nuit. Pour les valeurs faibles le phénomène s'inverse, mais ce n'est pas nécessairement le cas partout. 2. Le rapport de la conductibilité polaire de chaque signe au sol à celle qui lui correspond à un mètre n'est pas constant; il en est de même pour la conductibilité totale. 3. La valeur numérique de ces rapports dépend de la vitesse du vent, de la teneur de l'air en impuretés, de la configuration du terrain et du moment de la journée.

4. La conductibilité atteint normalement un maximum dans les premières heures du jour; l'accroissement est alors plus rapide au sol qu'à un mètre. Pendant la journée la conductibilité reste sensiblement constante, décroît cependant en fin d'après-midi et atteint son minimum entre 20 et 22 heures. 5. Si par turbulence constante (vitesse du vent 0 à 1) il se produit une variation de la conductibilité, celle-ci varie plus fortement à un mètre qu'au niveau du sol en terrain plat (sauf à l'époque du maximum principal). Les conditions locales, comme la fumée par exemple, peuvent ici apporter des modifications. Dans tous les cas la conductibilité varie davantage à un mètre que sur le sol. 6. Nos résultats ne confirment pas ceux de P. J. Nolan [*1*] et de A. R. Hogg [*2*] selon lesquels la conductibilité positive au niveau du sol serait presque aussi grande que la conductibilité totale à la hauteur d'un mètre.

Introduction.

The principal object of this investigation was the study of the relation between the unipolar and total conductivities *at ground level* and *at one meter above ground*. For this purpose experiments were carried out from June to December 1950 at five locations;

1. *Fordham University* is situated in a densely populated and semi-commercial district in a northern section of New York City. The University has extensive grounds and is adjacent to the New York Botanical Gardens and the New York Zoological Park.

2. *Iona College*, in the city of New Rochelle, twenty miles northeast of New York City center, is situated in a residential district of individual homes.

3. The *College of Mt. St. Vincent*, on the east bank of the Hudson River, is at the northern boundary of New York City and fifteen miles from the city center.

4. *Easthampton*, one hundred twenty miles east of New York City near the eastern tip of Long Island, is a small resort town.

5. *West Park* is on the west bank of the Hudson River and eighty miles directly north of New York. It is in a sparsely populated district.

At the various locations, observations were made on extensive lawns except at West Park where the location was the center of a flat eight-acre tract of grazing land. The apparatus was always set up under the branches of large trees as a protection from the earth's field.

Apparatus and Method of Observation.

An aspiration apparatus of the Gerdien type, with the collecting cylinder horizontal was used. The outer cylinder was 40 cm. long with an inside radius of 4.9 cm. The inner electrode was 20 cm. long and had a radius of 0.5 cm. A reversed motor driven blower was used as an aspirator. To reduce turbulence a wire mesh was placed between the aspirator and the condenser. A right-angled elbow of galvanized iron was made to fit tightly over the end of the outer cylinder. This elbow could be turned about the axis of the cylinder. The long arm was one meter in length measured from the axis to the open end.

Preliminary experiments with and without the elbow, showed that the rate of flow was sufficient to prevent any loss of ions by diffusion to the walls. To insure that air drawn from ground level was not coming from higher regions, a piece of heavy cardboard, 2.5 ft. by 2.5 ft., with a central opening was fitted over the lower end of the intake and supported 12 cm. above ground. However, its use was discontinued when results were found to be the same without it. Although, for ground measurements, the bottom of the elbow was usually 6 cm. from the ground, many observations showed that an increase up to 15 cm. did not change the results. Evidently our method of drawing air directly up insured its coming from ground contact.

The time of individual observations varied from five to fifteen minutes, depending on the value of the conductivity at the time of observation. For reduction the following equation [3] was used;

$$\lambda = \frac{C_1}{4\,\pi\,C_2} \times \frac{1}{V_a} \times \frac{dV}{dt}.$$

C_1 is the capacity of the charged system and C_2 the capacity of the parts exposed to air flow. V_a is the mean voltage during the time of observation. A Wulf bifilar electrometer was used.

Usually, alternate observations of conductivity of one sign at ground and at one meter were made for twenty-four hours, then twenty-four hours of the other sign were measured. A few times the four quantities were measured consecutively, but for low values the time to complete a cycle was too long. We hoped that many measurements of positive and negative conductivity, although taken on different days, would be statistically correct. When the number of observations have been too few at a particular location, no attempt was made to compare the positive with the negative conductivity. Results are expressed in e. s. units with the factor 10^{-4} omitted from the tables and in the discussion of results. Because of the wide range in the values obtained it was found necessary to reduce the vertical scale on some of the graphs. The Beaufort scale (1—12) is used to indicate wind velocities.

Symbols used:

λ_1 positive conductivity at one meter
λ_{1g} positive conductivity at the ground
λ_2 negative conductivity at one meter
λ_{2g} negative conductivity at the ground
$\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ total conductivity at one meter
$\Lambda_g = \lambda_{1g} + \lambda_{2g}$ total conductivity at the ground.

Results of Observations.

At *Iona* observations were made during June and July, but not for continuous 24-hour periods as only one observer was available. Nevertheless, the 24 hours were covered for all elements except λ_{2g}, but enough measurements of this quantity were made during the day and night to establish a relationship to λ_2 at these times (Table 1). Here, many observations alternating between λ_1 and λ_2 were also made.

The morning maximum is between 06h and 08h and the minimum at approximately 22h local time (Fig. 1). These are about the hours that maximum and minimum conductivity occur at College, Alaska, in summer [4] and in Watheroo, Australia [5]. During the night at this time of year the wind is seldom greater than one, but in daytime it is gentle to fresh being strongest in the late afternoon. This would account for the rise in conductivity between 15h and 16h. The sudden drop after 17h is assumed to be due to the maximum of domestic fires in the neighborhood at this time.

The ratio $\frac{\lambda_{1g}}{\lambda_1}$, is greater for smaller values of conductivity and when conductivity is rising to a maximum. The total conductivity at ground and at one meter is greater during the day than at night possibly due

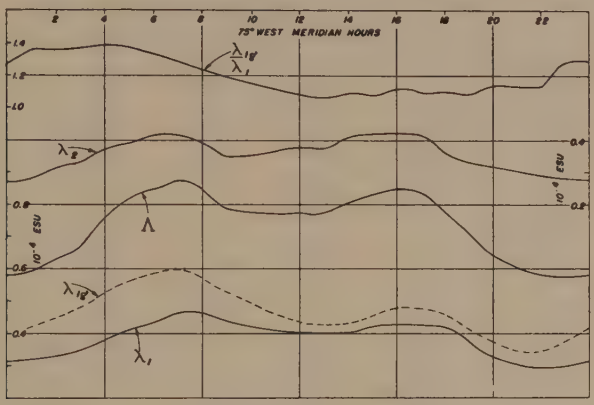


Fig. 1. Diurnal variation of conductivity and $\frac{\lambda_{1g}}{\lambda_1}$; Iona College, New Rochelle, N.Y., June-July 1950.

to the stronger winds in the daytime. However, all ratios are slightly larger for the night period (Table 1).

Fig. 2 shows the results of one run of positive conductivity made at *Iona*. During the time of observation and for two previous days, the

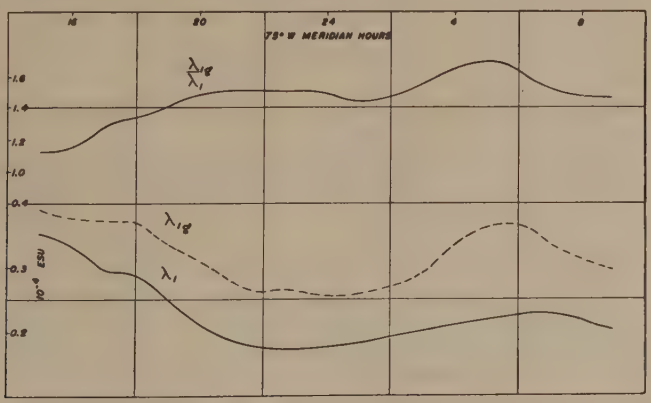


Fig. 2. Variation of $\frac{\lambda_{1g}}{\lambda_1}$ under constant turbulence (wind 0—1); Iona, September 8—9, 1950.

wind was 0—1. A moderate haze was present at all time. The object was to test under relatively stable conditions two conclusions, first, that the ground values decrease slower than the one-meter values with

decreasing conductivity; the ratio $\frac{\lambda_{1g}}{\lambda_1}$, consequently, increasing, and second, that the ground maximum rises more sharply than the one-meter

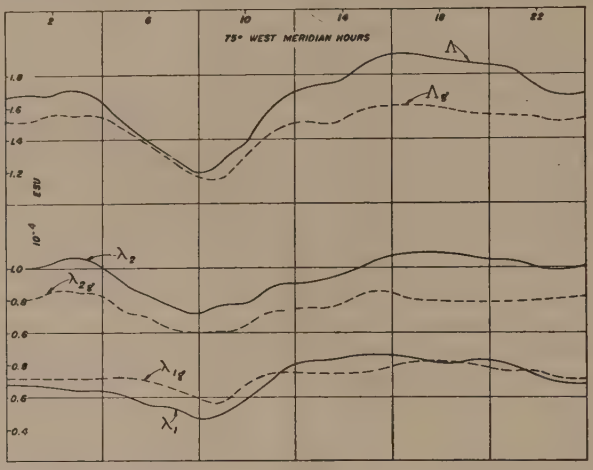


Fig. 3. Diurnal variation of conductivity in city-air; Fordham University, New York City, October 1950.

maximum again giving increased values to $\frac{\lambda_{1g}}{\lambda_1}$. The results as seen from the graph seem to verify these conclusions.

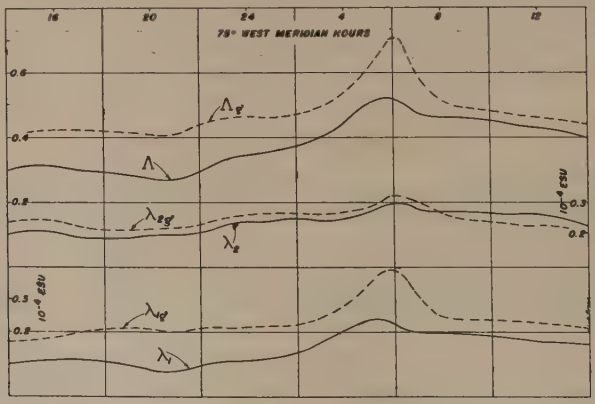


Fig. 4. Diurnal variation of conductivity; West Park, N.Y., November 18 to December 9, 1950.

Conductivity measurements were made at the College of *Mt. St. Vincent* from July 24 to August 8. As only day measurements were made at this location no graphs are given. Results are given in table 1.

Fig. 3 shows the results obtained at *Fordham* in October. The graphs start at 14h, the beginning of the 24-hour periods. Due to city

air, the conductivities were the lowest recorded. The ratios, however, are the highest (Fig. 11 and 12), reaching values greater than 2. Both the morning maximum and the night minimum occur about an hour

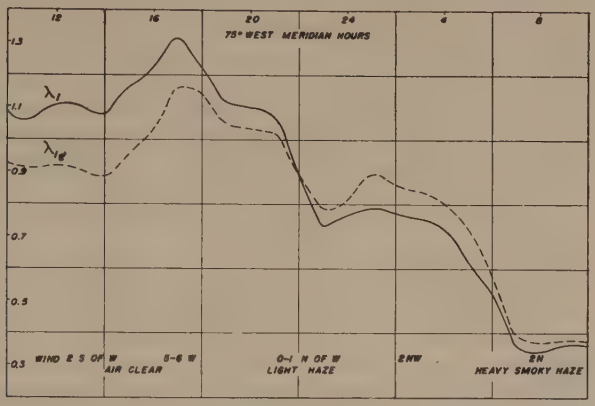


Fig. 5. 24-hour variation of the positive conductivities at ground level and at one meter above ground with varying meteorological conditions; West Park, November 22—23, 1950.

earlier than at Iona. As already noted at Iona, at the maximum the ground conductivity showed a greater relative variation than the one-meter conductivity. The ratios are also higher for the lower values of conductivity. Because of the small number of observations, the positive

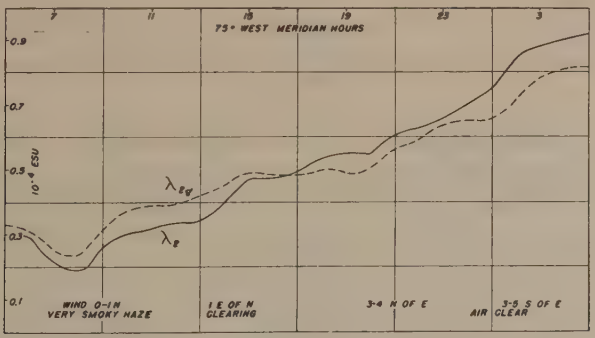


Fig. 6. 24-hour variation of the negative conductivities at ground level and at one meter above ground with varying meteorological conditions; West Park, November 24—25, 1950.

and negative conductivities are not comparable. The total ground conductivity was a good deal higher than the one-meter.

Observations were made at *West Park* from November 18 to December 9. During this period a number of days were lost due to storms. Here, north and south winds brought smoky air from industrial regions. East winds gave good to fair results and west winds high values of con-

ductivity. Meteorological conditions were very variable. The wind was never constant in intensity and direction for any great length of time. The point of observation was approximately one-half mile west of the Hudson river and at an elevation of 200 feet above the river.

Fig. 4 is made up of three 24-hour runs of positive conductivity and three of negative. Because of the variable weather, no significance can be attached to the fact that the negative values are larger than the positive. Morning fog over the river, although it did not extend to the point of observation, possibly accounts for the great drop in conductivity starting at about 04h. There is no well defined morning maximum but

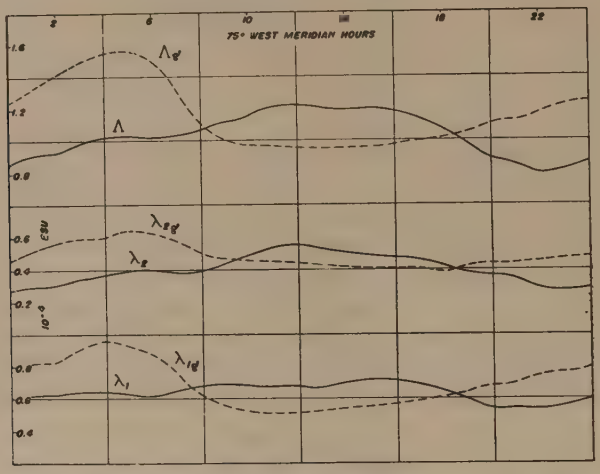


Fig. 7. Diurnal variation of conductivity near ocean surf; Easthampton, N.Y., August 15 to September 1, 1950.

a secondary minimum occurs a little before midnight. All ratios show a definite increase during the time of low conductivity and have the largest values between 04h and 08h (Fig. 11 and 12). The total one-meter conductivity is greater than total ground conductivity. This is the reverse of the results found at Fordham.

Figures 5 and 6 represent two 24-hour periods of positive and negative conductivities respectively. Both show a progressive change in conductivity at the two levels due to changing wind direction as indicated on the graphs. 46 pairs of the above positive conductivities (Fig. 5) taken when the wind was from the west gave $\frac{\lambda_{1g}}{\lambda_1} = 0.87$. On November 25, a violent storm extended over the Eastern Seaboard. Six pairs of positive conductivity made from 05h to 07h, before observations had to be discontinued, gave the same ratio (0.87). Wind was from the east.

Six pairs of negative conductivity also observed before a storm, on November 20, which reached gale force, gave $\frac{\lambda_{2g}}{\lambda_2} = 0.71$. In 90 minutes

with increasing wind velocities, the one-meter conductivity rose from 0.378 to 0.889 and the ground conductivity from 0.310 to 0.756.

Observations were made at *Easthampton* from August 15 to September 1. Long Island extends 120 miles from the mainland in a direction a little north of east. The mainland to the north is about 25 miles across

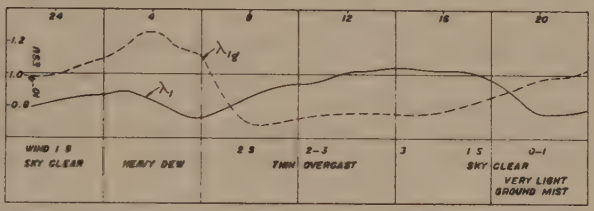


Fig. 8. Effects of changing wind velocity and convection on positive conductivities at ground level and at one meter near surf; Easthampton, N.Y., August 17—18, 1950.

Long Island Sound. At the point of observation, the island is about five miles wide and very flat. Experiments were conducted on a private estate 1500 feet from the ocean to the south. Conductivities were low during the times of west winds which came from the main body of the island. Winds from southwest to southeast gave higher values. No north winds were experienced. The days were generally sunny with light to fresh winds. At night winds were seldom greater than one.

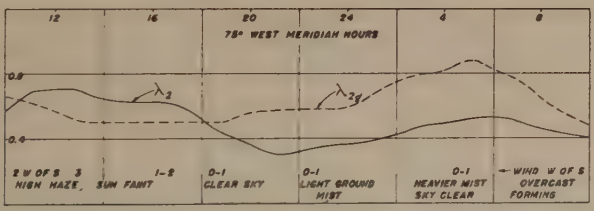


Fig. 9. Effects of changing wind velocity and convection of the negative conductivities at ground level and at one meter above ground near surf; Easthampton, N.Y., August 24—25, 1950.

A light ground mist occasionally formed in the early morning hours. Humidity was high and at night there was usually a heavy dew.

Fig. 7 and table 3 give the results of observations at this location. Some of these results were unexpected: (1) While positive ground values were greater than the one-meter values during the night, the reverse was the case during the day. The change in relationship of these conductivities was always sudden but did not take place at the same time each day.

The ratio, $\frac{\lambda_{1g}}{\lambda_1}$, became greater than one in the evening at times varying from 18h to 22h and in the morning it became less than one at times varying from 07h to 09h. It was noted that the relative increase in ground conductivity coincided with the usual drop in wind velocity and its decrease in the morning at a time of increasing wind velocity.

(2) The negative conductivities showed the same phenomenon but the morning change was usually later. (3) The most surprising feature were the relatively high negative ground values at night. The ratio, $\frac{\lambda_{2g}}{\lambda_2}$, reached values as high as 2.00. However the increased total conductivity at night, at ground level, was due more to a greater increase in positive conductivity.

All ground values show a definite morning maximum, at approximately 04h for the positive and 05h for the negative. This is more in accord with the time of maximum found at most places where measurements have been made. The one-meter conductivities show a slight rise at the same time of morning but are not in phase with the corresponding ground values.

Table 1. *Summaries of conductivities from all locations in* 10^{-4} *E.S.U.*

	λ_1	λ_{1g}	$\frac{\lambda_{1g}}{\lambda_1}$	λ_2	λ_{2g}	$\frac{\lambda_{2g}}{\lambda_2}$	Λ	Λ_g	$\frac{\Lambda_g}{\Lambda}$
Day: 7 A. M. to 7 P. M.									
Fordham	0.152	0.219	1.44	0.235	0.241	1.02	0.387	0.460	1.19
Iona	0.469	0.492	1.05	0.427	0.336	0.79	0.896	0.828	0.92
St. Vincent ...	0.443	0.453	1.02	0.507	0.456	0.90	0.950	0.909	0.95
Easthampton..	0.681	0.563	0.83	0.469	0.437	0.93	1.150	1.000	0.87
West Park ...	0.690	0.658	0.95	0.897	0.693	0.77	1.587	1.351	0.85
Night: 7 P. M. to 7 A. M.									
Fordham	0.136	0.237	1.73	0.232	0.234	1.00	0.368	0.471	1.28
Iona	0.355	0.375	1.06	0.378	0.370	0.98	0.733	0.745	1.02
Easthampton..	0.587	0.788	1.34	0.324	0.524	1.62	0.911	1.312	1.44
West Park ...	0.681	0.723	1.06	0.987	0.774	0.78	1.668	1.498	0.90
Mean Values for each Location.									
Fordham	0.144	0.228	1.58	0.233	0.237	1.02	0.377	0.466	1.23
Iona	0.412	0.434	1.05	0.403	0.353	0.88	0.815	0.794	0.97
Easthampton..	0.634	0.675	1.06	0.397	0.480	1.21	1.031	1.156	1.12
West Park ...	0.685	0.690	1.01	0.942	0.774	0.78	1.628	1.424	0.87

Figures 8 and 9 give the results of one 24-hour measurement of positive conductivity and one of negative respectively. As indicated on the graph, an increase in ground conductivity is associated with a fall in wind velocity and a decrease in ground conductivity follows an increase in wind velocity. The polar ground conductivities show maxima at the same hours as found for the averages of all values (Fig. 7). Only the one-meter conductivities show a minimum near 21h.

Advantage was taken of two days of brisk winds, August 28—29, to check the dependence of ratio, $\frac{\lambda_{1g}}{\lambda_1}$, on wind velocity. Observations were made from 16h to 07h the following morning. During the whole time wind was 4—6 S from the ocean which was very rough. The winds were accompanied by low light clouds not of sufficient

thickness to obscure the moon. Results of 20 pairs of one-meter and ground conductivities are; $\lambda_1 = 1.057$, $\lambda_{1g} = 0.862$, $\frac{\lambda_{1g}}{\lambda_1} = 0.82$. The one-meter conductivity remained higher than the ground throughout the night. Between the hours 04h and 06h, the mean value of $\frac{\lambda_{1g}}{\lambda_1}$ rose to 0.91.

Table 1 is a summary of all elements measured at the various locations. The observations are shown in three groups; day, night and all measurements. The locations are arranged in order of increasing conductivity at one meter.

In each group the ratios decrease in going from the location of lowest to that of highest conductivity, except some of those for Easthampton. During the day the one-meter total conductivity was found to be greater than the ground, except at Fordham (location of lowest conductivity) but during the night the total ground conductivity became greater than the one-meter, except at West Park (location of highest conductivity). All night ratios without exception are greater than their corresponding day values. Easthampton shows the greatest increase in night ratios over day.

Discussion of Observations.

In general, we found that the polar conductivities at one meter increase and decrease more rapidly than the corresponding ground values (except at maximum) and this is of course, reflected in the total conductivities. This phenomenon should be expected when we consider that the effects of convection and turbulence are greater at higher levels than at ground. The mean eddy coefficient as given by W. SCHMIDT [*6*], increasees between 11 cm. and 244 cm. from 0.26 to 3.40 cm.$^{-1}$ g. sec.$^{-1}$. The relative effect of increasing turbulence can be readily seen from fig. 10 which is made up of 371 pairs of observations of positive conductivity at one meter and at ground without restriction on wind velocity. The values are taken from all locations except Easthampton and are averaged in groups, 0.000 to 0.200, 0.200 to 0.300, etc. There is naturally not an equal distribution of values among the points. Most of the values of λ_1 and λ_{1g} to the left were observed under lower wind velocities than those to the right. Therefore, we might assume that increasing λ_1 roughly approximates increasing wind velocity which brings purer air from higher altitudes. The average increase in λ_1 and λ_{1g} from point to point along the three superimposed straight lines expressed in percents, is given in table 2.

Table 2. *Percentage increase in positive conductivity at the one-meter and ground levels from point to point along the three superimposed straight lines of fig. 10.*

	Left line	Middle line	Right line
λ_1	67%	22%	10%
λ_{1g}	37%	15%	9%

It can be seen that λ_1 increases faster than λ_{1g} but at a decreasing rate. The initial sharp drop in the curve indicates that no great turbulence is necessary to influence the one-meter conductivity but there is a considerable lag in its effect at ground level.

The factors that cause decreasing conductivity: a decrease of radioactive matter in the air, an increase of condensation-nuclei or an increase in air pollution, or any combination of these are also air borne. Therefore, the meter level should be affected before the ground.

An additional mechanism that could account in part for the fact that the one-meter conductivity is more variable than that at ground is that q, the rate of formation of small ions, not only has different values at

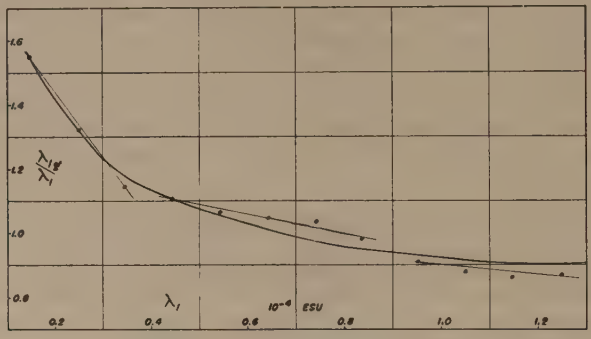


Fig. 10. Variation of the ratio, $\frac{\lambda_{1g}}{\lambda_1}$, with increasing turbulence. Increasing conductivities approximate increasing wind velocities.

ground and at one meter but it may also vary at different rates at the two levels.

The average rate of production of small ions near the surface of the earth over land is due almost entirely to the radioactive matter in the air and in the earth, cosmic rays contributing only a small fraction of the whole. Appromimately 30 percent of q up to one meter above ground is due to gamma radiation from the earth itself as shown by Hess [3]. Very close to the surface of the earth beta radiation would play an increasing part in ionization. Experiments are being carried out by the authors with two identical ionization chambers, one at the meter level and one a few centimeters above ground. Results to date indicate an appreciable increased rate of ionization at ground over that at the meter level. Other experimenters have obtained similar results [2, 7]. For a given location, the rate of ion-formation due to the radioactive matter in the earth can be considered constant as long as the condition of the soil remains unchanged. This should be true even though the amount of radioactive matter, of pollution, or of condensation-nuclei in the air near the surface was changing. Thus the rate of ion-formation due to the radioactive matter in the earth only might be considered a parameter having a larger value at ground than at one meter. Then, total q_1

near the surface of the earth would be made up of two parts one constant and the other variable. Any decrease in total q at ground and at one meter, even though numerical equal at both levels, would be relatively less at ground as ground q contains a larger constant part.

As is evident from fig. 2, 3, and 7, the ground conductivity shows a relatively greater increase at the time of maximum than the one-meter conductivity. McNish and Wait [*8*] report that the diurnal maximum of q occurs approximately at sunrise. A minimum of condensation-nuclei is also found in the early morning [*9*]. Yunker [*10*] has found a considerably lower minimum at 50 cm. than at 20 meters above ground. From the above we might conclude that, before convection has set in, the value of q is greater at ground level than at one meter. This combined with the fact that the loss of small ions due to condensation-nuclei would be less at ground, should account for the sharper rise in ground conductivity at the morning maximum.

In discussing the possible reasons for the ground conductivity being unequal to the one-meter values, we are omitting the Easthampton results, reserving them, because of their "abnormal" character for separate discussion. While it would be desirable to have simultaneous measurements of field strength and of large-ions with the conductivity measurements, we found it impracticable to combine apparatus for such measurements into a portable unit. We cannot then, discuss our results in terms of such elements except where they are comparable with those of other observers. We did, however, make measurements of positive and negative small-ions results of which will appear in a later paper.

Because of the normal electric field, we would expect λ_{1g} to be greater than λ_1 due to the greater concentration of positive ions near the ground and λ_{2g} to be less than λ_2 due to the depletion of negative ions near the ground. The values of $\frac{\lambda_{1g}}{\lambda_1}$ are greater than one (Table 1), except for the day value for West Park. As the smallest value of $\frac{\lambda_{2g}}{\lambda_2}$ is also found at West Park in the day, the cause of the exception is local. This local effect could be due to the morning mist over the river and the fact that smoke when present in the air was more prevalent in the daytime. The sources of both these factors were below the point of observation and apparently affected ground level before the meter level to a degree that tended to predominate over other factors which could cause an increase of ground conductivity over the one-meter value.

Our results show that $\frac{\lambda_{2g}}{\lambda_2}$ was greater than one only at Fordham. The ratio $\frac{\lambda_{1g}}{\lambda_1}$ was also greatest at this location. Johnson and Wait [*11*] from the results of their Atmospheric-Electric Survey in Washington suggested that atmospheric pollution may be a large factor in producing low conductivities. As our largest values of conductivity were found at West Park when the air was clear and our lowest in city-air at Fordham, our

results seem to add weight to this view. This factor would usually be more effective (discussed above) in reducing conductivity at one meter than at ground. This with the fact that the rate of ion-formation is greater at ground level could cause the ratio $\frac{\lambda_{2g}}{\lambda_2}$ to become greater than one.

If the electric fields at ground and at one meter do not differ appreciably, as a number of experimenters have demonstrated, although there is some variance of opinion on the subject, then Λ should equal Λ_g. Our results show that they are not equal, although the values of the reatio, $\frac{\Lambda_g}{\Lambda}$, except at Fordham do not differ very widely from unity. It would be

Fig. 11. Variation of the ratio, $\frac{\Lambda_g}{\Lambda}$, at three locations. The letter A indicates the time of maximum conductivity and B the time of minimum conductivity.

entirely fortuitous that factors which cause unequal variations in the polar conductivities at the one meter level with respect to the values at ground level, should act in such a way as to make the sum of the positive and negative conductivities at the meter level equal to the sum of these elements at ground level. Therefore, for the same reasons that polar conductivities vary, total conductivities should show some unequal variation. A comparison of fig. 11 and 12 shows that the diurnal variation of $\frac{\Lambda_g}{\Lambda}$ is similar to that of $\frac{\lambda_{1g}}{\lambda_1}$. The letters A and B on the graphs mark the time of maximum and the time of minimum conductivity respectively at the locations indicated.

The values of the ratio, $\frac{\Lambda_g}{\Lambda}$, for West Park are probably of no significance except to show diurnal variation. Although, a large number of observations (446 of positive conductivity and 380 of negative) were made at this location, meteorological conditions were so variable from day to day that Λ_g is not comparable with Λ. The low values of Λ_g with respect to Λ are due to the relatively low values of λ_{2g} (Fig. 4).

At Fordham the number of observations were too few to make the polar conductivities at the two levels comparable. However this adverse factor should practically cancel out in the ratio, $\frac{\Lambda_g}{\Lambda}$, as all values of $\frac{\lambda_{2g}}{\lambda_2}$ at this location are very close to unity (Table 1).

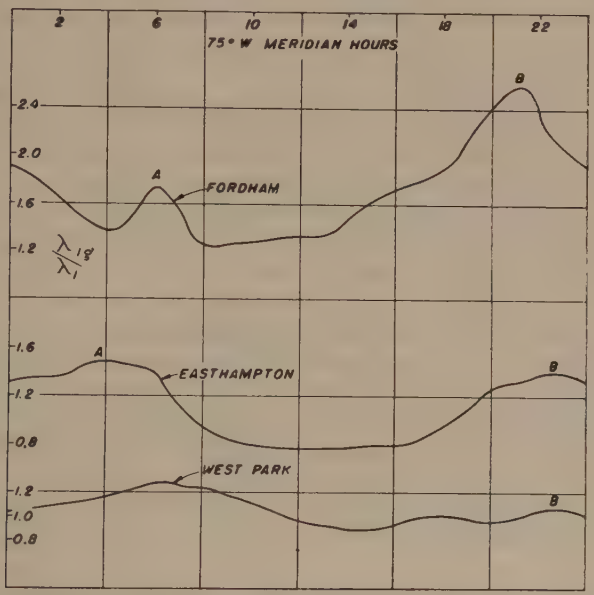


Fig. 12. Diurnal variation of the ratio, $\frac{\lambda_1 g}{\lambda_1}$, at three locations. The letter *A* indicates the time of maximum conductivity and *B* the time of minimum conductivity.

Table 3 summarizes the observations taken at Easthampton. The third line gives the percentage change of night values over the corresponding day values. The minus sign indicates a decrease and the positive an increase. The table is made up of 268 observations of positive conductivity and 220 of negative.

Table 3. *Conductivities in 10^{-4} E. S. U.*

	λ_1	λ_{1g}	λ_2	λ_{2g}	Λ	Λ_g
Day	0.681	0.563	0.469	0.437	1.150	1.000
Night	0.587	0.788	0.324	0.524	0.911	1.312
Percentage Change	— 14	+ 40	— 31	+ 20	— 21	+ 31
	$\frac{\lambda}{\lambda_2}$	$\frac{\lambda_1 g}{\lambda_2 g}$	$\frac{n_1}{n_2}$	$\frac{\lambda_{1g}}{\lambda_1}$	$\frac{\lambda_{2g}}{\lambda_2}$	$\frac{\Lambda_g}{\Lambda}$
Day	1.45	1.29	1.58	0.83	0.93	0.87
Night	1.81	1.50	1.63	1.34	1.62	1.44

550 . 389 : 551 . 594 . 18

The Equatorial Electrojet as Detected from the Abnormal Electric Current Distribution above Huancayo, Peru, and elsewhere.

By

Sydney Chapman.*

With 13 Figures.

Summary. The abnormally large range of the daily variation of the horizontal (or north) component of magnetic force over Huancayo in Peru indicates the daily rise and decline of a concentrated eastward electric current above that station, superposed on the normal current distribution responsible for the daily magnetic variation S_q. The name *electrojet* is suggested for this concentrated current. New investigations indicate the occurrence of the electrojet also over Africa and India. To determine the height, intensity, width and return current flow of the electrojet, it is necessary to determine the abnormality in the daily range of the vertical (and perhaps also of the east) force, at stations north and south of the electrojet. It is suggested that the Bombay and Manila daily Z variations already confirm the existence of the abnormality also in this element. Illustrative calculations are given that will be helpful in interpreting the proposed new data.

Zusammenfassung. Die außergewöhnlich große Amplitude der Tagesschwankung der Horizontal- (oder Nord-) Komponente der magnetischen Feldstärke über Huancayo (Peru) weist auf einen täglichen Anstieg und Abfall eines konzentrierten, nach Osten fließenden elektrischen Stromes oberhalb dieser Station hin, der der normalen Stromverteilung überlagert ist, auf die die magnetische Tagesschwankung S_q zurückgeführt werden muß. Für diesen konzentrierten Strom wird die Bezeichnung „*Elektrostrahl*“ (*electrojet*) vorgeschlagen. Aus neuen Untersuchungen läßt sich das Auftreten des Elektrostrahls auch über Afrika und Indien nachweisen. Um Höhe, Intensität, Breite und Rückfluß des Elektrostrahles zu berechnen, ist es notwendig, die Abweichungen der Tagesschwankung der Vertikal- (und eventuell auch der Ost-) Komponente der Feldstärke an Stationen nördlich und südlich des Elektrostrahls zu bestimmen. Es wird gezeigt, daß vielleicht bereits der Tagesgang der

* Research Associate, California Institute of Technology, April 1950 to March 1951, under Signal Corps Project No. 24—172B; on leave from Oxford University.

Vertikalintensität Z in Bombay und Manila das Auftreten dieser Anomalie auch bei diesem Element bestätigt; die notwendigen Berechnungen zum Verständnis dieser neuen Ergebnisse werden durchgeführt.

Résumé. L'amplitude anormalement grande de la variation diurne de la composante horizontale (ou nord) de l'intensité du champ magnétique à Huancayo (Pérou) semble indiquer l'augmentation et la diminution journalières d'un courant électrique concentré s'écoulant vers l'Est au-dessus de cette station et qui se superpose au courant normal auquel il faut attribuer la variation magnétique diurne S_q. On propose pour ce courant concentré le nom de „*jet électrique*" (*electrojet*). De récentes recherches permettent de retrouver également ce jet électrique au-dessus de l'Afrique et de l'Inde. Pour déterminer l'altitude, l'intensité, la largeur et la branche de retour du jet électrique, il faut mesurer les écarts de la variation diurne de la composante verticale (et éventuellement de la composante Est) de l'intensité du champ en des stations situées au Nord et au Sud du jet. On montre que peut-être la marche diurne de l'intensité verticale Z à Bombay et à Manille révèle déjà cette anomalie de cet élément; on effectue les calculs nécessaires à la compréhension de ces nouveaux résultats.

1. Introduction.

In the year 1922 the Department of Terrestrial Magnetism (D.T.M.) of the Carnegie Institution of Washington (C.I.W.) instituted the magnetic observatory at Huancayo, Peru (since amicably transferred to the government of that country). Huancayo (12°.0 S, 75°.3 W; geomagnetic latitude 0°.6 S) is nearly on the magnetic equator, which now crosses the 75° W meridian in latitude 13°.3 S.

The magnetographs soon revealed a surprising fact: that the quiet day solar daily magnetic variation (S_q) in the element H (horizontal magnetic intensity) is there abnormally large, although in Z and D, the vertical intensity and declination, it is normal.

Occasionally, in association with solar flares and radio fade-outs there is an augmentation (S_{qa}) of S_q, over the sunlit hemisphere, for a period ranging from a few minutes to an hour or two; S_{qa} (H) shows much the same abnormality at Huancayo as S_q (H), when this station is on that hemisphere.

The lunar daily magnetic variation in the same element — L (H) — is even more abnormally large at Huancayo than S_q and S_{qa}.

Geomagnetic disturbance, on the contrary, is apparently normal at Huancayo in all three elements[1]. At Huancayo S_q (H) is abnormal chiefly in its range, not in its type: as at other tropical stations, the S_q (H) variations during the night are small, and during the day they consist of a rise to and a fall from a maximum value at about 11 a. m. The range is about $2^1/_2$ times as great at Huancayo as at Batavia.

[1] See my paper (to appear in No. 3/4 of vol. 19 of Geofisica pura e applicata) on 'The Normality of Geomagnetic Disturbance at Huancayo'.

2. Previous Discussions.

(*a*) A. G. McNISH[1] in 1937 made an admirable study of this Huancayo phenomenon. It included a spherical harmonic representation of S_q (for the equinoxes, in the sunspot minimum year 1923) based on 5 American stations alone, namely (1) Agincourt (Canada); (2) Cheltenham, Md., U. S. A.; (3) Vieques (Puerto Rico); (4) Huancayo (Peru); (5) Pilar (Argentina). From his analysis he constructed a current diagram showing the overhead daytime current system over America at 11 a. m., 75° W meridian local time (Greenwich time 16^h); his diagram, here reproduced as Fig. 1, shows the currents at that time from the Greenwich meridian (0°) to 135° W; the five stations on which the diagram is based are shown thereon. For comparison he drew also the corresponding part of the current diagram constructed by J. BARTELS from my spherical harmonic analysis of S_q (for the equinoxes in the sunspot minimum year 1902), based on 21 widely distributed stations, which included 5 American stations, namely (2), (3), (5) as in McNISH's analysis, and Sitka (57° N, 135° W) and Laurie Island, S. Orkneys (60°.8 S, 45° W); Huancayo had not been instituted when this analysis was made. This current diagram is reproduced here as Fig. 2. Clearly Fig. 1 shows a much stronger eastward current flow than Fig. 2, between the two "foci" of the northern and southern daytime current systems. McNISH suggested the following explanation of this enhancement of the S_q low-latitude daytime currents over America. According to the dynamo theory of S_q, for an ideal earth for which the geographic and magnetic axes coincide, the main driving electro-motive forces are those induced in middle and higher latitudes, and they impel the current eastward in low latitudes, although this is against the dynamo-induced electro-motive forces there. If, however, the magnetic equator departs from the geographic (as it does most notably

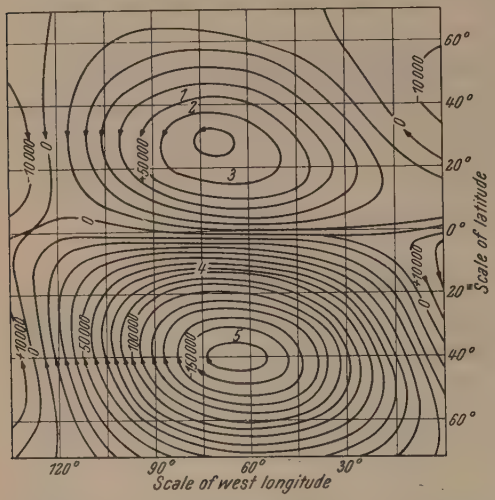


Fig. 1. Part of the external electric current system inferred by A. G. McNISH from the quiet-day solar daily geomagnetic variation (S_q) at five American stations for 1923 (equinoxes); the stations (situated as shown) are (1) Agincourt (Canada), (2) Cheltenham (Md., U. S. A.), (3) Vieques (Puerto Rico), (4) Huancayo (Peru) and (5) Pilar (Argentina). The current system is shown for the epoch 11 a. m. local time of the meridian 75° W. Between adjacent current lines the flow is 10000 amperes.

[1] A. G. McNISH, Bull. **10**, Int. Assoc. Terr. Magn. Electr. pp. 271–280 (1937); summarized in *Geomagnetism*. pp. 695, 775–9.

over America), then between the two equators the local electromotive forces are helping instead of hindering the current flow, which may therefore be expected to show much enhancement, as observed.

Comments on (*a*). McNish's and my spherical harmonic analyses of S_q, though based on different material, show agreement in the *general type* of the daytime current system; also the foci are in similar positions—in Fig. 1 they are at 27° N and 40° S, at about $11^h\ 20^m$ and $11^h\ 50^m$ local 75° meridian time respectively, whereas in Fig. 2 they are at $\pm$ 40° latitude and about $10^h\ 20^m$ local time (the meridian on which these foci lie will be called the focal meridian). The diagrams differ most, and greatly, in their total current intensity; in Fig. 1 the total northern flow is about 72000 amperes, and the total southern flow is about 163000 amperes, so that 235000 amperes flow between the two foci. In Fig. 2 the corresponding figures are 62000, 62000 and 124000 amperes. The maximum eastward current intensity in Fig. 1 is 5500 amperes per degree of latitude, and in Fig. 2 about 2300. The former value is mainly determined by the value of the maximum daytime departure of H at Huancayo from the daily mean; this is 80 γ (the S_q *range* being 110 γ). The value 2300 amperes/degree from Fig. 2 should be determined by the corresponding H value for low latitude stations not showing the Huancayo anomaly; it seems likely in fact to be too small (§ 5), and should probably be increased by 60 or 70 per cent., reducing the discrepancy with Fig. 1.

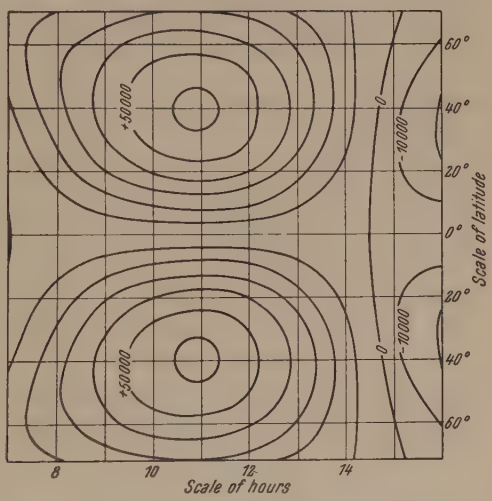


Fig. 2. Part of the external electric current system for S_q derived by J. Bartels from the analysis by S. Chapman of data from 21 stations, for 1902 (equinoxes). Between adjacent current lines the flow is 10000 amperes.

But Fig. 1, based on a process (spherical harmonic analysis) which has the smoothing property, makes no allowance for the possibility (which the recent observations by Director Giesecke—cf. § 4—have shown to be a fact) that the H range at Huancayo is typical of only a narrow band of latitude. Hence Fig. 1 indicates a gradual growth from the foci to a broad maximum of current intensity appropriate to S_q (H) at Huancayo; it may seriously over-estimate the current intensity over a broad band, and incidentally also the total current intensity elsewhere in both the northern and southern daytime circuits.

McNish's dynamo theory of the Huancayo effect must also lead to

a fairly smooth distribution of the S_q (H) range and current intensity, contrary to the facts newly revealed by observation (§ 5).

The observed lateral limitation of the band of abnormal S_q (H) range thus shows that MCNISH's explanation of the phenomenon indicates at most a contributory cause, and perhaps not the main cause.

[Cf. also the remarks by J. EGEDAL at the end of the second paragraph of the quotation from him in section (*c*); also those by D. F. MARTYN quoted in § 4.]

(*b*) J. A. FLEMING, in 1945, during a visit to England, asked my opinion as to desirable items to be put on the program of D.T.M. Among others, I urged the need for a survey of S_q (H) along the meridian of Huancayo, to the north and south of the station, in order to determine over how wide a belt of latitude the range of S_q (H) is abnormally great. I mentioned also that a few years earlier, about 1942, I had realized that observations of S_q in H and D made in Uganda by A. WALTER, then Director of the East African Meteorological Service, disclosed a similar abnormality of S_q (H) there, in a region lying between the geographic equator and the magnetic equator, which there lies in northern latitudes. After long delay I published a note[1] on this subject in 1948, also recommending that the observations should include S_q not only in H but in Z.

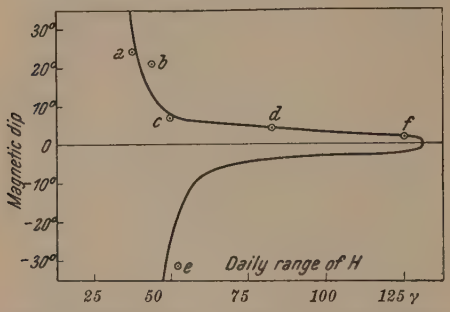


Fig. 3. The distribution of the range of the quiet-day solar daily variation of horizontal force, S_q (H), at six observatories, plotted by J. EGEDAL against the magnetic dip I.

a: Bombay; b: Manila; c: Madras;
d: S. India; e: Java; f: Huancayo.

(*c*) Meanwhile in 1947 J. EGEDAL[2] discussed the width of the band of abnormal S_q (H) range. His study was based on the data for six observatories, given in the following Table, taken from his paper.

	Lat.	Long.	Geomag. Lat.	Dip (I)	$S_q(H)$ range
(a) Alibag (Bombay)	18°.6 N	72°.9 E	9.5	24.4	38.5 γ
(b) Antipolo (Manila)	14°.6 N	121°.1 E	3.3	16.2	45.5 γ
(c) Madras	13°.1 N	80°.2 E	3.1	7.6	49.5 γ
(d) Kodaikanal (S. India).	10°.2 N	77°.5 E	0.6	4.3	82.5 γ
(e) Batavia (Java)	6°.2 S	106°.8 E	— 17.6	— 31.6	52.3 γ
(f) Huancayo	12°.0 S	75°.3 W	— 0.6	+ 2.3	125 γ

To quote from his discussion:

In the figure (here reproduced as Fig. 3) "the range for H is given as

[1] S. CHAPMAN, Terr. Mag., **53**, 247–250 (1948).

[2] J. EGEDAL, Terr. Mag., **52**, 449–451 (1947).

abscissa and the magnetic inclination" (or dip, I) "at the observatory in question as ordinate. The full curve is drawn as far as the values permit symmetrical to the line corresponding to magnetic inclination $= 0°$. From the Figure it will be seen that the values for Kodaikanal and Huancayo are in accordance with one another. If geomagnetic latitude is used as ordinate the two values are not in accordance with one another. The great augmentation of the range of H in a narrow zone near the magnetic equator seems to indicate that the variation is caused by a varying electric current flowing in a very narrow zone of the atmosphere above the magnetic equator. The deviations from the normal value for Kodaikanal and Huancayo indicate that the current is flowing in a height of about 100 km."

"Such a current also produces a daily variation in the vertical force (Z) to both sides of the magnetic equator. Even if the diurnal variation of Z in these regions is remarkably great, it seems too small in relation to the values for H, but, when the effects of the currents induced in the earth are considered, there seems to be a better accordance between the variations of the two elements. McNish points out that at places where the magnetic equator is situated far from the geographic equator, an augmentation of the normal diurnal variation will occur. This may explain the augmentation of the diurnal variation at Huancayo, lying between the two equators, but for Kodaikanal, lying to the north of both equators about 200 km. from the magnetic equator, the explanation does not seem applicable."

"According to P. O. Pedersen a difference between the conductivity of the upper atmosphere at Huancayo and Kodaikanal will exist on account of the difference between the values of H at these places. The difference between the ranges of H at these places may be explained in this way, but the difference between the ranges at Kodaikanal and Madras certainly do not originate from a difference in the conductivity at these last mentioned places."

"It is obvious that more data concerning the range of H at the magnetic equator are needed, as well at places where the distance between the geographic and magnetic equators is greatest as near the places where the two equators are crossing each other."

Comment on (*c*). The fact that a smooth curve can be drawn through the points *a*, *b*, *c*, *d*, *f* in Fig. 3 is of decided interest, but there seems no good ground for completing the peak of the curve symmetrically as is there done.

The magnetic dip is an approximate measure of the *local* magnetic latitude, or distance from the actual magnetic equator (where the dip I is zero). The fact that five points lie smoothly with respect to I, and do not lie smoothly with respect to *geomagnetic* latitude, suggests that the Huancayo phenomenon is determined by the local distribution of the magnetic field and not by the worldwide distribution—on whose dipole component depend the *geomagnetic* axis and geomagnetic equator, from which geomagnetic latitude is measured. But as only two of the six

observatories on which Fig. 3 is based have an outstanding H range (namely d and f) the data must be considered too few to permit any reliable conclusions as to the band width of the anomaly of S_q (H).

In low latitudes the local magnetic latitude is approximately half the dip, so that the band width of the Huancayo phenomenon according to Fig. 3 should only be about 4° wide. The new observations (§ 4) indicate that this is definitely too small; hence the conclusions drawn from Fig. 3, as to the height and narrowness of the abnormal current flow, must be re-examined.

3. The A.T.M.E. Investigations.

At the Oslo meeting (1948) of the Association of Terrestrial Magnetism and Electricity (A.T.M.E., which is a part of I.U.G.G., the International Union of Geodesy and Geophysics), a committee (No. 11) was appointed, with Mr. J. EGEDAL as chairman, "to promote observations of daily variation of the horizontal force between and near the geographic and magnetic equators"[1].

During the discussion of the Huancayo phenomenon at that meeting, D. F. MARTYN remarked[2]: "MCNISH's theory does not seem able to account for the observed effects. In essence his theory leads to approximate symmetry of the variations about the magnetic equator, but not to any great enhancement there. This approximate symmetry can also be deduced from the "dynamo theory" when account is taken of the term introduced by non-coincidence of the magnetic and geographic poles.

He continued: "It seems more likely that the enhancement is due to an increase of conductivity of the ionosphere near the magnetic equator. This could be produced by the raising of the ionosphere in this region by the mutual influence of the current therein and the earth's total field. The conducting region would thereby be raised several kilometres, to a region of lower pressure, and hence of enhanced conductivity. If this explanation be correct then the six-hourly harmonics of both the solar and lunar variations (but especially the former) should be abnormally large near the magnetic equator, and their phase (of maximum) should coincide with the phase of maximum in the total variation."

As the report of the A.T.M.E. Committee will show, it has promoted and assisted valuable observations of the daily variation of H in Africa, America, India, and the Philippines, using LA COUR's quartz horizontal magnetometers (Q.H.M.), which are specially suited to the purpose. This work has been partly supported by a grant from U.N.E.S.C.O. towards the cost of the investigation. The present paper has been written partly in preparation for the discussion of the report at the forthcoming A.T.M.E. meeting at Brussels in August 1951, when new decisions may be expected as to the continuance and extension of the investigation of this very interesting phenomenon.

---

[1] A.T.M.E. Bull. **13** (Washington, 1950); see pp. 25, 26, 28, 431, 541.
[2] Loc. cit., p. 431.

4. The New Observations.

The most comprehensive set of measurements of the range of S_q (H) in the region of abnormality is that obtained by Mr. A. A. Giesecke, Jr., Director of the Huancayo Observatory; from September to November, 1949, he occupied 14 stations extending in latitude from 16°.2 S to 3°.4 N, the spread in longitude being small, from 73°.6 W to 80°.6 W. The H ranges were expressed as ratios of that at Huancayo. These ratios are plotted in Fig. 4 against latitude (this diagram is due to Mr. Giesecke and is reproduced here with his permission). It may be hoped that the chain of observations will be extended further southwards (perhaps on a coastal journey), but on the present evidence the band width of the abnormality would appear to be 10° wide (about 1100 km.). Huancayo seems to be about 1° north of the centre of the band, which I estimate to be at 13°.1 S, very near to, possibly slightly north of, the local latitude of the magnetic equator.

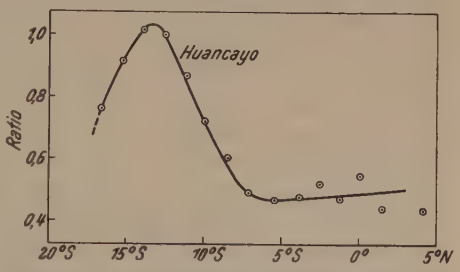


Fig. 4. The ratios of the quiet-day H ranges S_q (H) at 14 American stations (temporarily occupied) to that at Huancayo observatory, plotted against geographical latitude, by A. A. Giesecke.

Valuable but less extensive series of observations in Togoland and in India show the presence of abnormal current flow in those longitudes also, where the magnetic equator lies in northern latitudes. In India the greatest S_q (H) range observed is just on the magnetic equator: in Togoland it is nearly a degree north of the magnetic equator. There is some indication that at these northern sites the band width of the abnormality may be rather greater than near Huancayo.

The close approach to symmetry, in Fig. 4, with respect to the latitude of Huancayo, shows that the abnormal current lies nearly overhead there, and hence it is natural that S_q (Z) at Huancayo is normal; the normality of S_q (D) indicates that the current flows practically perpendicularly to the local magnetic meridian (there about 8° E, in 1922).

5. The Distribution of the Normal and Abnormal Currents.

The detection of the S_q (H) abnormality in Africa and India, north of the equator, as well as in South America, shows that it is a widespread phenomenon. At present it is not known whether it occurs also near the longitudes in which the magnetic and geographic equators cross over; this information should be sought by further observations.

Wherever the abnormality may be found it must indicate the presence of a fairly narrow band of enhanced eastward current during the morning and early afternoon hours of local time, with its greatest concentration and intensity on the focal meridian, an hour or so before local noon.

This may be considered as superposed on a "normal" current system such as that partly represented in Fig. 2, based upon stations widely spread, but avoiding the bands of abnormality.

It is convenient to have a short name for any specially concentrated electric currents in the atmosphere. By anology with the name "jet stream" introduced by meteorologists for the concentrated wind streams observed near the tropopause during the recent world war and since, the name *electrojet* is here suggested for such concentrated electric currents in the ionosphere. According to this nomenclature, two types of electrojet are now known to exist: those that flow (in different directions) along the auroral zone—the *auroral electrojets*—and *equatorial electrojet* considered in this paper.

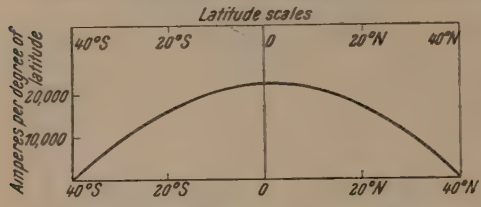


Fig. 5. The 'normal' distribution of external eastward current intensity as a function of geographical latitude along the meridian of the foci of the S_q current system (the curve is also an approximate representation – on a suitable scale – of the daily range of H as a function of latitude).

The "normal" distribution of both the S_q (H) maximum departure from the daily mean, and of the current intensity between the S_q foci, is shown in Fig. 5 as a parabola; it corresponds to Fig. 2 in showing the interfocal distance as 80° of latitude. The curve is drawn as a parabola, but its true form is not certain, and will indeed depend on the definition of the word "normal". Interpreted as a current intensity diagram the maximum current intensity is shown as 2325 amperes per degree of latitude, or 2.1×10^{-5} e.m.u./cm. ($= i_0$), so that the total area under the curve, which represents the total normal inter-focal current, is $^2/_3 \times 2325 \times 80 =$ 124000 amperes, as already stated in paragraph 2.

The corresponding contribution of H at the earth's surface, on the equator and the local meridian, is slightly less than $2\pi i_0$ or 13γ (this is the value corresponding to an infinite uniform plane current flow of intensity i_0).

To this must be added the contribution due to the earth currents induced by the variation of the magnetic field of the overhead current; on the centre line of a band of current which is nearly uniform over a breadth of at least 2000 km., such as that in the centre of Fig. 5, this earth current contribution to H seems likely, from the spherical harmonic analysis of the S_q field, to be about 0.4 of the whole, or two thirds of the outside contribution, namely 9γ, making a total of 22γ. This fits reasonably well with the maximum departure (32γ) from the daily mean H at Alibag, Bombay, for March 1922–33 (cf. C.I.W. publication 580, 1947, p. 144), if some allowance is made for reduction to a sunspot minimum year, to which Fig. 2 refers; see also Mr. EGEDAL's table in paragraph 2.

The true current, however, over the tropics, shortly before noon, may correspond rather to the daytime excess of H over the night-time value

than to the daytime maximum departure from the daily mean, on the assumption that the currents die away almost completely at night. If so, the value of the normal S_q (H), and of the normal daytime current intensity, should be greater than that for Fig. 2 by about 50 per cent., raising the maximum i_0 to about 3500 amperes per degree of latitude.

For the present, however, no definite value will be assumed or adopted for the normal current distribution. It will merely be supposed to have the parabolic form shown in Fig. 5, and to extend between $\pm 40°$ latitude (though actually the latitudes of the foci may vary somewhat with the longitude).

The *abnormal* current will be superposed on this. Its peak latitude certainly varies with the longitude; over Peru, Director GIESECKE's data show its peak to be at 13° S, whereas in Africa and India the peak is in northern latitudes. Here special consideration is given to the Huancayo case, because of the greater amount of data available therefore.

The abnormal band of eastward current superposed on the normal current flow does not encircle the earth; a few hours before and after the daily maximum of S_q (H), that is, a few hours of longitude to the east and west of the focal meridian, S_q (H) has sunk almost to its night time value, indicating that there the abnormal *eastward* current is only just beginning to flow, or has just ceased. As the current must complete a circuit, there must also be a westward abnormal flow (presumably both to the north and south of the abnormal band of eastward current), turning towards the equator in the forenoon to flow eastward, and away from the equator in the afternoon, to flow westward. On the diagram of current intensity along the focal meridian, the return flow will correspond to depressions *below* the normal curve, to the left and right of the superposed abnormal peak, the combined area between the normal curve and the depressions in the combined curve being equal to the peak area above the normal curve. The curve representing the distribution of the value of H along this meridian, at the ground, due to the combined distribution of normal and abnormal current, will have a fairly similar (but not identical) shape. This is illustrated by the full line in Fig. 6, which shows a parabola (partly in broken line), corresponding to the "normal" distribution of H as in Fig. 5; together with a central peak at latitude 13° S, and two depressions on either side of it; the difference between the parabola and the peak and depressions represents the contribution to H from the overhead abnormal current band and its return flows, and from the earth currents induced thereby. The full curve of the ground distribution of the S_q (H) range, between the foci, has been drawn to fit this conception to Director GIESECKE's data from Fig. 4; the diagram will give the supposed distribution of the ratio of the S_q (H) range at any inter-focal latitude (for the longitude of Huancayo at 11 a. m.), to the corresponding range at Huancayo.

The next step must be to try to infer from Fig. 6 the probable distribution and location and intensity of the abnormal current flow, and

the corresponding distribution of S_q (Z), by observation of which, as well as by more extended observations of S_q (H), these particulars concerning the currents can be determined or made more precise.

6. An Infinitely Long Straight Linear or Cylindrical Current.

The field first considered is that of an infinitely long straight current, of total strength C e.m.u., flowing either along a mathematical line, or along a cylinder of circular cross section, over which the current intensity is a function only of distance from the axis. The lines of force are circles round the axis, and the intensity at distance r from the axis (outside the

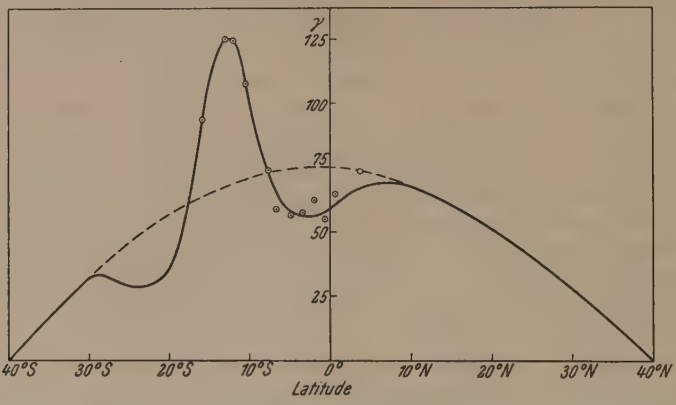


Fig. 6. Illustrative diagram of the S_q (H) range as a function of latitude, on the meridian of Huancayo, showing the peak and the depressions (superposed on the 'normal' curve) due to the abnormal eastward and return current flow.

cylinder, if the current is distributed as stated) is $2\,C/r$. If the curvature of the earth is neglected, and the current is supposed to flow horizontally (eastward) at a height h above the surface, then at distance z to the south of the vertical plane through the current-axis, the horizontal component H due to the current is $2\,Ch/(z^2 + h^2)$, and the (downward) vertical component Z is $2\,Cz/(z^2 + h^2)$. Let H_0 $(= 2\,C/h)$ be the value of H at $z = 0$. Then elsewhere, $H = H_0\,h^2/(z^2 + h^2)$, $Z = H_0\,z\,h\,(z^2 + h^2)$.

The distribution of H and Z with respect to z is shown in Fig. 7; Z has a maximum value $^1/_2\,H_0$ at $z = h$.

The H curve, which has its peak directly under the current, falls away to one-tenth H_0 at $z/h = \pm 3$: if this value of z be equated to 7° of latitude (see Fig. 4), or 780 km., the height inferred for h would be 260 km. But this inference would be quite unfounded, because it is necessary to consider also how the return flow, and the induced earth currents, influence the H distribution. So far as the present simple model has any value, however, it suggests that the overhead current will affect the S (Z) variation at places to the north and south of Huancayo

at which $S_q\,(H)$ still shows a substantial fraction of the Huancayo abnormality. The $S_q\,(Z)$ anomaly, on this model, will decline only slowly with increasing z, e.g., at $z = \pm 2\,h$ its range is still $0.4\,H_0$, instead of $0.5\,H_0$ as at $z = \pm h$; and at $z = \pm 3\,h$, where the excess $S_q\,(H)$ variation is reduced to the fraction 0.1, the excess range of Z is still $\pm 0.3\,H_0$.

7. The Influence of Earth Currents.

The field induced by a varying concentrated electric current in the ionosphere has been ably discussed by A. G. McNish[1] in connection with the auroral zone currents. His discussion can be adapted to the present

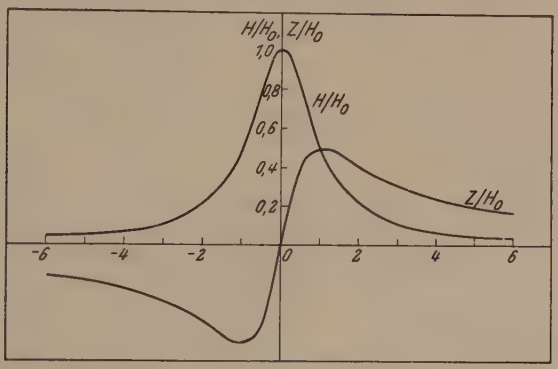


Fig. 7. The variation of the horizontal and vertical magnetic field components at the ground due to an infinite straight horizontal electric current flowing at a height h above a plane earth; the ordinates represent fractions of H_0, the surface field directly below the current, the abscissae are expressed in terms of h as unit.

case also; it was guided by the information about the distribution of electric conductivity k within the earth provided by the studies of the S_q, L and disturbance fields, by Schuster and Lamb, Chapman, Price and Lahiri[2]. These indicate that k is small (apart from the oceans) down to 250 km. depth, and then rises to about 4×10^{-13} e.m.u. It seems likely that in the region of Huancayo the ocean currents have little magnetic effect, owing to their necessary stoppage or diversion at the western coast of South America. Hence, the induced currents will be over-estimated if the earth is assumed to be non-conducting down to 250 km. depth, and below that to have infinite conductivity. On this assumption, the magnetic field of the induced currents, in the region above the infinitely conducting matter, will be that of an image current line[3] equal in intensity to the overhead varying current (and alike in

[1] A. G. McNish, Terr. Mag. **43**, 67–75 (1938).

[2] See *Geomagnetism*, Chap. XXII.

[3] J. C. Maxwell, Electricity and Magnetism, 2nd Ed. 1881, §§ 660, 661, pp. 272, 273.

direction). The depth h' of this image current will be $h + 250$ km. below the surface of the conducting region, that is, $h + 500$ km. below the earth's surface. It will therefore produce a field at the surface of the earth whose horizontal component is the same as that due to an overhead current C at the height h', and whose vertical component is the same as that of a current $-C$ at the same height, vertically above the "actual" overhead current. Thus the "induced" surface field has components $H' = 2Ch'/(z^2 + h'^2)$, and $Z' = -2Cz/(z^2 + h'^2)$.

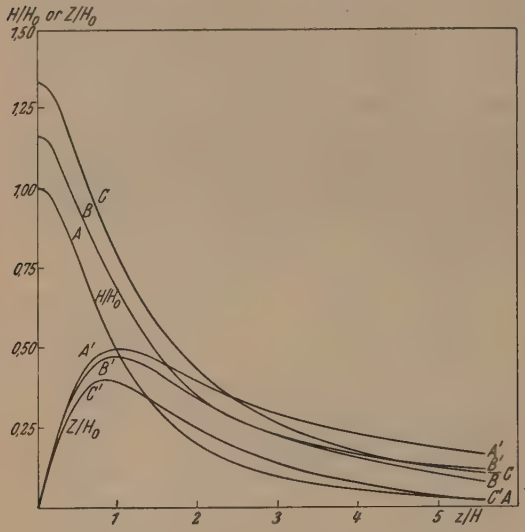


Fig. 8. The latitude variation of the horizontal and vertical components of the surface magnetic field of an infinite straight horizontal electric current at height h above a plane earth, with and also without induced earth currents. The curves A, B, C refer to the horizontal component, and the curves A', B', C' to the vertical component. The curves A, A' refer to the case without induced currents; the others refer to the combined field of the overhead line current and the induced earth currents, B, B' for the case when the height of the overhead current is 100 km., and C, C' for the case when $h = 250$ km. The ordinates represent fractions of H_0, the field at the surface due solely to the line current, at the points immediately beneath it. The abscissae are distances expressed in terms of h as unit. (Linear current with or without earth currents; no return flow.)

If $h = 250$ km., then $h' = 3h$; if $h = 100$ km., then $h' = 6h$.

Fig. 8 shows how the combined H and Z for the single overhead current C and its induced earth currents are affected by the value of the height h in relation to the model earth considered. The H field is materially increased by the induced currents, the more so, the greater the value of h; the vertical force is reduced, by only a small amount within a distance h, but the reduction is considerable for $z > 2h$.

8. The Effect of the Return Flow; Linear Currents.

The simplest method of gaining a general idea of the modification of the "pattern" of the S_q magnetic field, at the earth's surface, due to the return flow of the overhead current (§ 6), is to treat the return flow as consisting of one or more horizontal line (or cylindrical) currents of infinite length, parallel to the primary current, and together carrying a total current $-C$. The height of the return current is not necessarily the same as that (h) of the primary current; but for definiteness, and because it seems physically not improbable, the return flow will here be supposed to consist of two equal currents each $-\frac{1}{2}C$, at height h, and at distances $\pm fh$ north and south of the primary current.

In this case the combined direct external field H of the flow C and the two return currents $-{}^1/_2\,C$, immediately below the current C, is $(2\,C/h)\,f^2/(f^2+1)$; if $f=1$, 2, 3 respectively, this is 0.5, 0.8, and 0.9 times $(2\,C/h)$. Fig. 9 shows the distribution of H and Z for these three different cases, neglecting the effect of earth currents. These curves are drawn only for $z>0$; the H curve is symmetrical with respect to z, the Z curve antisymmetrical, as in Fig. 7. The curves of Fig. 7 are repeated (in broken line) in Fig. 9 to give a standard of comparison.

Not unnaturally, the smaller the value of f, that is, the closer the return currents to the flow C, the smaller their combined field at the earth's surface. For $f=1$ the northward component of H is at most only ${}^1/_2\,H_0$, and extends over a distance less than h north and south of the current C, after which it is reversed; as f increases to 3, the range of northward H at the surface grows steadily, as also the maximum value of H (below C); and the southward component, beneath and to either side of the return currents, becomes much greater numerically than the field H of the current C alone.

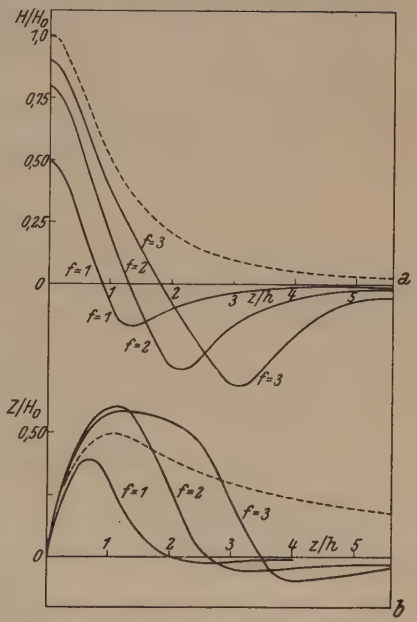


Fig. 9. The latitude variation of the horizontal and vertical components of the surface field of a linear horizontal electric current C at height h above a plane earth, and of two parallel opposite currents $-{}^1/_2\,C$ at the same height, and at a distance $f\,h$ from the main current. The broken curves refer to the field of the main current alone. The curves are drawn for $f=1,2,3$. The ordinates represent fractions of H_0, the maximum surface field of the current C alone; the abscissae are expressed in terms of h as unit (linear flow and return currents, no earth currents).

For $f=1$, the Z field is everywhere numerically less than that of the current C alone, and is reversed beyond $z=\pm 2\,h$; for $f=2$ and $f=3$ the Z field exceeds that of C alone for some distance from C: between the current C and either half of the return flow, the latter current and the flow C have Z fields in the same direction; their combined field Z is reduced by the other half of the return flow, but when f exceeds about 1.5 the near current ${}^1/_2\,C$ acts more powerfully than the further one; the negative values of Z are everywhere relatively small.

9. A Band of Uniform Current Flow.

The next step towards a more realistic model of the abnormal currents responsible for the Huancayo S_q (H) phenomenon is to treat the currents not as linear (or cylindrical) but as distributed over a band. There is

much scope for elaboration of the mathematical discussion, but at present it does not seem worth while to carry the treatment farther than will suffice to guide the task of further observation, particularly of $S_q\,(Z)$, so that the new data obtained thereby may be as useful as possible.

Hence the currents will still be supposed to flow all in one direction or the opposite (for the return flow), to or from infinity; on account of the actual limitation of the abnormal current system in longitude, the present calculations will somewhat over-estimate $S_q\,(H)$ and under-estimate $S_q\,(Z)$.

The abnormal *eastward* current over Huancayo will be represented by a "band" current of width $2\,c$ (in the north-south direction) at height h;

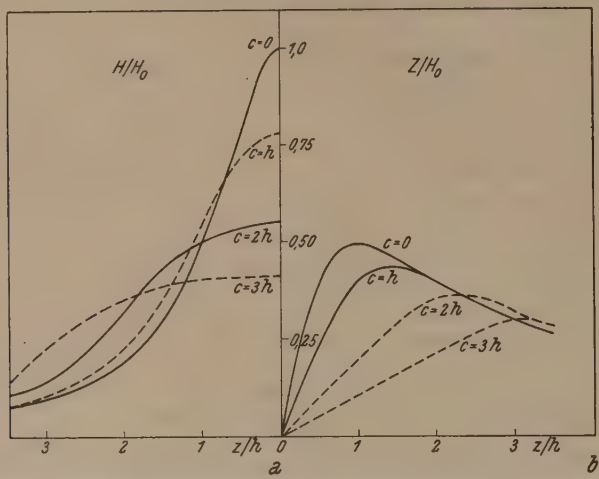


Fig. 10. The latitude variation of the horizontal and vertical components of the surface field of a horizontal band of eastward electric current of width $2\,c$ at height h above a plane earth; for $c/h = 0, 1, 2, 3$ (band current; no return flow, no earth currents).

it would not be difficult to treat the case of a non-uniform distribution of current intensity across the band, but here the distribution will be supposed uniform. A simple integration of the results for H and Z for a linear current gives the following values at distance z south of the axis of the band current:

$$H = \frac{C}{c}\tan^{-1}\frac{2\,c\,h}{h^2+z^2-c^2},\quad Z = \frac{C}{2\,c}\ln\frac{(z+c)^2+h^2}{(z-c)^2+h^2}.$$

These results naturally tend to those given in § 6 for the linear current C when c tends to zero.

The value $H_0\,(c/h)$ of H immediately below the axis of the current band is now $(C/c)\tan^{-1} 2\,c\,h/(h^2-c^2)$ or $(2\,C/c)\tan^{-1}(c/h)$; in terms of H_0 for the linear current $(c=0)$, writing $c/h = k$,

$$H_0\,(k)/H_0 = (1/2\,k)\tan^{-1}\,2\,k/(1-k^2) = (\tan^{-1} k)/k;$$

this ratio slowly decreases with increasing k, from 1 when $k=0$; when $k = 1,\ 2,\ 3$, or $c = h,\ 2\,h,\ 3\,h$ respectively, the values of the ratio are

0.785, 0.554, 0.416. The $h\,H/2\,C$ curves for $c = h,\ 2\,h,\ 3\,h$ are shown in Fig. 10 (left half), together with the curve for $c = 0$ reproduced (in part) from Fig. 7. The H curve has a lower peak, the more distributed the current C, that is, as k increases; and the H curves become flatter, e.g., the values of z/h for which the curve falls to one-tenth its maximum ordinate are 3.55, 4.56 and 5.61 respectively, as against 3 for the linear current C.

As regards Z, it is zero under the band axis centre ($z = 0$), and attains its maximum at $z_{\max}$, where

$$z_{\max}^2 = h^2 + c^2$$

(agreeing with the result found in § 6, when $c = 0$). Also

$$\frac{Z_{\max}}{H_{\max}} = \frac{\ln\left[k + (1 + k^2)^{\frac{1}{2}}\right]}{2 \tan^{-1} k},$$

which tends to 0.5 (as in § 6) when c tends to zero; for $c/h = 1, 2, 3$, the respective values of $Z_{\max}/H_{\max}$ are 0.56, 0.65 and 0.73. Curves showing $h\,Z/2\,C$ are given in the right half of Fig. 10 for $c = h,\ 2\,h,\ 3\,h$, together with that for $c = 0$ reproduced in part from Fig. 7. As c/h increases from 0 to 3, the initial slope and the maximum of the Z curves decrease, but beyond about $c = 4\,h$ the curves differ little.

10. A Parallel Band of Parabolically Distributed Current.

The next simplest case of a distributed band of unidirectional current is probably that in which the current intensity varies parabolically across the band, as in Fig. 5; in this case, if i_0 is the maximum current intensity, and $2\,c$ the width of the band,

$$i = i_0\,(1 - y^2/c^2),$$

where i denotes the current intensity at the distance y from the band axis. The total current $C' = 4\,c\,i_0/3$.

In this case, at a point P on the ground, with south coordinate z, the values of the horizontal and vertical components of magnetic intensity due to the band (situated at height h) are given by

$$X = 2\,i_0\,h \int_{-c}^{c} \frac{(1 - y^2/c^2)\,dy}{h^2 + (z - y)^2}, \quad Z = 2\,i_0 \int_{-c}^{c} \frac{(1 - y^2/c^2)\,(z - y)\,dy}{h^2 + (z - y)^2}.$$

If

$$\tan x_1 = \frac{z - c}{h}, \quad \tan x_2 = \frac{z + c}{h},$$

these integrals may be expressed as follows, by using the transformation $z - y = h \tan x$;

$$H = \frac{3\,C}{2\,c^3}\left\{(c^2 - z^2 + h^2)\,(x_2 - x_1) + 2\,z\,h \ln \frac{\sec x_2}{\sec x_1} - h^2\,(\tan x_2 - \tan x_1)\right\},$$

$$Z = \frac{3\,C}{2\,c^3}\left\{(c^2 - z^2 + h^2) \ln \frac{\sec x_2}{\sec x_1} - 2\,z\,h\,(x_2 - x_1) + 2\,z\,h\,(\tan x_2 - \right.$$

$$\left. - \tan x_1) - \frac{1}{2}\,h^2\,(\tan^2 x_2 - \tan^2 x_1).\right\}$$

At $z = 0$,

$$H = \frac{3\,C\,h}{c^3}\left[\frac{c^2 + h^2}{h}\tan^{-1}\frac{c}{h} - c\right],$$

so that

$$\frac{H}{H_0} = \frac{3}{2}\frac{h^2}{c^3}\left[\frac{c^2 + h^2}{h}\tan^{-1}\frac{c}{h} - c\right].$$

When $c = h$, this is 0.8362; this may be compared with $H/H_0 = \pi/4 = 0.7854$ under the centre of the uniform band discussed in § 9. Naturally the field directly under the band centre in the present "parabolic" case is greater than in the case of § 9, though less than for the linear current C. At great distances the ratios of these fields tend to unity, at intermediate distances the field of the parabolic distribution will be slightly less than for the uniform band.

11. Central Current Band Bordered by Return Currents.

The simple case (§ 8) of linear current flow C bordered on each side by equidistant parallel linear return currents $-{}^1/_2\,C$ needs to be generalized to distributed current flow and return. The current distribution in each of the three bands (one flow, two return) will be taken as uniform, for simplicity of calculation; it would be more realistic to consider parabolic distributions in each band, as in § 10, but until detailed vertical force data—$S_q\,(Z)$—are available it is scarcely worth while to do so.

The width of the central current C will be denoted by $2\,c$, and the widths of each return band by $2\,c'$; as in § 8, these currents will be supposed to be at the same height h as the central band. The horizontal and vertical components of the field may be expressed as follows, in terms of the ratio F of either component to the surface horizontal intensity $H_0\,(= 2\,C/h)$ immediately below a *linear* current C at height h (§ 6):

$$F\,(c/h,\ c'/h,\ z/h)/H_0 = f\,(c/h, z/h) - \frac{1}{2}f\,[c'/h,\ (z - c - c')/h],$$

$$- \frac{1}{2}f\,[c'/h,\ (z + c + c')/h],$$

where F may signify either H—in which case

$$f\,(a, b) = \frac{1}{2\,a}\cot^{-1}\frac{1 + b^2 - a^2}{2\,a}$$

—or Z, in which case

$$f\,(a, b) = \frac{1}{4\,a}\left[\ln\{1 + (a + b)^2\} - \ln\{1 + (a - b)^2\}\right].$$

It is readily seen that the following is an alternative expression for F:

$$\frac{c + 2\,c'}{2\,c'}\,[f\,(c/h,\ z/h) - f\,\{(c + 2\,c')/h,\ z/h\}].$$

It is useful to calculate H and Z from both these expressions, in order to check the numerical work.

Such calculations, which (even with these relatively simple formulae) are somewhat laborious, have been made for the case $c = h$, $c' = 2h$, which corresponds in some respects (that is, for the centre lines of the return currents) to the case $f = 3$ in § 8. The results are shown in Fig. 11a (curve A) for H, and in Fig. 11b (curve A') for Z; these curves are drawn in broken lines. These Figures also reproduce, by curves F, F' in chain lines, the curves for $f = 3$ given in Fig. 9a, 9b, for *linear* flow and return currents. Whereas H in the latter case attains its minima nearly under the return currents (z/h only slightly greater—numerically—than 3), in the case of the distributed currents the minima are somewhat further away from the centre, and are distinctly shallower. In Z the notable feature of curve F' is the breadth of the region of high Z, between the flow and return currents; this is much less marked in curve A'.

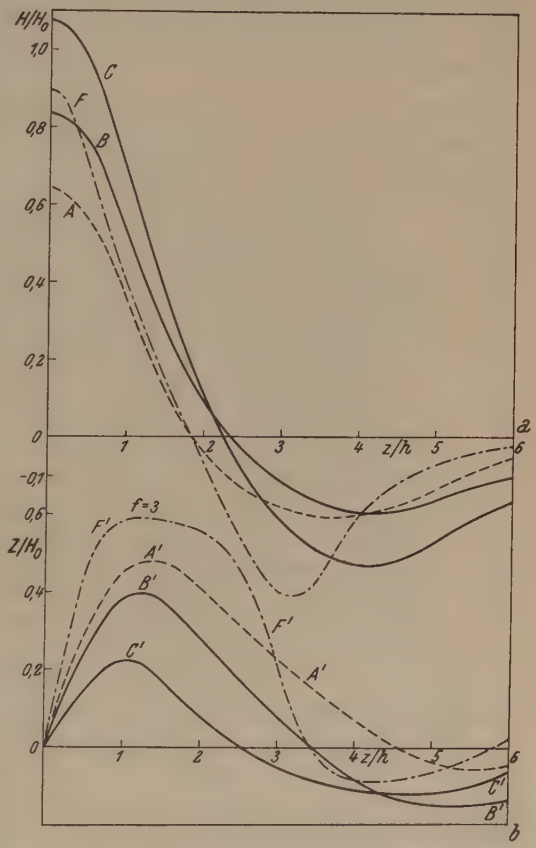


Fig. 11a. Curve A represents the latitude variation of the horizontal component of the surface field of a uniform horizontal band of eastward electric current C of width $2h$, bordered by two equal bands of return current (each $-\frac{1}{2}C$) each of width $4h$; all being at height h above a plane earth. Curves B, C include in addition the field of the induced earth currents, B for the case when $h = 100$ km., and C for $h = 250$ km. The curve F is repeated from Fig. 9, $f = 3$, and shows the direct field of a linear current flow C and two parallel linear return flows $-\frac{1}{2}C$ at distances $3h$ on either side of the current C.

Fig. 11b similarly presents the distribution of the vertical component. (Distributed flow and return, with the induced field; curves B, B', C, C'.)

12. Distributed Flow and Return, with Induced Currents.

Finally the results of § 11 are supplemented by taking the induced currents and their field into account, on the same simplified basis (following A. G. McNish) as in § 7, for the overhead currents. and for the same two hypothetical heights The results are shown in Fig. 11a (for H) and 11b (for Z), by the curves B, C, B', C'. As in Fig. 8, where

the effect of the induced currents is illustrated for a linear overhead current (without return currents), the curves B, B' correspond to $h = 100$ km., and C, C' to $h = 250$ km. In the latter case it is noteworthy that the maximum Z is less than half what the overhead currents give, and that its (negative) minimum is beyond $z = 4\,h$.

13. The Abnormality of S_q (Z).

For the equinoctial current system represented in Fig. 2, the daily variation of Z, namely $S_q(Z)$, is illustrated for latitudes at 10° intervals

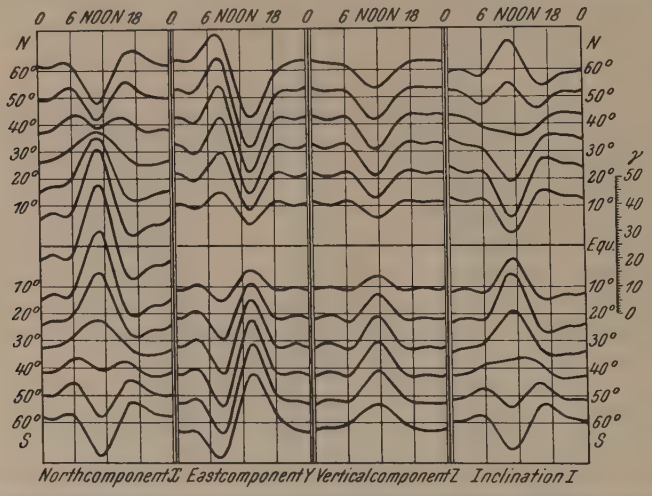


Fig. 12. "Normal" curves of the quiet-day solar daily magnetic variations S_q in the components X, Y, Z, and the dip I, at latitudes 10° apart calculated by J. BARTELS from the spherical harmonic analysis made by S. CHAPMAN for the equinoxes for the sunspot-minimum year 1902.

in the third "bay" from the left of Fig. 2 of Chapter VII of *Geomagnetism*, p. 215, here reproduced as Fig. 12; in this (idealized) diagram, $S_q(Z)$ vanishes completely at the equator, and its range at first increases quickly with the latitude, and then more slowly to a maximum at the focal latitude. Measurement from the diagram gives the following ranges (with an accuracy of about 1 γ):

Latitudes:	0°,	10°,	20°,	30°,	40°,	50°,	60°:
Range, $S_q(Z)$:	0,	4,	9,	12,	13,	12,	10 γ;

the variation between latitudes $\pm 40°$ is thus approximately parabolic. This may be taken as referring to the "normal" S_q current system for a particular season and year. The abnormal flow is superposed on that system, modifying the S_q curves over a belt centred on the electrojet.

The superposed abnormal currents will modify $S_q(Z)$, both to the north and south, except directly beneath the central current; the additional variation will be approximately the same as the abnormal maximum

S_q (H), namely H'_0, occuring at or near Huancayo, multiplied by a factor Z/H_0' or $(Z/H_0)/(H_0'/H_0)$, where Z/H_0 denotes the reading, for the given latitude, on the appropriate curve analogous to B' or C' of

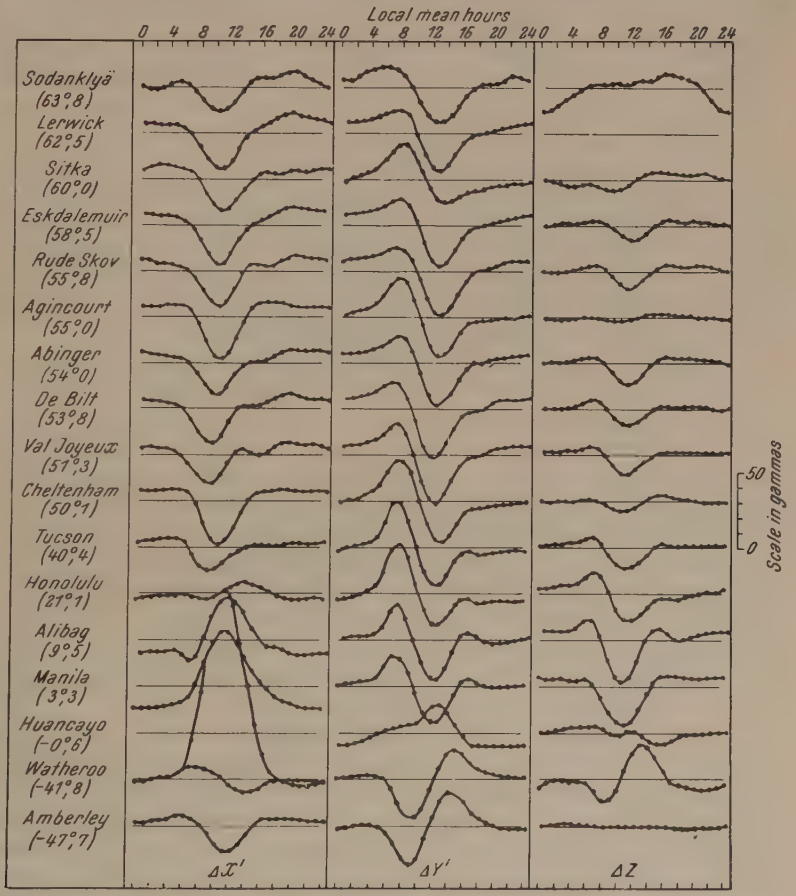


Fig. 13. Solar daily variation on quiet days (S_q) for various stations (whose geomagnetic latitudes are indicated), in the north (X), east (Y), and vertical (Z) components for September, for the mean of the eleven years 1922—1933.

Fig. 11, and H_0'/H_0 denotes the corresponding maximum (central) value of H on such a diagram.

It is of interest to compare the S_q (Z) curves in the "normal" diagram, Fig. 12, with the actual S_q (Z) curves shown, for example, in Fig. 62, p. 150 of the C.I.W. Publication 580[1], here reproduced as Fig. 13. On this diagram Tucson, at 40°.4 geomagnetic latitude, may be regarded as

[1] E. H. Vestine, I. Lange, L. Laporte and W. E. Scott, The Geomagnetic Field, its Description and Analysis. 1947.

in the S_q "focal" latitude; its S_q (Z) amplitude is 23γ, nearly twice as great as on Fig. 12 for latitude 40°; similarly its S_q (E) amplitude is $52\,\gamma$, as compared with $38\,\gamma$ in Fig. 12. On the latter, the maximum S_q (H) amplitude, at the equator, is $35\,\gamma$. The ratios of S_q (Z) and S_q (E) on the two diagrams are not the same, so that one cannot infer therefrom what is the "normal" equatorial S_q (H) amplitude in Fig. 13 corresponding to the $35\,\gamma$ of Fig. 12[1]. Perhaps $55\,\gamma$ is a reasonable estimate. As the Huancayo S_q (H) amplitude in Fig. 13 is $130\,\gamma$, the abnormal part of this amplitude may be estimated as $75\,\gamma$.

Suppose, for illustration of the argument, that the curves B, B' in Fig. 11 are valid for the actual ionospheric currents. The maximum value of H'_0/H_0 is 0.83, and that of Z/H_0 is 0.39. Hence at the latitude of maximum abnormal S_q (Z), corresponding to $z/h = 1.25$ (curve B', Fig. 11), the actual range of this maximum abnormal S_q (Z) may be estimated as (0.39/0.83) $75\,\gamma$ or $36\,\gamma$. Taking the normal S_q (Z) amplitude at this latitude to be $17\,\gamma$, the total amplitude will be $53\,\gamma$.

On Fig. 13 there is no S_q (Z) curve with this amplitude, but Alibag has an amplitude of $43\,\gamma$, which is much larger than that at Tucson, though it would "normally" be expected to be smaller.

It has apparently never been remarked before, but it seems to me that Alibag may show the abnormality in S_q (Z) associated with the Indian electrojet, which may be weaker than that over Huancayo, as is suggested by the more moderate S_q (H) anomaly at Kodaikanal (see Mr. EGEDAL's Table in § 2c). It is also possible, of course, that Alibag, 8°.4 north of Kodaikanal, is beyond the latitude of the maximum S_q (Z) anomaly. Manila, about 7° north of the magnetic equator in its longitude, also seems to show the S_q (Z) abnormality, to an extent slightly less than that at Alibag; perhaps it is perceptible even at Honolulu, more than 20° N of the magnetic equator in its longitude.

Instead of relying on these scanty indications of the S_q (Z) abnormality, afforded by two or three observatories perhaps not situated near its maximum, it is highly desirable that the A.T.M.E. investigation should be extended, not only to determine S_q (H) in South-America in latitudes below 16° S, to complete Director GIESECKE's Fig. 4, but also to determine the variation with latitude, along or near the meridian of Huancayo, of the amplitude of S_q (Z).

14. The Possible Abnormality of S_q (E).

The electrojet is an eastward current, and where it turns away from this direction it appears to become less concentrated; nevertheless, where its return current flows northward or southward, it must affect the east force E, and so modify S_q (E). The mathematical part of the present investigation, which deals only with parallel currents, eastward or westward, is not capable of indicating the expected form and magnitude

[1] Fig. 12 refers to sunspot minimum and Fig. 13 to an average over a sunspot cycle, so that the latter should show greater ranges than the former.

of the S_q (E) anomaly, but this seems likely to have its maxima at about the same N and S latitudes as S_q (Z); its variation may be expected to be nearly confined between the hours during which H at Huancayo is swiftly rising from and again declining to its night-time values; thus it may slightly decrease the interval between the daily maximum and minimum of E, as compared with normal stations. But it is not clearly recognizable on Fig. 13.

15. The Intensity and Height of the Electrojet.

When the distribution of S_q (Z), and possibly also of S_q (E), is determined over a range of latitude near the meridian of Huancayo (and also, it is to be hoped, in Africa and India), it should be possible to estimate the height of the electrojet, and its total current. Any attempt to do this on the basis of S_q (H) data alone must be hazardous and uncertain. As is shown by the preceding Figures (e.g. Fig. 9), the distribution of S_q in both H and Z depends on the distribution of the return flow, as well as on the height h; and only S_q (Z) can give reliable indications on these two points.

It may be of interest however, to make some very tentative comments upon them.

The estimated S_q (Z) anomaly at Alibag is perhaps more consistent with the curve C' of Fig. 11, because the maximum of the latter bears so much smaller a ratio to the maximum of curve C than in the case of B and B'. Thus there is perhaps some indication that h is nearer 100 km. than 250 km., though the inference is far from certain: particularly as the northward and southward flow of the electrojet return current will increase S_q (Z) above the values here calculated by treating all the currents as straight and infinitely long. Conversely S_q (H) must be slightly overestimated in these calculations.

The interval of latitude in Fig. 4 or Fig. 6 between the peak and the maximum depression of the S_q (H) range is about 10°, or 1100 km. In Fig. 11a the corresponding interval, for curve C as well as curve B, is about $4\,h$. This would suggest that h is about 250 km. rather than 100 km. Moreover the induced field may be overestimated, so that the height of the maximum curve C' should be more nearly equal to that of curve A' than is shown in Fig. 11.

These curves are, of course, calculated for the value $c = h$, namely 100 or 250 km. as the case may be; the S_q (Z) data, when available, will throw light on the value of c as well as of h.

Taking the abnormality of the range of S_q (H) at Huancayo to be $75\,\gamma$, and ignoring the slight difference between unity and H/H_0 (at $z = 0$), in the curves B, C of Fig. 11, the current C in the electrojet may be estimated as approximately $37.5\,h$ e.m.u., or $375\,h$ amperes, if h is reckoned in *kilometres*. Thus if h is 100 km., $C = 37500$ amperes, and if $h = 250$ km., C is nearly 100000 amperes. These values are comparable with the whole normal current flow of either of the (N or S) daytime S_q

current circuits at the equinoxes, namely 62000 amperes; but they are much less than the maximum current concentrations that flow along the auroral zones during magnetic storms.

If the width $2c$ of the electrojet is indeed about equal to $2h$, then its current *density* is about 187 amperes/km., or about 2000 amperes per degree of latitude; this is comparable with the estimated maximum *normal* current intensity (§ 5). Thus the electrojet may about double the normal current intensity, over its narrow band.

Acknowledgements.

I am indebted to Mr. J. Egedal for advance information, and permission to use it in this investigation, on the A.T.M.E. data on $S_q(H)$; to Director A. Giesecke, Jr., for the provision of Fig. 4 and similar permission to use it here; and to Dr. P. K. Bhattacharya and Mr. Wan-Cheng Chiu for assistance in the calculations for some of the diagrams in this paper.

551.510.535

(Institut für Meteorologie und Geophysik, Graz.)

Die halbjährige Periode der F_2-Schicht-Ionisation.

Von

Otto Burkard.

Mit 7 Textabbildungen.

Zusammenfassung. An Hand zahlreichen Beobachtungsmaterials wird der Nachweis erbracht, daß die F_2-Schicht-Ionisation eine ausgeprägte halbjährige Periodizität besitzt. Amplitude und Phase dieser Schwankungen unterliegen verschiedenen Einflüssen, so sind sie vor allem in bestimmter Weise von den Beobachtungsstationen abhängig. Es wird versucht, eine Erklärung für diese jährliche Doppelperiode zu geben, und zwar in der Weise, daß die an sich ja sehr naheliegende Annahme gemacht wird, daß die UV-Intensität der Sonne breitenabhängig ist und am Sonnenäquator geringer ist als in mittleren heliographischen Breiten. Damit kann nicht nur die Doppelperiode der kritischen Frequenzen erklärt werden, sondern es wird auch die bisher ungeklärte Doppelperiode der scheinbaren Schichthöhen verständlich.

Summary. On the basis of numerous observations it is shown that the F_2 layer ionisation has a pronounced half-year periodicity. Amplitude and phase of these variations underly various influences and, above all, depend in a determined way on the observation stations. An attempt is made to explain this annual double-period by the rather obvious assumption that the UV-intensity of the solar radiation depends on latitude and is smaller on the solar equator than in medium heliographic latitudes. Thereby, not only the double-period of the critical frequencies, but also the hitherto uncleared double-period of the apparent layer heights can be accounted for.

Résumé. Se fondant sur un important matériel d'observations, on prouve que l'ionisation de la couche F_2 présente une période semi-annuelle accusée. L'amplitude et la phase de cette variation sont soumises à différentes influences et dépendent en particulier de la position des stations d'observation. On tente d'expliquer cette période semi-annuelle en faisant l'hypothèse, en soi très vraisemblable, que l'intensité du rayonnement solaire ultra-violet dépend de la latitude héliaque et qu'elle est plus faible à l'équateur solaire qu'aux latitudes moyennes. Cela permet d'expliquer non seulement la période double des fréquences critiques, mais encore la période double jusqu'ici inexpliquée des hauteurs apparentes des couches ionisées.

Sowohl die kritischen Frequenzen f_0 als auch die scheinbaren Höhen h' der F_2-Schicht lassen, wenn man die Monatsmittel durch das Jahr hindurch verfolgt, eine mehr oder minder deutliche Doppelperiode erkennen. Was hierbei die scheinbare Höhe betrifft, so wurde über diese halbjährige Variation bereits an Hand umfangreicher Beobachtungsdaten ausführlich berichtet [*1*]. Dagegen wurde das Problem der halbjährigen Schwankung in der F_2-Schicht-Ionisation (vgl. Abb. 1) zwar wiederholt behandelt, u. a. von T. L. ECKERSLEY [*2*] und O. BURKARD [*3*], es blieb jedoch bisher durchwegs auf die Beobachtungen einiger weniger Stationen beschränkt. Der während und nach dem letzten Krieg mit raschen Schritten vorangehende Ausbau des nunmehr über die ganze Erde ausgedehnten Beobachtungsnetzes legt es nahe, neuerlich an diese Frage heranzutreten und ihre endgültige Klärung zu versuchen. Wie schon ECKERSLEY [*2*] andeutete, muß vor allem untersucht werden, ob und in welcher Abhängigkeit Amplitude und Phase der Doppelperiode zur geographischen

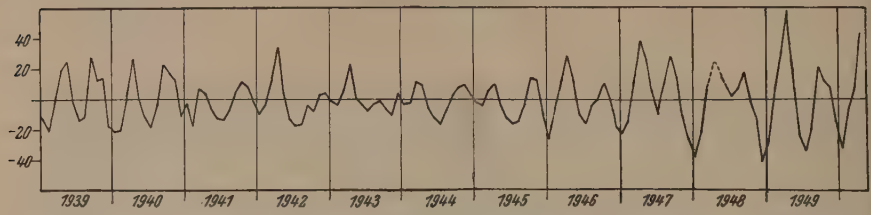


Abb. 1. Station Watheroo, 1938 bis 1950. Differenz Monatsmittel $(f_0)^2$ minus laufende Zwölfmonatemittel $\overline{(f_0)^2}$.

bzw. geomagnetischen Breite stehen, daneben interessieren aber auch noch andere Zusammenhänge, so z. B. die Auswirkungen der veränderlichen Sonnenaktivität, und ferner muß festgestellt werden, welchen Veränderungen diese Doppelperiode im Tagesverlauf unterliegt. Alle diese Fragen finden in der nachstehenden Zusammenstellung eine Beantwortung, die dadurch möglich wurde, daß die notwendigen Ionosphärendaten vom Central Radio Propagation Laboratory, Washington, in dankenswerter Weise laufend veröffentlicht werden. Ergänzt wurden diese Angaben noch durch Beobachtungsmaterial, das mir von mehreren Ionosphärenstationen unmittelbar zur Verfügung gestellt wurde, wofür ich auch hier bestens danken möchte.

Es sei vorausgeschickt, daß im folgenden durchwegs mit den Quadraten der Monatsmittel (f_0F_2) gerechnet wurde, da ja das Quadrat der kritischen Frequenz der maximalen Schichtionisation (besser: Elektronendichte) direkt proportional ist.

Eine einfache harmonische Analyse der Monatsmittel aus den zu Mittag gemessenen kritischen Frequenzquadraten $(f_0F_2)^2$ gibt uns zunächst Aufschluß über den Anteil der Doppelperiode an der F_2-Schicht-Ionisation. Geht man vom Ansatz

$$\overline{(f_0F_2)^2} = a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega t - \varphi_1) + a_2 \cdot \cos(2\omega t - \varphi_2) + \ldots$$

mit $\omega = 2\pi/365$ aus, so interessieren uns hier also besonders die Werte a_2 und φ_2, daneben auch noch a_0 und a_1, um die Größe der Doppelperiode im Verhältnis zur einfachen Periode und zur Gesamtionisation besser übersehen zu können. In Tabelle 1 sind diese Zahlen für das Jahr 1947 zusammengestellt, folgendes kann man aus ihnen herauslesen:

a) *Die Amplitude* a_2 besitzt je nach der Lage des Beobachtungsortes recht unterschiedliche Werte, die etwa im Verhältnis 1 : 4 variieren. Im großen und ganzen weisen jedoch nahe benachbarte Stationen annähernd gleich große Amplituden auf. In den wenigen Einzelfällen, wo das nicht zutrifft, müßte wohl eine spezielle Überprüfung der veröffentlichten Werte erfolgen; es besteht ja durchaus die Möglichkeit, daß das Zahlenmaterial

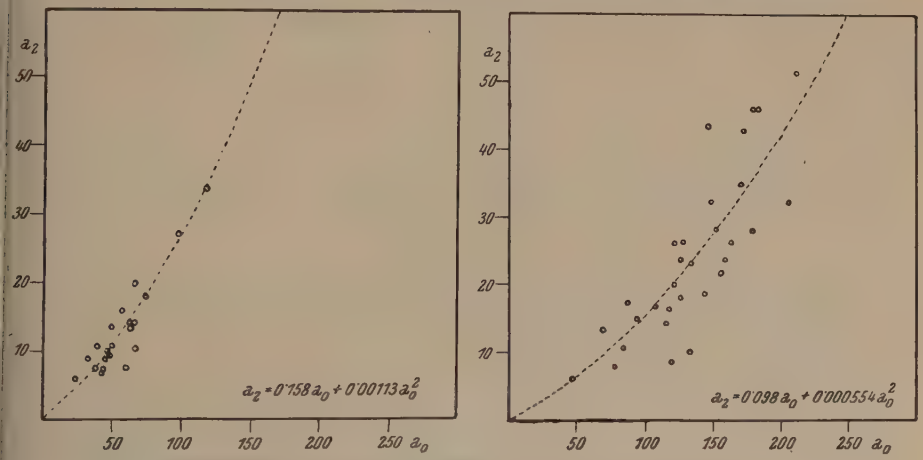


Abb. 2. Der Zusammenhang zwischen der Amplitude a_2 und dem Jahresmittel a_0. a) Für geringe Sonnentätigkeit (1945). b) Für Sonnenfleckenmaximum (1947). Sämtliche Stationen.

durch gelegentliche Druckfehler verstümmelt ist oder daß bei den betreffenden Stationen die Auswertung der Registrierungen nach anderen als den allgemein üblichen Gesichtspunkten vorgenommen worden war. Sieht man also von diesen paar Fällen ab, dann läßt sich — insbesondere für die wesentlich dichter besetzte Nordhalbkugel — sagen, daß die Amplitude a_2 in mittleren Breiten am größten ist, hingegen polwärts sowie auch gegen den Äquator hin wesentlich absinkt. Die derzeit vorliegenden Werte lassen hierbei allerdings nicht eindeutig erkennen, ob diese Breitenabhängigkeit an die geographische oder an die geomagnetische Breite gebunden ist. Vor allem liegt von der Südhalbkugel so wenig Beobachtungsmaterial vor, daß kaum eine stichhaltige Aussage über das dortige Verhalten von a_2 gemacht werden kann.

Ein gewisses Interesse bietet neben der Amplitude a_2 auch das Größenverhältnis a_2/a_0, mit dem der Anteil der halbjährlichen Ionisationsschwankung an der Gesamtionisation zum Ausdruck kommt. Auch dieses Verhältnis hat in Tabelle 1 Aufnahme gefunden; sein Wert liegt etwa zwischen 7% und 15%. Das ist ziemlich viel, wenn man dies etwas

anders ausdrückt und bedenkt, daß damit die Ionisation vom Minimum zum Maximum um rund ein Viertel der mittleren Ionisation ansteigt. Die beiden Abb. 2*a* und 2*b* zeigen überdies den Zusammenhang zwischen

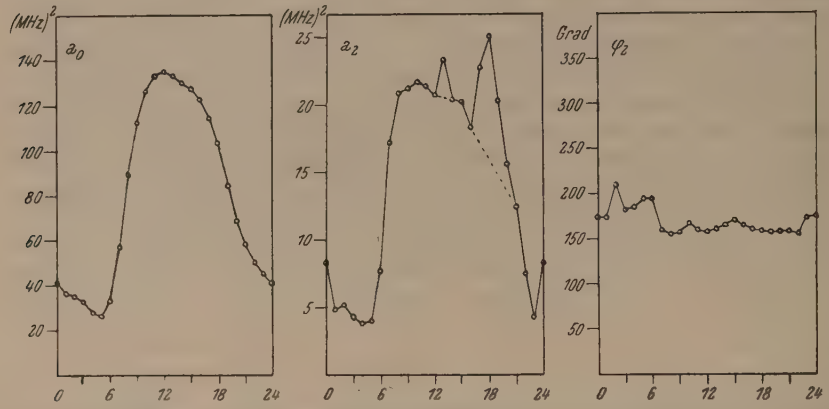


Abb. 3. Station Watheroo, 1947, Tagesverlauf des Jahresmittels a_0, der Amplitude a_2 und der Phase φ_2 der Jahresdoppelperiode.

a_2 und a_0, der in erster Näherung durch eine Gleichung der Form $a_2 = \sigma \cdot a_0 + \tau \cdot a_0^2$ ausgedrückt werden kann, wobei allerdings σ und τ mit der Sonnenaktivität variieren.

Die bisher geschilderten Verhältnisse bezogen sich durchwegs auf die zu Mittag gemessenen Beobachtungen. Nun sei aber noch ein Blick auf die Amplitude a_2 zu den anderen Tagesstunden geworfen. Man findet hier, wie beispielsweise der Abb. 3 zu entnehmen ist, einen Tagesgang, der weitgehend dem Tagesgang der mittleren Ionisation a_0 ähnelt. Die Ähnlichkeit geht soweit, daß auch hier wieder der Zusammenhang zwischen a_2 und a_0 der ungefähr gleichen Gesetzmäßigkeit unterliegt, wie sie in Abb. 2 für verschiedene Stationen aufgezeigt werden konnte. Diesen letzteren Sachverhalt zeigt die Abb. 4, in der die punktierte Kurve der Abb. 2*b* entspricht. Während alle übrigen Werte mit Ringen eingetragen wurden, sind die drei offenbar stark aus der Regelmäßigkeit herausfallenden Abendwerte (vgl. Abb. 3, 17 bis 19 Uhr) mit Kreuzen in das Diagramm aufgenommen worden. Diese in den frühen Abendstunden auftretende Störung im ruhigen Verlauf der Amplitude a_2, wie er etwa nach der strichliert eingezeichneten Linie in Abb. 3 zu erwarten wäre, scheint für

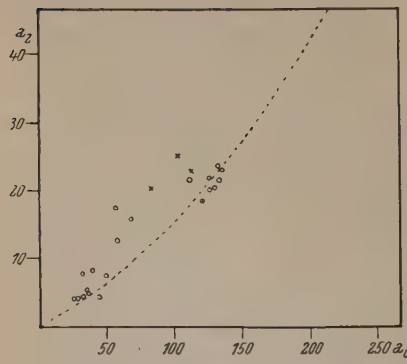


Abb. 4. Zusammenhang zwischen Jahresmittelwert a_0 und Amplitude a_2, Station Watheroo, Jahr 1947, verschiedene Tagesstunden.

die Amplitude der Doppelperiode kennzeichnend zu sein. Es ist beabsichtigt, dieser Erscheinung eine eigene Untersuchung zu widmen; es sei daher hier nicht weiter darauf eingegangen. Sieht man zunächst überhaupt von diesen wenigen Stunden ab, so verbleibt ein Tagesgang, der tagsüber offenbar seine deutlichste und stärkste Ausprägung erhält, in der Nacht hingegen fast ganz verschwindet. Dieses Verhalten konnte für alle bisher untersuchten Stationen und für beliebige Sonnentätigkeit nachgewiesen werden, es stellt daher ein wichtiges Argument dafür dar, daß die Doppelperiode nicht auf eine solare Korpuskularstrahlung geladener Teilchen zurückgeführt werden kann.

Tabelle 1.

Station	φ	Φ	a_0	a_1	a_2	a_2/a_0	φ_2
Clyde	70,5	82,0	47,7	17,7	6,2	0,129	253
Fairbanks	64,9	64,7	70,3	43,5	13,5	0,192	286
Churchill	58,8	68,7	85,3	51,3	10,5	0,123	256
Prince Rupert	54,3	58,4	88,3	61,7	17,5	0,198	283
Adak	51,9	47,2	122,2	80,7	19,8	0,162	199
Slough	51,5	54,4	118,1	57,7	16,3	0,138	182
Portage la Pr.	49,9	59,5	94,1	60,0	15,0	0,159	235
Freiburg	48,1	50,2	121.2	46,8	18,2	0,150	179
St. Johns	47,6	58,5	108,4	76,5	17,0	0,157	245
Ottawa	45,5	56,9	117,0	75,8	14,3	0,123	200
Boston	42,6	53,9	120,2	66,2	8,5	0,071	163
Peiping	39,9	28,4	133,0	14,3	10,0	0,075	211
Washington	38,7	50,1	123,0	59,5	26,2	0,213	179
Shibata	37,9	27,6	146,7	33,0	43,5	0,297	172
San Francisco	37,4	43,6	128,2	39,3	26,3	0,206	162
Lanchow	36,1	24,7	172,5	30,3	42,7	0,247	177
Yamakawa	31,2	20,3	171,5	38,7	34,8	0,162	165
Wuchang	30,6	19,1	183,8	40,8	46,0	0,250	175
Chunking	29,4	17,9	211,8	41,8	51,2	0,242	168
Delhi	28,6	18,9	179,8	28,7	27,8	0,155	164
Maui	20,8	21,0	206,7	45,5	31,8	0,154	177
Bombay	18,9	9,5	204,3	30,0	16,2	0,079	161
San Juan	18,4	29,9	149,0	13,5	32,2	0,216	167
Madras	13,1	3,1	160,0	15,3	23,7	0,148	185
Leyte	11,0	— 0,2	144,0	7,2	18,5	0,129	171
Trinidad	10,6	22,0	180,1	19,5	45,8	0,254	157
Palmyra Ins.	5,9	5,2	164,1	3,8	26,2	0,159	169
Huancayo	—12,0	— 0,5	156,3	21,7	21,7	0,139	178
Johannesburg	—26,2	—27,0	153,5	8,7	28,0	0,182	167
Watheroo	—30,3	—41,8	134,5	24,7	23,0	0,171	160
Canberra	—35,3	—44,0	126,5	42,8	23,7	0,187	160
Hobart	—42,8	—51,6	78,8	27,2	7,8	0,050	118

b) *Die Phase.* Das Zahlenmaterial in Tabelle 1 enthält in der letzten Spalte auch noch den Phasenwinkel φ_2 für jede Station, wobei bemerkt sei, daß als Zeitpunkt $t = o$ der Einfachheit halber (da ja nur mit Monats-

mittelwerten gerechnet wird) der 16. Jänner angenommen wurde. Wie üblich wurden auch bei der vorliegenden harmonischen Analyse die einzelnen Monatsmittel als äquidistante Werte angesehen. Schließlich sei nochmals daran erinnert, daß sich alle in die Tabelle 1 aufgenommenen Werte auf die Mittagsbeobachtungen (Ortszeit) beziehen.

Als Mittelwert für alle 32 Stationen ergab sich ein Phasenwinkel von 188,3°, was soviel bedeutet, als daß die Maxima auf den 21. April und den 21. Oktober fallen. Bei näherer Betrachtung der Einzelwerte findet man aber, daß diese Phasenwinkel offenbar in Abhängigkeit von der Breite der Beobachtungsstation stehen und daß in hohen nördlichen Breiten die Phase größer, in hohen südlichen Breiten dagegen kleiner ist als in äquatorialen Gegenden. Dies mag die kleine zusammenfassende Tabelle 2 aufzeigen.

Tabelle 2.

Geogr. Breite	$\overline{\varphi}_2$ (Anzahl der Stationen)
90° N bis 45° N	232° (10)
45° N „ 0°	172° (17)
0° „ 45° S	157° (5)
45° S „ 90° S	— (—)

Es ist unter diesen Umständen naheliegend, den in gemäßigten und äquatorialen Breiten vorgefundenen Phasenwinkel gleichsam als Normalwert anzusehen; ihm entsprächen die Maxima etwa Anfang April und Anfang Oktober. Ein zusätzlicher Einfluß verschiebt nun diese Daten auf der Nordpolarkappe zu späteren, auf der Südpolarkappe zu früheren Terminen.

Im Verfolg dieser Breitenabhängigkeit der Phase wurde nun noch ein Schritt weitergegangen und die bisherige mathematische Behandlung des Problems, die ja die offenbar nicht erfüllte Voraussetzung hatte, daß f^2 durch $a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega t - \varphi_1) + a_2 \cdot \cos(2\omega t - \varphi_2) + \ldots$ darstellbar sei, abgeändert. Es erwies sich nämlich als durchaus vorteilhaft, den Ionisationsverlauf innerhalb der einzelnen Halbjahre zu studieren, wobei sich zunächst einmal die bemerkenswerte Tatsache ergibt, daß die Amplituden im Frühlingshalbjahr durchschnittlich kleiner sind als im Herbsthalbjahr. Ich hatte diese Erscheinung schon 1942 vermutet [3], sie kann jetzt an einem wesentlich umfangreicheren Material bestätigt werden, wie Abb. 5 erkennen läßt. Dieses Diagramm ist auf folgende Weise entstanden: Für die je sechs Monatsmittelwerte f_0^2 eines Halbjahres wurden nach dem Verfahren der harmonischen Analyse Amplitude und Phase der Grundschwingung (hier also $A \cdot \cos(\Omega t - \psi)$ mit $\Omega = 2\pi/182{,}5$) bestimmt, wobei wieder das frühere Zahlenmaterial des Jahres 1947 Verwendung fand. Für die beiden Halbjahre wurde also im allgemeinen je eine Amplitude A_{I} und A_{II} und je ein Phasenwinkel ψ_{I} bzw. ψ_{II} erhalten. In der Abbildung wurde sodann für die einzelnen Stationen das Amplitudenverhältnis $A_{\mathrm{I}}/A_{\mathrm{II}}$ in Abhängigkeit von der geographischen Breite der Beobachtungsstationen eingetragen. Da die

Südhalbkugel eine nur sehr geringe Stationsdichte aufweist, wurde die Abbildung durch einige Werte vom Jahre 1949 ergänzt, die von jenen Stationen auf der Südhalbkugel stammen, die 1947 nicht oder nur teilweise in Betrieb standen. Der allgemeine Charakter, der obige Behauptung bestätigt, ist trotz einiger Unstimmigkeiten deutlich zu ersehen: Auf der Nordhalbkugel ist die Amplitude der ersten Halbjahresperiode kleiner, auf der Südhalbkugel hingegen größer als die der zweiten Halbjahresperiode.

Schließlich wollen wir für diesen Fall auch noch die Phasen ψ betrachten. Ihr merkwürdiges Verhalten geht am übersichtlichsten aus der Abb. 6 hervor, in der sämtliche ψ-Werte der Jahre 1947, 1948 und 1949 in Abhängigkeit von der geomagnetischen Breite eingetragen wurden. Letztere wurde gewählt, da sich hierbei eine geringere Streuung ergibt, als wenn man die geographische Breite zugrunde legt. Doch sind im großen und ganzen die Unterschiede zwischen diesen beiden Darstellungsmöglichkeiten nicht allzu groß. Abb. 6 läßt erkennen, daß die Phasenwinkel nicht nur bezüglich der Nord- und Südhalbkugel, sondern auch bezüglich der beiden Jahreshälften ein verschiedenes Verhalten aufweisen. Auf der Nordhalbkugel werden die Eintrittszeiten der Maxima gegen den Jahresanfang bzw. gegen das Jahresende hin verschoben (man vergleiche hierzu die Bezeichnung am unteren Rand der Abb. 6), auf der Südhalbkugel gegen die Jahresmitte hin, und zwar bereits in mäßigen Breiten in viel stärkerem Maß als auf der Nordhalbkugel. In dem Breitengürtel von etwa 30° Nord bis 30° Süd fällt das Maximum des ersten Halbjahres ungefähr mit der Tag- und Nachtgleiche zusammen. Das Maximum des zweiten Halbjahres tritt hingegen erst ungefähr einen ganzen Monat später auf. Bei den eingetragenen Werten handelt es sich wieder durchwegs um die jeweils zu Mittag angestellten Beobachtungen. Es läßt sich jedoch zeigen, daß die für andere Tagesstunden berechneten Phasen nicht sehr stark vom Mittagswert abweichen, besonders dann, wenn man von den Nachtstunden absieht. Da in der Nacht die Amplitude sehr klein wird, werden auch die Phasenwinkel ungenauer bestimmbar. Einen Fall für den Tagesverlauf der Phase φ_2 zeigte die Abb. 3.

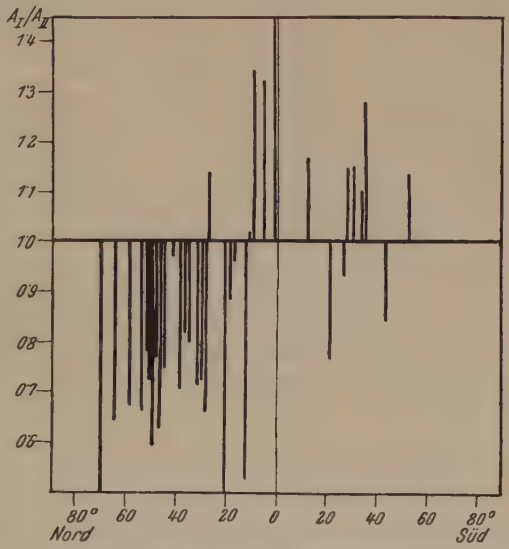


Abb. 5. Das Größenverhältnis Amplitude des ersten Halbjahres zur Amplitude des zweiten Halbjahres in Abhängigkeit von der geographischen Breite.

In der Abb. 6 ist (als dünne Punkte eingetragen) auch noch der Zeitpunkt um die Jahresmitte ersichtlich gemacht, der zu den beiden Maxima symmetrisch liegt, also gleich viel Tage vom Frühjahrs- wie vom Herbstmaximum entfernt ist. Trotz der früher erwähnten Unsymmetrien verläuft diese Linie ziemlich regelmäßig und fällt durchschnittlich in das erste Julidrittel.

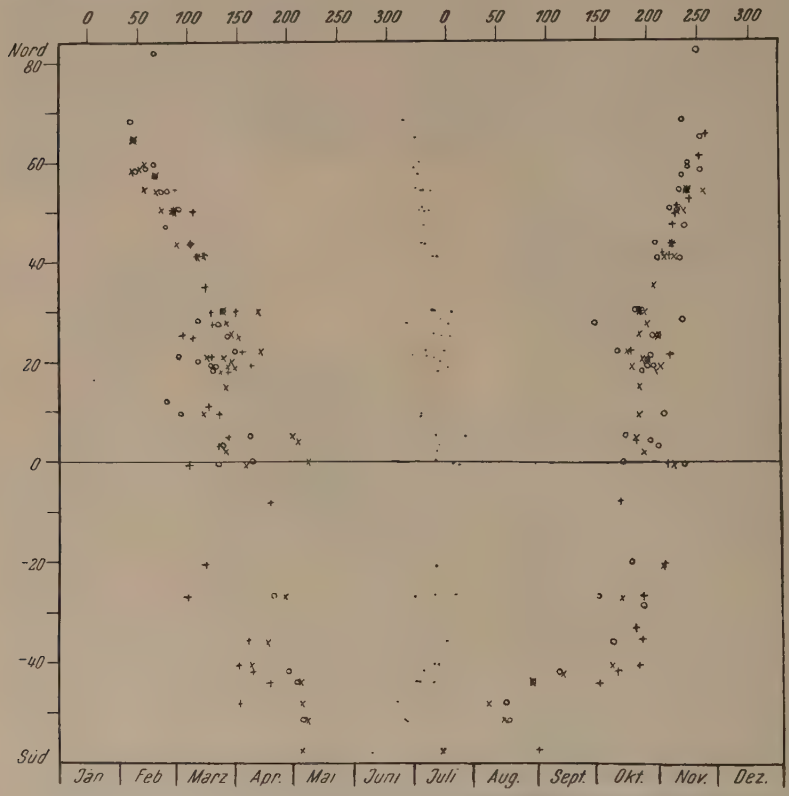


Abb. 6. Die Phasenwinkel ψ in Abhängigkeit von der geomagnetischen Breite für die Jahre 1947 (o), 1948 ($\times$) und 1949 (+).

Es mag ein Zufall sein, kann aber möglicherweise auch einen bestehenden, noch nicht erkennbaren Zusammenhang ausdrücken, daß auch die magnetische Aktivität eine doppelte Jahresperiode besitzt und daß z. B. beim u_1-Maß das Minimum dieser Schwankung ebenfalls auf den 5. Juli fällt [4]. In beiden Fällen sehen wir uns vor die schwierige Aufgabe gestellt, die Phasenlage dieser Doppelperiode zu erklären, die offenbar weder mit der Variation der Deklination der Sonne ($\delta = 0$ zu den Äquinoktien), noch mit den Extremwerten der heliographischen Breite der Erde (6. März, 8. September) unmittelbar in Einklang gebracht zu werden vermag. Anderseits ist bisher kein anderes Phänomen bekannt geworden,

das die Doppelperiode an sich und ihre Phasenlage im besonderen auf einfache Weise verständlich machen könnte.

c) *Deutungsversuch.* Hinsichtlich der Ionosphäre dürften allerdings nach all dem, was bisher schon an Beobachtungstatsachen zusammengetragen wurde, kaum einfache Verhältnisse vorauszusetzen sein. Darum müssen auch alle Erklärungsversuche, die von allzu sehr vereinfachenden Annahmen ausgehen, zum Scheitern verurteilt sein oder zumindest Stückwerk bleiben. Vielleicht aber können die folgenden, kurz dargelegten Überlegungen zum Ziel führen; sie wurden so gewählt, daß auch die anderen, hier nicht näher behandelten Beobachtungstatsachen verhältnismäßig leicht eingebaut werden können.

Aus triftigen Gründen glaubt man heute Gewißheit zu besitzen, daß die F_2-Schicht der Ionosphäre — zu ungestörten Zeiten — durch die ionisierende Wirkung einer ultravioletten Sonnenstrahlung zustande kommt. Die mehrfach beobachteten Effekte einer Abhängigkeit vom Erdmagnetfeld müssen somit eine sekundäre Erscheinung sein, die wahrscheinlich mit der Elektronenvernichtung (Wiedervereinigung, Anlagerung) oder mit Diffusionsvorgängen in der Schicht zusammenhängt, es werden aber nicht elektrisch geladene Korpuskel schon beim Herannahen an die Erde abgelenkt. Da anderseits die Doppelperiode mit der beobachteten Phase nicht erst in der Schicht selbst entstehen kann, so handelt es sich also darum, eine Begründung dafür zu finden, daß — auch außerhalb der Äquatorzone — zweimal im Jahr ein Maximum der UV-Strahlung auftrifft. Man erinnert sich hierbei vielleicht an zwei Beobachtungstatsachen, die die Sonnenphysik liefert. Zum ersten der Befund, daß offenbar die gesamte Sonnenaktivität am Sonnenäquator geringer ist als in äquatorbenachbarten mäßigen Breiten. Bekannt ist ja der Breiteneffekt der Sonnenflecken, die Fackeln zeigen in ähnlicher Weise eine Abhängigkeit von der heliographischen Breite, ebenso liegt das Intensitätsmaximum der Korona im allgemeinen diesseits und jenseits des Äquators. Man darf daher wohl annehmen, daß auch die Intensität des UV-Lichtes am Sonnenäquator ein Minimum besitzt und in mäßigen Breiten, wahrscheinlich mit der allgemeinen Sonnentätigkeit variierend, zu einem Maximalwert ansteigt. Wir wissen weiters, daß sich im Verlauf eines Jahres die heliographische Breite der Erde um etwa $\pm 7°$ ändert, wobei die Extremlagen, wie vorhin schon erwähnt, am 6. März und 8. September eingenommen werden. Liegt das Maximum für die UV-Intensität in Breiten $\geq 7°$, so wird also auch zu diesen Terminen die zur Erde gelangende UV-Energie ein Maximum sein. Wir hätten damit das Auftreten der Doppelperiode erklärt; was allerdings noch nicht stimmt, ist die Phase dieser Periodizität. Doch hier hilft uns die schon wiederholt zum Ausdruck gebrachte Ansicht weiter, daß besonders die F_2-Schicht größeren Temperaturschwankungen unterliegt. Nach der einfachen Theorie der Schichtbildung ist die maximale Ionenproduktion

$$q^* \approx \frac{S \cdot \cos \chi}{H},$$

worin S die extraterrestrische Strahlungsintensität, $H = \frac{k \cdot T}{m\,g}$ die Höhe der homogenen Atmosphäre (Maßstabhöhe) und χ den jeweiligen Zenithwinkel der Sonne bedeutet. Man sieht also daraus, daß die Ionenproduktion verkehrt proportional zur Temperatur ist, daß sie somit bei höheren Temperaturen kleiner ist als bei geringeren Temperaturen. Weiters aber ist diese Ionenproduktion auch von der Energie der ionisierenden UV-Strahlung abhängig und man kann, wenn man an der oben ins Auge gefaßten Intensitätsveränderlichkeit mit verschiedenen heliographischen Breiten festhält, zumindest in erster Näherung diese durch den Ansatz

$$S = S_0 \cdot [p + q \cdot \cos(2\omega t - \xi)]$$

zum Ausdruck bringen. Hierin werden p und q davon abhängen, in welcher Art die Intensitätsverteilung des UV-Lichtes mit der Breite auf der Sonne variiert, und der Phasenwinkel ξ muß so gewählt werden, daß die größte Strahlung zu den Zeiten extremer heliographischer Breiten der Erde auftritt. Mit dem früher genannten Bezugspunkt (16. Jänner) erhält man somit für ξ den Wert von rund 98°. Geht man schließlich von der Ionenproduktion zur Ionenkonzentration über, die ja dem meßbaren Quadrat der kritischen Frequenz proportional ist, so muß die Ionisierungsbilanz erstellt werden, am einfachsten wieder in der Form

$$dn/dt = q - \beta \cdot n,$$

worin n die Ionen(Elektronen)konzentration bedeutet und β die Verschwindungskonstante darstellt, wobei eine der Elektronenkonzentration einfach proportionale Elektronenvernichtung vorausgesetzt wird. (Vgl. [5]; die mit dem Quadrat der Elektronendichte proportionale „Wiedervereinigung" wird zwar meist vorausgesetzt, steht aber mit den experimentellen Befunden nicht ganz im Einklang.) Für die Mittagsstunden, die hier vorzugsweise in Betracht gezogen wurden, kann nun auch $dn/dt = 0$ gesetzt werden, so daß einfach übrig bleibt:

$$n \approx \frac{S_0 \cdot \cos\chi \cdot [p + q\cos(2\omega t - 98°)]}{\beta \cdot T}.$$

Damit haben wir aber im wesentlichen den Tages- und Jahresverlauf der kritischen Frequenzen (bzw. ihrer Quadrate) den Beobachtungen entsprechend in einer Formel festgehalten. Allerdings sind einerseits noch die zwei Größen p und q unbekannt, anderseits wissen wir nicht, ob β durchwegs als konstant anzunehmen ist. Um den Zusammenhang mit den Beobachtungen zu erhalten, müssen wir daher jetzt den umgekehrten Weg beschreiten und wollen versuchen, den zeitlichen Ablauf des Produktes $T \cdot \beta$ zu ermitteln. Das kann eben wegen der unbekannten Größe von p und q nur so geschehen, daß man für sie verschiedene Annahmen trifft (es kommt im wesentlichen nur auf das Verhältnis q/p an) und nachsieht, ob sich hierbei ein plausibler Temperaturverlauf (wenn man S_0 und β als konstant ansieht) ergibt. Für die Mittagswerte (1947) der Station Watheroo, die schon im vorhergehenden eingehender besprochen wurden, erbrachte die Durchführung dieses Versuches bei drei verschie-

denen Annahmen des Verhältnisses q/p das in Abb. 7 festgehaltene Ergebnis. Der Rechenvorgang war dabei im einzelnen der, daß mit den Beobachtungswerten für f_0^2, cos χ und t für die einzelnen Monate $\frac{\cos\chi \cdot [p + q\cos(2\omega t - 98)]}{f_0^2}$ errechnet wurde; abgesehen von hier nicht interessierenden Konstanten entspricht dies somit dem Jahresverlauf von $T \cdot \beta$ bzw. von T allein, wenn man β als konstant ansehen will. Um die drei Kurven untereinander vergleichen zu können, wurden schließlich die berechneten Werte für je ein bestimmtes Verhältnis q/p mit einem konstanten Faktor multipliziert, der in dem willkürlich gewählten Maßstab jeweils das Minimum auf den Wert 1 reduzierte. Aber wie gesagt, dies geschah lediglich, um die drei Probeansätze ($q/p = 0$, 0,1 und 0,33) untereinander vergleichen zu können und um weiters die maximale Temperaturschwankung, die sich auf diese Weise innerhalb des Jahresverlaufes errechnen läßt, leicht angeben zu können. Die oberste Kurve in der Abb. 7 ist mit $q/p = 0$ berechnet, bei ihr sind die Minima im Mai und August/September deutlich zu erkennen, die durch die Doppelperiode in f_0^2 zustande kommen. Die nächste Kurve wurde mit $q/p = 1/10$ ermittelt und man sieht, daß hier diese Minima so gut wie verschwunden sind, gleichzeitig verschieben sich Temperaturmaximum und -minimum ungefähr zu den Solstitien. Für die letzte Kurve schließlich wurde $q/p = 1/3$ gewählt, womit offenbar eine Art „Überkompensation" eintritt: Die Temperatur hat jetzt wieder zwei Minima; Anfang Juni etwa und im November und die zwei Maxima fallen in den September und Februar. Es ist nicht einzusehen, warum die Temperatur einen solchen Verlauf nehmen sollte, vielmehr wird man mit dem Temperaturgang, wie er durch die mittlere Kurve wiedergegeben wird, ganz einverstanden sein können; er ist durchaus plausibel, zumal sich auch die Temperaturänderung vom Minimum zum Maximum in mäßigen Grenzen (1 : 2,6) hält. Anderseits bedeutet das Verhältnis $q/p = 1/10$, daß die der Erde zugestrahlte UV-Intensität jenes Wellenlängenbereiches, der für die Ionisierung in der F_2-Schicht verantwortlich gemacht werden muß, im Verhältnis 9 : 11 variiert, wenn uns die Sonne einmal ihren Äquator voll zukehrt (heliographische Breite der Erde gleich Null, 6. Juni und 8. Dezember), und im anderen Fall die heliographische Breite der Erde ihre Extremwerte annimmt, wie dies am 6. März und 8. September der Fall ist.

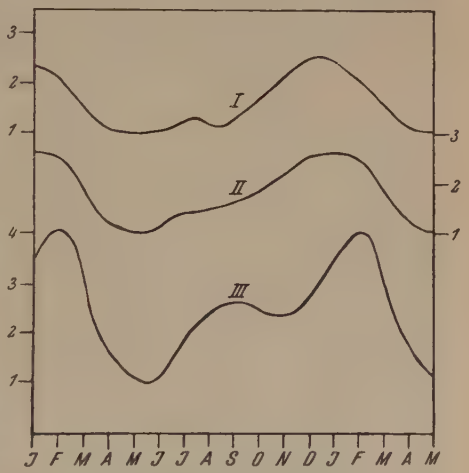


Abb. 7. Errechneter Temperaturverlauf in der F_2-Schicht mit verschiedenen Annahmen über q/p.

Was hier für den einen Fall der Station Watheroo gezeigt wurde, gilt in gleicher oder ähnlicher Weise auch für die meisten anderen Stationen. Durch die Breitenabhängigkeit der UV-Intensität auf der Sonne und durch die im Laufe des Jahres wechselnde Lage der Sonne gegenüber der Erde tritt eine Doppelperiode auf, deren Phase durch das Zusammenwirken mit Temperaturvorgängen in der Schicht vom ursprünglich zu erwartenden Wert (98°) auf die beobachteten Werte abgeändert wird. Dadurch, daß diese Temperaturverhältnisse an den verschiedenen Stationen nicht von gleicher Art sind, wird die Phase sich von Station zu Station ändern, während hingegen der Einfluß des Erdmagnetfeldes aller Voraussicht nach durch die Verschwindungskonstante β zustande kommt. Die Bewegung der geladenen Teilchen — Elektronen wie Ionen — ist ja vom Magnetfeld beeinflußt, damit aber sind es wohl auch ihre Zusammenstoßverhältnisse, und das Verschwinden der Elektronen.

Zum Schluß noch zwei Bemerkungen, die die oben gemachten Annahmen weiter zu stützen vermögen. Die kritische Frequenz und damit auch die Elektronenkonzentration ist offensichtlich das Ergebnis des Zusammenwirkens mehrerer Prozesse (Elektronenbildung, Elektronenvernichtung, Temperatur, Diffusion usw.). Es könnte nun die Meinung auftauchen, daß erst durch dieses Zusammenwirken die beobachtete Doppelperiode entsteht, wobei als Energiequelle lediglich eine konstante, breitenunabhängige Sonnenstrahlung vorausgesetzt wird, deren Wirkung also nur mit der Deklination der Sonne variiert. Es läßt sich nun aber mathematisch zeigen, daß in diesem Fall eine etwa entstehende Doppelperiode stets die Phase 308° (entsprechend 2.154°) besitzen müßte. Das steht offenbar mit dem Beobachtungsmaterial nicht im Einklang, womit diese Möglichkeit ausgeschlossen bleiben kann.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf die schon früher behandelten Verhältnisse bei den scheinbaren Schichthöhen (l. c.), wobei damals bereits darauf hingewiesen wurde, daß entgegen der Erwartung die Minima der scheinbaren Schichthöhen $h' F_2$ ungefähr zu den Äquinoktien auftreten, wenn man die Jahresdoppelperiode in Betracht zieht. Dieser Befund, kürzlich neuerdings von Appleton [*6*] aufgezeigt, konnte bisher nicht geklärt werden, fügt sich aber nunmehr durchaus in den Rahmen, wenn man von den obigen Annahmen ausgeht. Die stärkere Strahlungsintensität Anfang März und September bewirkt eben auch eine kräftigere und damit auch in geringere Höhen hinabreichende Ionisierung. Es sind somit Höhen- und Ionisationsverlauf hinsichtlich der Doppelperiode erklärbar.

Literaturverzeichnis.

1. Burkard, O.: Geofisica pura e appl. **15**, 63—68 (1949).
2. Eckersley, T. L.: Terr. Mag. **45**, 25—36 (1940).
3. Burkard, O.: Hochfrequenztechn. und Elektroak. **60**, 87—96 (1942).
4. Chapman, S. und J. Bartels: Geomagnetism, p. 366, Oxford 1940.
5. Burkard, O.: IATME Bulletin **13**, Transactions of Oslo Meeting, p. 381 bis 385 (1950).
6. Appleton, E.: Journ. Atm. Terr. Phys. **1**, 106—113 (1950).

55 . 038 . 4

(Servicio Meteorológico Nacional, Buenos Aires.)

Vorschläge zur statistischen Erfassung erdmagnetischer Mikropulsationen.*

Von

Otto Schneider.

Mit 3 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Es werden einige Tatsachen und Bedingungen angeführt, welche eine physikalische Deutung der erdmagnetischen Mikropulsationen zu berücksichtigen hätte. Um ein weltweites Erfassen der Mikropulsationen und ihrer Variationen zu erleichtern, wird ein Klassifizierungsverfahren vorgeschlagen, mit dem Größe, Regelmäßigkeit, Andauer oder Abwesenheit von Wellenzügen halbquantitativ erfaßt und statistisch behandelt werden können. Nach diesem Verfahren werden augenblicklich die Registrierungen der Horizontalkomponente im argentinischen Observatorium Orcadas durchmustert. Als Beispiel zeigt Abb. 2 den Tagesgang des Auftretens von Mikropulsationen verschiedener Regelmäßigkeit im Januar 1933. Es besteht ein charakteristischer Unterschied gegenüber den bisher bekannten Gängen an anderen Observatorien. Weitere Beispiele beleuchten den Zusammenhang mit erdmagnetischer Aktivität und mit Bai-Störungen; es besteht Anlaß, eine inhibierende Wirkung der ionisierenden Wellenstrahlung der Sonne anzunehmen (Abb. 3).

Resumen. Se enumeran algunos hechos y condiciones que habrá de tomar en cuenta cualquier interpretación física de las micropulsaciones geomagnéticas. Con el fin de posibilitar un censo global de este fenómeno y sus variaciones, se sugiere un prodedimiento para su clasificación, el cual permite hacer un relevamiento semi-cuantitativo de la magnitud, regularidad, permanencia o ausencia de los trenes de ondas, y tratarlas estadísticamento. Según este método, se está procediendo en la actualidad a escrutar los registros de la componente horizontal, recogidos en el observatorio argentino de las Islas Orcadas. Como ejemplo, la Fig. 2 muestra la marcha diaria de la ocurrencia de micropulsaciones con diferentes grados de regularidad, en enero de 1933. Existe una discrepancia característica con las marchas que hasta aqui se conocen de otros observatorios. Algunos ejemplos adicionales ilustran las

* Veröffentlicht mit Erlaubnis der Dirección General del Servicio Meteorológico Nacional, Buenos Aires.

relaciones con el grado de actividad geomagnética y con los disturbios del tipo bahía; cabe tambien suponer un efecto impeditivo de la radiación solar ionizante (Fig. 3).

Summary. Some facts and conditions are stated which are to be taken into account in any physical theory of geomagnetic micropulsations. For convenience in a world-wide survey of the micropulsations and their variations, a scheme of classification is suggested in which the magnitude, regularity, duration or absence of wave-trains are gauged in a semi-quantitative manner, as a first step for statistical discussion. The records of magnetic horizontal component from the Argentine South-Orkneys Observatory are now being searched for micropulsations in accordance with the procedure here suggested. As an illustration, Fig. 2 shows the daily variation of occurrence for micropulsations of different degrees of regularity during January, 1933. A significant difference is found between this daily variation and those known hitherto from other observatories. Further examples refer to relations with geomagnetic activity and bay-disturbances; there is some evidence of an inhibitory effect of ionizing solar wave-radiation (Fig. 3).

Résumé. On énumère quelques faits et conditions dont devrait tenir compte une interprétation physique des micropulsations géomagnétiques. Dans le but de faciliter l'étude mondiale des micropulsations et de leurs variations, on propose un mode de classement embrassant la grandeur, la régularité, la durée ou l'absence de trains d'ondes sous forme semi-quantitative et qui permet leur étude statistique. C'est à l'aide de ce procédé que l'on a dépouillé actuellement les enregistrements de la composante horizontale à l'Observatoire argentin des Orcades du Sud. La fig. 2 est un exemple de la variation diurne de l'apparition de micropulsations plus ou moins régulières en janvier 1933; cette variation diffère d'une façon caractéristique de celles que l'on connaît jusqu'ici en d'autres observatoires. D'autres exemples illustrent la relation avec l'activité géomagnétique et avec les perturbations du type baie; il y a lieu d'admettre un effet inhibitif du rayonnement ondulatoire solaire ionisant (fig. 3).

Zu den charakteristischen zeitlichen Veränderungen des Erdmagnetismus, die bisher noch wenig statistisch geordnet, geschweige denn physikalisch gedeutet worden sind, gehören die Elementarwellen oder *Mikropulsationen.* An Deutungsversuchen liegt bisher, soweit bekannt, nur der von Störmer [*1*] vor, welcher die Erscheinung mit periodischen Bahnen solarer Korpuskeln im Erdfeld in Zusammenhang bringt. Eine andere Möglichkeit der Erklärung könnte man in Wogenbewegungen an Unstetigkeiten in der Ionosphäre suchen; solche Wogen sind an Schwankungen der Peil- und Einfallswinkel ionosphärischer Echos nachweisbar [*2*]; ein systematischer Vergleich der beiden Arten von Schwankungen, insbesondere bezüglich ihrer Periodenlänge und Regelmäßigkeit, ist noch nicht unternommen worden. Es bleibt fraglich, ob die manchmal erhebliche Reichweite der pulsatorischen Störungen des Erdmagnetismus mit dieser Erklärung vereinbar wäre (s. Abschnitt 6).

Eine vollständige Deutung müßte neben der Größe und geographischen Verteilung des Pulsationsvektors folgende Tatsachen erklären, bzw. hinzuziehen:

1. Geographische Verteilung des Auftretens. Das starke Anwachsen der Amplituden gegen die Polarlichtzone und die Abnahme innerhalb derselben deuten auf einen Ursprung, welcher mit der solaren Korpuskelstrahlung identisch oder verwandt ist, der wir die erdmagnetische Aktivität zuschreiben. Allerdings treten die Pulsationen im allgemeinen nicht weltweit auf wie die meisten Störungen korpuskularen Ursprungs, können aber doch Gebiete von beträchtlicher Ausdehnung betreffen. VAN BEMMELEN [3] berichtet über Fälle von Gleichzeitigkeit über mehr als 60 Längengrade; ANGENHEISTER [4] gibt noch größere Entfernungen an. In dem langjährigen Beobachtungsmaterial der argentinischen Observatorien sind viele Fälle gleichzeitiger Pulsationen in La Quiaca und Orcadas del Sur (Süd-Orkney-Inseln) zu finden, also über fast 40 Breitengrade. Über noch weitere Abstände s. Abschnitt E.

2. Wiederkehrneigungen. JOHNSTON [5] hat für kurzperiodische Pulsationen in Watheroo eine Wiederkehrtendenz nach Sonnenrotationen festgestellt. Die von ihm angeführten Daten der Wiederkehrtage fügen sich gut in das Bild von senkrechten Gruppen wiederkehrender erdmagnetischer Charakterzahlen C oder Kennziffern k ein, wie sie bei Anordnung derselben in Zeilen nach Sonnenrotationen auftreten. Dieser Umstand spricht gleichfalls für eine genetische Verwandtschaft mit korpuskularen Störungen, ebenso wie eine Wiederkehrneigung in Abständen von etwa 24 Stunden, nach der Art mancher Bai-Störungen.

3. Jahresgang. Im gleichen Sinne kann das gehäufte Auftreten in den Äquinoktialmonaten gedeutet werden, also den gleichen Jahreszeiten, in denen auch die Aktivität am größten ist. Daneben ist aber auch eine weniger klare ganzjährige Schwankung der Pulsationshäufigkeit vorhanden, deren Phase an den verschiedenen Observatorien schwer in Einklang zu bringen ist. Möglicherweise besteht ein *weltweiter*, nicht nach Nord- und Südhalbkugel unterschiedener Jahresgang mit einem Minimum im Juni oder Juli. Zu einer diesbezüglichen Zusammenstellung von LUBIGER [6] paßt gut die später von OGG [7] bekanntgegebene Statistik für Hermanus in Südafrika; es wird dort ein Maximum im Südsommer festgestellt. Ein solcher weltweiter jährlicher Gang erinnert an das ganz analoge Verhalten der kritischen Frequenzen der F_2-Schicht der Ionosphäre, die ja auch im Juni auf beiden Halbkugeln gleichzeitig ihr Minimum erreichen.

4. Tagesgang. Bisher zeigten alle Observatorien, für welche Pulsationen ausgezählt worden sind, ein deutliches Maximum der Häufigkeit gegen Mitternacht. Die annähernd symmetrische Lage dieses Maximums in bezug auf Mitternacht spricht für eine direkte Abhängigkeit vom Sonnenstand unter dem Horizont. Wahrscheinlich begünstigt das Höherrücken der Schattengrenze in der Ionosphäre das Auftreten der Pulsationen (vgl. hierzu auch weiter unten, Abschnitt D). Ein widersprechendes Bild bietet der Tagesgang auf den Orcadas del Sur (Süd-Orkney-Inseln), wie unten in Abschnitt A angedeutet wird.

Auch die tägliche Schwankung der Amplitudengröße und der Periodenlänge, die VAN BEMMELEN [3] nachgewiesen hat, müßte in einer physikalischen Erklärung berücksichtigt werden.

5. Zusammenhang mit erdmagnetischer Aktivität. Über das Vorhandensein des elfjährigen Zyklus in der Häufigkeit der Mikropulsationen herrschen widersprechende Auffassungen; die statistischen Befunde selbst sind uneinheitlich. Der gelegentlich geäußerte Verdacht, daß die größere Unruhe der Magnetogramme in gestörten Zeiten das Auffinden der kleinen Wellenzüge erschwere und so ein Häufigkeitsminimum während des Aktivitätsmaximums vortäuschen könne, bestätigt die Notwendigkeit einer einheitlicheren statistischen Bearbeitung. Unsere eigenen vorläufigen Resultate legen den Schluß nahe, daß wahrscheinlich doch eine positive Korrelation zwischen Pulsationstätigkeit und erdmagnetischer Aktivität besteht. Auch über Beziehungen zu anderen Arten von (kurzzeitigen) Störungen können jetzt neue Befunde mitgeteilt werden (s. unten Abschnitte C und D).

6. Pulsationen in der Ionosphäre. Der von HARANG [*8*] berichtete Fall von Pulsationen in sehr hohen Ionosphärenschichten (650 bis 800 km), gleichzeitig mit erdmagnetischen Riesenpulsationen in der Nordlichtzone, bietet einen Hinweis für die vermutliche Höhe, in der die Erscheinung ihren Sitz hat. Andere Annahmen wären auch schwerer mit der Ausdehnung der Gebiete zu vereinbaren, die erdmagnetisch gleichzeitig von einem Wellenzug betroffen werden.

Um in Zukunft die statistische Bearbeitung des Beobachtungsmaterials zu erleichtern, wäre es nützlich, wenn sich die Observatorien, welche nicht über schnellregistrierende oder besonders empfindliche Magnetographen verfügen, auf ein bestimmtes *Auswahl- und Auszählkriterium* einigen könnten. Man würde dann leichter zu beurteilen imstande sein, ob die Unterschiede der Observatorien in bezug auf Tages- und Jahresgänge, sowie den Sonnenfleckenzyklus reell sind oder vorgetäuscht werden durch die verschiedene Deutlichkeit der Registrierungen (Schärfe und Dicke) und die ungleiche Empfindlichkeitsschwelle der Beobachter für sehr kleine Amplituden oder für überlagerte Störungen anderer Art als die gesuchten. Für den Einfluß der Kurvenschärfe und -stärke gibt VAN BEMMELEN ein sehr beredtes Beispiel [*3*].

Die Auszählungen, welche am Beobachtungsmaterial des Orcadas-Observatoriums begonnen wurden, und von denen nachstehend einige Ergebnisse als Beispiel mitgeteilt werden, zeigten beträchtliche Unterschiede gegenüber den bisher von anderen Stellen bekannten Statistiken; derartige Widersprüche werden unvermeidlich sein, solange nicht eine Vereinheitlichung der subjektiven Auswahlkriterien stattgefunden hat.

Aus diesen Überlegungen dürfte eine Diskussion über die hierfür benützten Methoden von Interesse sein. Unserer eigenen Auszählung liegen die nachfolgenden Erwägungen und Definitionen zugrunde.

a) Andauer. Die Magnetogramme, die ein Satz ESCHENHAGEN-Variometer liefert (20 mm/h Papiervorschub; Skalenwert für H: 1,8 γ/mm) werden in Stundenintervalle nach Zonenzeit (45° W) unterteilt. Das Auftreten von Pulsationen in einem Stundenintervall wird nicht nach der Art eines Ereignisses mit Alternativausgang einfach als eingetretener

Fall verzeichnet, sondern quantitativ nach seiner Andauer E. Diese kann man ohne Einbuße an Genauigkeit durch Schätzen bestimmen und in Einheiten von $^1/_{10}{}^h$ ausdrücken. (In einem Vorversuch wurde die Andauer stückweise *ausgemessen* und in Einheiten von $^1/_{20}{}^h = 1$ mm ausgedrückt; ein Vergleich beider Verfahren über einen Monat zeigt, daß die wesentlichen Züge bei dem sehr viel bequemeren Abschätzen nach der gröberen Skala von 1 bis 10 genügend zum Ausdruck kommen.) Treten in einem Stundenintervall mehrere getrennte Wellenzüge auf, so wird nur ihre Gesamtdauer notiert und weiterhin berücksichtigt. Als „*Wellenzug*" wird dabei schon eine Folge von nur 2 oder 3 Schwingungen angesehen, sofern sie sich durch genügende Regelmäßigkeit (vgl. Abschnitt c) ihrer Wellenlänge oder Amplitude als pulsatorische Erscheinung auffassen lassen. Gerade auf eine Festlegung einer unteren Grenze der Andauer müssen wir besonderen Wert legen. Kurze Wellenzüge der beschriebenen Art sind zwar am Tage häufiger als nachts und werden daher unseren Tagesgang im Vergleich mit anderen Observatorien systematisch verschieben; aber es ist kein vernünftiges Kriterium angebbar, kraft dessen solche sehr kurzen, aber eindeutig pulsatorischen Kurvenstücke von der Zählung ausgeschlossen werden könnten.

Ein Wellenzug, der über eine Stundengrenze hinwegreicht, ist natürlich folgerichtig mit den entsprechenden Anteilen den beiden angrenzenden Intervallen zuzuschreiben.

Diese Festlegungen gestatten es nicht, unsere Statistik ohne weiteres mit anderen zu vergleichen, die nur auf Häufigkeit des Auftretens ohne Berücksichtigung der Andauer beruhen. Es scheint uns aber von Vorteil, wenn die einzelnen Fälle je nach ihrer Bedeutung in irgend einer Weise mit Gewichten behaftet sind, und hierfür ist offenbar die Andauer die nächstliegende Form.

b) Größe. Weiterhin kann man die Fälle nach ihrer Größe abstufen; hierfür legen wir eine konventionelle Skala mit den Stufen 0, 1 und 2 zugrunde, nach folgender Vorschrift:

Größe $A = 0$ für (beiderseitige) Schwingungsweiten bis zu etwa 0,2 mm,
„ $A = 1$ „ „ „ „ „ „ 0,5 mm,
„ $A = 2$ „ „ „ über „ 0,5 mm.

Die Fälle $A = 0$ liegen oftmals an der Grenze des Auflösungsvermögens des Auges (und des Magnetometers); sie entsprechen, nach dem in Abschnitt a) Gesagten, Amplituden von Bruchteilen eines γ. Es wird aber, mit den weiter unten noch gemachten Einschränkungen bezüglich der Identifizierbarkeit, Wert darauf gelegt, daß keine irgend erkennbaren Fälle von Mikropulsationen ausgeschlossen werden. So sind z. B. alle jene Wellenzüge berücksichtigt, die sich nur in stark geneigten Kurvenstücken daran erkennen lassen, daß die Spur des Lichtpunktes in regelmäßigen Abständen etwas verdickt erscheint. Als Hilfsmittel bei der Durchmusterung dient eine zweifach vergrößernde Lupe. Die Größenbestimmung von A erfolgt durch Schätzen; dabei wird kein allzu großes Gewicht auf eine strenge Berücksichtigung der zahlenmäßigen Stufengrenzen gelegt, die ja nur als angenäherte Richtlinien gedacht sind.

Die Vorschrift hingegen, daß selbst die kleinsten Pulsationen mitzuzählen sind, sofern man sie nur genügend klar als solche klassifizieren kann, wurde konsequent befolgt; hieraus erklärt sich wahrscheinlich wiederum ein Teil der Abweichungen unserer Ergebnisse gegenüber den Befunden anderer Observatorien.

Sind in einem Stundenintervall mehrere Wellenzüge vorhanden oder wechseln die Amplituden innerhalb eines Zuges, — etwa nach Art der öfter beschriebenen „shuttles" — so gibt die *größte* vorkommende Amplitude den Ausschlag.

c) Regelmäßigkeit. Außer nach der Größe kann man die Pulsationen auch nach dem Grade der Regelmäßigkeit der Wellenzüge abstufen. Diese Charakterisierung ist von Nutzen bei allen denjenigen Observatorien, deren Registrierungen auch an magnetisch ruhigen Tagen sehr kleine Schwankungen ähnlicher Größenordnung und Periode zeigen wie die Mikropulsationen. Es gibt offensichtlich alle Stufen des Überganges — auch oft in zeitlicher Folge — zwischen solchen unregelmäßigen kleinsten Schwankungen und den eigentlichen Mikropulsationen von sinusförmigem Verlauf. Letztere können z. B. in der Wellenlänge für einige Zeit streng konstant bleiben, bei unregelmäßig schwankender Amplitude. Der Mehrzahl der Beobachter erscheinen solche Wellenzüge vermutlich subjektiv als zu unregelmäßig, um sie mitzuzählen. Nach dem hier zu beschreibenden Verfahren werden diese Schwankungen jedoch mitberücksichtigt, sofern sie entweder in ihrer Periodenlänge konstant sind oder in der Amplitude. Ein Beispiel relativ beständiger Wellenlängen bei stark schwankenden Amplituden bietet der Zeitraum von etwa 12 bis 14 Uhr des 5. November 1933, der in Abb. 1 wiedergegeben ist. Hier überlagern sich die Mikropulsationen einem an sich schon unregelmäßig bewegten Tagesgange, sind aber für sich allein betrachtet eindeutig aus kurzen Stücken halbwegs regelmäßiger Wellenzüge zusammengesetzt. (Die photographische Wiedergabe verstärkt etwas den Eindruck der Unregelmäßigkeit.)

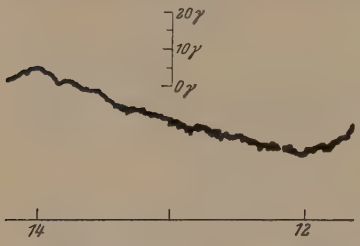


Abb. 1. Unregelmäßige Mikropulsationen im Magnetogramm der Horizontalkomponente, Orcadas, 5. November 1933, mittags (Zeitskala von rechts nach links; im Original $1^h = 20$ mm; 45° westl. Greenw.).

Zur Abschätzung der Regelmäßigkeit R dient wiederum eine dreistufige Skala, und zwar haben wir in Analogie zu den erdmagnetischen Charakterzahlen mit $R = 0$ die am wenigsten gestörten, also regelmäßigsten Pulsationen bezeichnet, mit $R = 1$ die leicht gestörten und mit $R = 2$ die ziemlich unregelmäßigen, vorausgesetzt, daß sie überhaupt noch als Pulsationen angesehen werden können.

Da auch hinsichtlich der Periodenlänge keine sehr scharfe Abgrenzung gegenüber anderen Schwankungen besteht, haben wir festgesetzt, daß nur Pulsationen mit einer Schwingungsdauer bis zu 180 Sekunden berücksichtigt werden; diese Beschränkung schließt nur sehr wenige zweifelhafte Fälle aus.

d) Pulsationsfreie Zeiträume. Die oben in Abschnitt b) bezüglich der Gründlichkeit der Durchmusterung aufgestellten Forderungen werden nunmehr im gegenteiligen Sinne durch die Vorschrift eingeschränkt, daß sich der Beobachter des Urteils überhaupt enthalten soll, wenn irgend Zweifel darüber bestehen, ob in einem gegebenen Teilstück des Magnetogrammes Pulsationen vorhanden sind oder nicht. Zu diesem Zwecke wird für jedes Stundenintervall neben der Andauer E auch noch die Andauer X der nicht charakterisierbaren Teilstücke ermittelt; in X sind natürlich auch die Unterbrechungen im Magnetogramm einzurechnen, sofern sie nicht durch Interpolation überbrückt werden können.

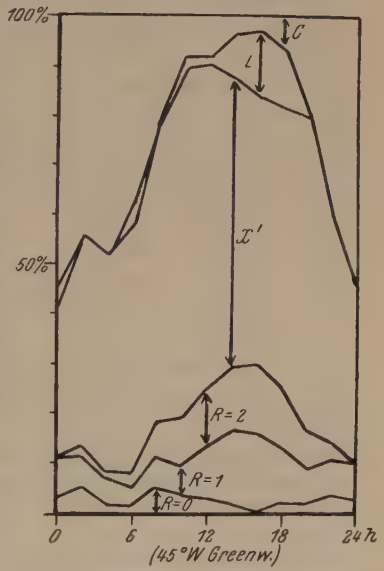


Abb. 2. Tagesgang der Mikropulsationen im Orcadas-Observatorium, Horizontalkomponente, Januar 1933. Anteile der Zeiten mit sehr regelmäßigen ($R = 0$), mäßig gestörten ($R = 1$) und unregelmäßigen ($R = 2$) Pulsationen, der sicher pulsationsfreien Zeiten (C), der nicht eindeutig charakterisierbaren (X') und der Lücken in den Registrierungen (L). Monatssummen über Zweistundenintervalle.

In der Praxis haben wir es nach einigen Vorversuchen so gehalten, daß wir umgekehrt die Magnetogramme nach *eindeutig pulsationsfreien* Teilstücken durchmustert haben. Diesen ebenfalls in $^1/_{10}$-Stunden-Einheiten abgeschätzten Anteil nennen wir C, so daß also $X = 10 - E - C$.

Durch die Einführung der Kategorie X wird nun unsere Statistik zwar dreiklassig, anstelle einer einfachen Alternativeinteilung; man hat aber dafür den Vorteil, bei der Entscheidung über die Fälle E (Vorhandensein) und C (Abwesenheit) strengere Forderungen anlegen zu können.

Im folgenden sind einige Teilergebnisse angeführt, die als Beispiel dafür dienen sollen, wie sich die Beschreibung der charakteristischen Züge der Pulsationsstatistik, etwa des Tagesganges, bei Anwendung unseres Auszähl- und Einteilungsverfahrens gestalten läßt. Die Durchmusterung erstreckt sich vorläufig nur auf den Anfang des Jahres 1933; es ist beabsichtigt, zuerst die 13 Monate des 2. Internationalen Polarjahres zu bearbeiten.

A. Tagesgang der Andauer. In Abb. 2 ist für den Januar des Jahres 1933 der tägliche Gang von E und C (und damit auch von X) dargestellt, erhalten aus den Mikropulsationen der Horizontalkomponente H im Orcadas-Observatorium (Süd-Orkney-Inseln). Diese Komponente ist in Orcadas durchweg die am stärksten von Mikropulsationen betroffene; die Mehrzahl der Fälle ist überhaupt nur in H erkennbar. Die Abbildung

gibt für zweistündige Intervalle die monatlichen Gesamtsummen der in einzelnen unterschiedenen Gruppen. Wie die Abstandspfeile andeuten, sind diese Gruppen durch die *Breite der Bänder* zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Kurven ausgedrückt; die *absolute Höhe* der untersten Kurve gibt also die Fälle $R = 0$; die Höhe der zweiten Kurve die *Summe* der Fälle $R = 0$ und $R = 1$, usw.

Es überrascht nicht nur die große Gesamtdauer der Pulsationen, sondern auch das Maximum ihres Auftretens in den Nachmittagsstunden. Die Fälle $R = 0$ für sich allein ergeben bereits eine mittlere Belegung pro Zweistunden-Intervall, wie sie in anderen Observatorien kaum von der Gesamtzahl aller Fälle erreicht wird. Wollte man daraus folgern, daß unser Einstufungskriterium unter $R = 0$ wahrscheinlich ungefähr gerade alle jene Fälle erfaßt hat, die andere Beobachter überhaupt nur als Mikropulsationen gelten lassen würden, so stieße man immer noch auf die unerklärliche Tatsache des abnormalen Tagesganges. Zwar haben die Fälle $R = 0$ wenigstens nicht das Nachmittagsmaximum der beiden anderen Gruppen, aber es fehlt ihnen doch die an anderen Observatorien so charakteristische Häufung um Mitternacht. Es bleibt abzuwarten, ob die vollständige Durchmusterung dieses überraschende Bild noch ändern wird; soviel können wir aber schon jetzt versichern, daß bei mehrmaliger gründlicher Wiederholung der Januar-Auszählung immer wieder ganz eindeutige Fälle von Pulsationen in den Mittags- und Nachmittagsstunden festzustellen waren, also zu Zeiten, die an anderen Observatorien sehr arm an Pulsationen oder gänzlich frei davon sind. Es ist kennzeichnend, daß die Breite des C-Bandes im Diagramm auch in den Nachmittagsstunden ihr Minimum erreicht; die mit Sicherheit pulsationsfreien Zeitabschnitte sind im Mittel am längsten oder am häufigsten um Mitternacht. Dieser tägliche Gang von C ist durch das Fehlen der *unregelmäßigen* Kleinstörungen in den Nachtstunden bedingt; vielleicht liegt hierin auch der Grund, warum die meisten Beobachter an anderen Observatorien in den unruhigeren Tagesstunden keine Mikropulsationen finden.

Eine der Abb. 2 analoge Darstellung, in der die Tagesgänge nach den *Amplituden* der gefundenen Pulsationen unterschieden werden, zeigt das Nachmittagsmaximum der Andauer in allen drei Stufen; $A = 0$ hat einen wenig ausgeprägten Tagesgang, aber immerhin ein klares Mitternachtsminimum; $A = 1$ und $A = 2$ zeigen Minima um 6 Uhr morgens.

B. Tagesgang der Häufigkeit. Berücksichtigt man statt der Andauersummen pro Zweistunden-Intervall auch die Häufigkeit des Auftretens, so kann man die mittlere Andauer (Belegung) bestimmen. Die Häufigkeit der Stunden-Intervalle, in denen Mikropulsationen vorkommen, hat einen Tagesgang, der für $R = 0$ ähnlich wenig ausgeprägt ist wie die entsprechende Kurve in Abb. 2, dagegen für $R = 2$ wieder ein Maximum am Nachmittag und ein ganz ausgeprägtes Minimum um Mitternacht zeigt; die Gruppe $R = 1$ stellt einen Zwischentyp dar. Von den 724 Stundenintervallen des Monats haben 351 irgendeine Art von Mikropulsationen

(verteilt auf 61, 161 und 129 Fälle für $R = 0$, 1 und 2); nur ein einziger dieser Fälle gehört der Gruppe $R = 2$ in dem Intervall 23 bis 24 Uhr an.

Die mittlere Belegung in den pulsationsgestörten Zweistunden-Intervallen ist 0,32 bei $R = 0$, 0,38 bei $R = 1$ und 0,40 bei $R = 2$; bestimmt man die entsprechenden Belegungsdichten für die einzelnen Zweistunden-Intervalle, so erhält man für die R-Gruppen ähnliche Tagesgänge wie früher; bei $R = 0$ hebt sich das Nachmittagsminimum um 16 Uhr deutlicher hervor; man darf daraus (mit einigen Vorbehalten) schließen, daß die sehr regelmäßigen Pulsationen am Nachmittag kürzere Wellenzüge bilden als zu den übrigen Tagesstunden, die unregelmäßigen umgekehrt.

C. Zusammenhang mit erdmagnetischem Störungsgrad. Zählt man die Andauerwerte E für dreistündige Intervalle zusammen und ordnet diese Summen nach den zugehörigen internationalen Aktivitätszahlen k_p, so ergibt sich eine positive Korrelation: die Intervalle mit hohen k_p sind im Mittel häufiger und länger andauernd von Mikropulsationen betroffen als diejenigen mit niedrigen Aktivitätswerten. Dieser Zusammenhang ist bei den Pulsationen vom Typ $R = 2$ nur schwach.

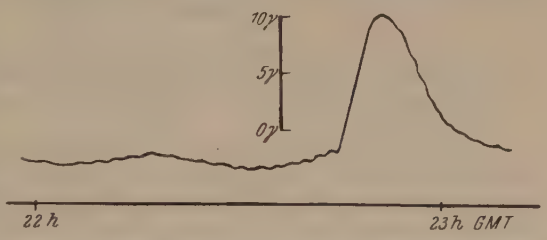


Abb. 3. Erlöschen von Mikropulsationen während der ansteigenden Phase eines „solar flare effect"; Orcadas H, 20. Januar 1933. Maßstab der Originalregistrierung: $1^h = 20$ mm; $1{,}76\,\gamma = 1$ mm.

D. Zusammenhänge mit einzelnen Störungen. Bei der Durchsicht der Magnetogramme fällt es auf, daß die Pulsationen vorzugsweise auf *ansteigenden* Kurvenstücken auftreten; während der Bai-Störungen ist dies fast die Regel. Dieser Tatbestand kann statistisch belegt werden, indem man den einzelnen Wellenzügen bei der Auszählung eine mit Vorzeichen behaftete, abgeschätzte Neigungskennziffer zuschreibt, die etwa von -2 bis $+2$ abgestuft sein kann; Wellenzüge, die keine einheitliche Neigung haben, kennzeichnet man besonders und läßt sie in der späteren statistischen Bearbeitung unberücksichtigt. Mit diesem Verfahren haben wir bei der ersten Durchmusterung der Januar-Registrierungen ein Überwiegen der positiven Neigungen und auch einen Tagesgang der mittleren Neigungskennziffer gefunden, der vom gewöhnlichen Tagesgang der Horizontalkomponente abweicht und vermutlich durch den täglichen Gang der Bai-Störungen bestimmt ist.

Dieser Zusammenhang dürfte für die physikalische Deutung von Wichtigkeit sein. Ebenso interessant ist die Beobachtung eines Falles von vorübergehendem vollständigem Erlöschen der Mikropulsationen während der ansteigenden Phase eines „solar flare effect". Dieses durch einen glücklichen Zufall eingetretene Zusammentreffen zweier unabhängiger Phänomene (Abb. 3) beleuchtet die inhibierende Rolle, welche vermutlich die ionisierende Wellenstrahlung der Sonne beim Zustande-

kommen des Tagesganges der Mikropulsationen spielt (vgl. oben Abschnitt 4).

E. Ausdehnungsbereich der pulsatorischen Störungen. Außer dem schon erwähnten Zusammentreffen von Pulsationen in Orcadas und La Quiaca glauben wir auch Anzeichen dafür zu haben, daß im Sinne Angenheisters manche Mikropulsationen die Nord- und Südhalbkugel gemeinsam betreffen, wenn auch nicht immer streng gleichzeitig. Dies wurde an Hand der von Harang publizierten Liste der Riesenpulsationen festgestellt, welche die norwegischen Observatorien während des Polarjahres registriert haben [*9*]. Von den 20 Fällen, die Harang verzeichnet, sind 8 zwanglos mit entsprechenden Wellenzügen in Orcadas in Zusammenhang zu bringen, wobei die Einsätze manchmal auf 1 bis 2 Minuten gleichzeitig sind.

Literaturverzeichnis.

1. Störmer, C.: Periodische Elektronenbahnen im Felde eines Elementarmagneten und ihre Anwendung auf Brüches Modellversuche und auf Eschenhagens Elementarwellen des Erdmagnetismus. Z. Astrophysik **1** 237—274 (1930).
2. Ross, W.: Direction of arrival of ionospheric radio waves. Nature **166** Nr. 4233, 1011—1014, (1950).
3. van Bemmelen, W.: On Pulsations. Observations made at Batavia, vol. **29** App. 1—10 (1906).
4. Angenheister, G.: Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit magnetischer Störungen und Pulsationen. Göttinger Nachr., Math.-Phys. Kl., 1913, 565—581.
5. Johnston, H. F.: Short-period magnetic pulsations at the Watheroo Magnetic Observatory. Int. Ass. Terr. Magn. and Electr. Bull. No. 10 (Edinburgh Meeting), 262—265.
6. Lubiger, F.: Über die vom Samoa-Observatorium registrierten erdmagnetischen Pulsationen. Z. Geophysik **11**, 116—126 (1935).
7. Ogg, A.: Oscillations and Pulsations at Hermanus 1941. Terr. Magn. **47** 227—233 (1942).
8. Harang, L.: Pulsations in an ionized region at height of 650—800 km during the appearance of giant pulsations in the geomagnetic records. Terr. Magn. **44**, 17—19 (1939).
9. — Report on sinusoidal oscillations which occurred on the rapid registration records in Bossekop, Tromsö and Bodö. Publ. Norske Inst. Kosm. Fys. Nr. 6, 21*—36*; Bergen 1935.

550.341

(Istituto Nazionale di Geofisica, Roma.)

Teoria delle Onde di Rayleigh in Mezzi elastici e firmo-elastici, esposta con le Omografie vettoriali.

Di

Pietro Caloi.

Con 3 figure.

Riassunto. Il lavoro pubblicato da Lord Rayleigh, nel 1885, sulla propagazione delle onde alla superficie di un mezzo elastico, isotropo, indefinito è stato fonte di ulteriori ricerche vaste e numerose. Quì si espone la teoria classica delle onde di Rayleigh valendosi delle omografie vettorali. Si passa poi ad estendere la teoria ad un mezzo elastico, che ammetta attrito interno (firmo-viscosità). Ciò consente di pervenire ai seguenti risultati:

1. La velocità di propagazione delle onde di Rayleigh in un mezzo firmo-elastico, da un valore teoricamente infinito per periodi nulli, tende rapidamente, per periodi crescenti, al valore che le compete in mezzi puramente elastici, tanto più rapidamente quanto maggiore è il valore del rapporto μ/μ' (μ = costante di Lamé; μ' = coefficiente d'attrito interno equivoluminale).

2. La firmo-viscosità determina una sensibile riduzione della componente verticale del moto, riduzione che è tanto maggiore, quanto più piccoli sono il rapporto μ/μ' e il periodo proprio dell'onda: per onde originanti con grossi periodi, l'azione dell'attrito interno sul rapporto delle ampiezze è pressochè nulla e il mezzo si comporta come puramente elastico. La firmo-viscosità può variare il rapporto delle ampiezze Z/H da un valore prossimo all'unità (1.05) a 1.47, valore che la teoria di Rayleigh assegna a quel rapporto per $\lambda = \mu$.

3. Anche in un mezzo firmo-viscoso, le onde tipo Rayleigh costringono le particelle raggiunte su traiettorie ellittiche; però, a differenza di quanto avviene in un mezzo puramente elastico, tali traiettorie non sono riferite ai propri assi. Solo per periodi infinitamente piccoli o infinitamente grandi, le traiettorie ellittiche tendono a quelle riferite ai propri assi.

4. La ricerca ha consentito di chiarire un altro aspetto della propagazione delle onde superficiali, finora rimasto insoluto. Nella classica teoria di Rayleigh, le onde che portano il suo nome sono considerate come libere, persistenti, non soggette ad assorbimento da parte del mezzo. L'osservazione prova invece che l'assorbimento è fortissimo per i periodi più piccoli e tende

a decrescere rapidamente, per raggiungere il valore di circa $e^{-0.0003}$ per periodi dell'ordine di 20 s. La nuova teoria prova che in un mezzo firmo-viscoso (con un rapporto $\mu/\mu' = 50\,\text{sec}^{-1}$, conforme alla media dei valori osservati) ciò è pienamente dimostrato: da un assorbimento elevatissimo per piccoli periodi, passando a periodi dell'ordine di 20 s e per $\mu/\mu' = 50$, il coefficiente d'assorbimento diviene dell'ordine di 0.0003, che è appunto quello generalmente osservato.

Zusammenfassung. Die im Jahre 1885 von Lord Rayleigh veröffentlichte Arbeit über die Fortpflanzung von Wellen auf der Oberfläche eines elastischen, isotropen und unbegrenzten Mediums ist zum Ausgangspunkt für zahlreiche und ausgedehnte Untersuchungen geworden. An dieser Stelle wird zunächst die klassische Wellentheorie von Rayleigh dargelegt, die auf vektoriellen Homographien beruht, und darauf auf ein elastisches Medium ausgedehnt, in welchem innere Reibung zugelassen wird (Fest-Elastizität). Daraus werden folgende Resultate abgeleitet:

1. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit Rayleighscher Wellen in einem fest-elastischen Medium strebt von einem theoretisch unendlichen Wert für verschwindend kurze Schwingungsdauer für wachsende Perioden schnell dem Werte zu, der einem rein elastischen Medium entspricht; diese Änderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit verläuft parallel dem Wert des Quotienten μ/μ' (wo μ die Lamésche Konstante und μ' der Koeffizient der inneren Reibung bei gleichem Volumen ist). Dieser innere Reibungseffekt wurde neuerdings von den Japanern Ikegami und Kishinouye auf experimentellem Wege bestätigt.

2. Die Fest-Viskosität erzeugt eine merkliche Reduktion der Vertikalkomponente der Bewegung, die um so größer wird, je kleiner der Quotient μ/μ' und die Eigenperiode der Welle ist. Für Wellen, die mit großen Perioden einsetzen, ist die Wirkung der inneren Reibung auf das Amplitudenverhältnis beinahe Null und das Medium verhält sich wie rein elastisch. Die Fest-Viskosität kann das Amplitudenverhältnis Z/H von einem Wert nahe der Einheit (1,05) bis zum Wert 1,47 variieren lassen, der nach der Theorie von Rayleigh für $\lambda = \mu$ gilt.

3. Auch in einem fest-zähen Medium befolgen bei Rayleigh-Wellen die bewegten Teilchen elliptische Bahnen; doch beziehen sich diese Bahnen, im Gegensatz zu dem Verhalten in einem rein elastischen Medium, nicht auf die eigenen Achsen. Nur für unendlich kleine oder unendlich große Schwingungsdauer streben die elliptischen Bahnen einer Orientierung auf die eigenen Achsen zu.

4. Die vorliegende Untersuchung hat zur Abklärung eines bisher noch ungelösten Problems der Fortpflanzung von Oberflächenwellen geführt. In der klassischen Theorie von Rayleigh werden die nach ihm benannten Wellen als frei, persistent und keiner Absorption von Seiten des Mediums unterworfen angesehen. Die Beobachtung beweist dagegen, daß die Absorption für kleinere Schwingungsdauer besonders groß ist, mit wachsender Periode schnell abnimmt und für eine Periode von etwa 20 sec den Wert von zirka $e^{-0.0003}$ annimmt. Aus der neuen Theorie läßt sich eindeutig beweisen, daß in einem fest-zähen Medium (mit einem dem Mittel der Beobachtungsergebnisse entsprechenden Quotienten $\mu/\mu' = 50\,\text{sec}^{-1}$) der Absorptionskoeffizient von sehr hohen Werten für kleine Perioden beim Übergang zu einer Schwingungsdauer von 20 sec bei $\mu/\mu' = 50$ die Größenordnung 0,0003 annimmt, was gerade den Beobachtungsresultaten entspricht.

Summary. Lord RAYLEIGH's publication of 1885 on the propagation of waves at the surface of an elastic, isotrope and infinite medium has become the origin of numerous and exhaustive investigations. The classic wave theory of RAYLEIGH, founded on the vectorial homographies, is exposed in the present paper and then extended to an elastic medium admitting internal friction (firmo-viscosity). This leads to the following results:

1. The speed of propagation of RAYLEIGH waves in a firmo-elastic medium tends from a theoretically infinite value for periods quasi nil, for increasing periods rapidly towards a value which corresponds to a purely elastic medium with increase of the quotient μ/μ' (μ = constant of LAMÉ, μ' = coefficient of internal friction at constant volume). This effect of internal friction has recently been confirmed in experimental method by the Japaneses IKEGAMI and KISHINOUYE.

2. The firmo-viscosity produces a noticeable reduction of the vertical component of the motion; this reduction increases with the diminution of the quotient μ/μ' and the original period of the wave. For waves starting with great periods the effect of the internal friction on the ratio of the amplitudes is almost nil and the medium is like purely elastic. The firmo-viscosity can provoke variations of the ratio of the amplitudes Z/H from 1,05 to 1,47 which according to the RAYLEIGH theory must be valid for $\lambda = \mu$.

3. Even in a firmo-viscous medium the RAYLEIGH waves impose elliptic trajectories to the particles. But, contrary to the behaviour in a purely elastic medium, these trajectories do not refer to their own axes. Only for infinitely small or infinitely great periods of oscillation the elliptic trajectories tend towards an orientation on their own axes.

4. The present investigation leads to a clarification of a hitherto unsolved problem of the propagation of surface waves. In the classical theory of RAYLEIGH the waves which are called after his name are considered to be free, persistent and not subject to any absorption by the medium. But, the observation proves that the absorption for small periods of oscillation is particularly big, decreases rapidly with increasing period and for a period of about 20 sec takes the value of ca. $e^{-0.0003}$. It can be proved from the new theory that in a firmo-viscous medium (with a quotient $\mu/\mu' = 50\ \text{sec}^{-1}$ corresponding to the mean value of the observational data) the coefficient of absorption has very high values for small periods, but takes a magnitude of 0.0003 for a period of 20 sec at $\mu/\mu' = 50$, what directly corresponds to the results of observations.

Résumé. Le travail publié par Lord RAYLEIGH en 1885 sur la propagation des ondes à la surface d'un milieu élastique, isotrope et indéfini a été à l'origine de recherches ultérieures, étendues et nombreuses. On expose ici la théorie classique de RAYLEIGH fondée sur les homographies vectorielles. On passe ensuite à la théorie étendue à un milieu élastique admettant un frottement intérieur (firmo-viscosité). Cela mène aux résultats suivants:

1° La vitesse de propagation des ondes de RAYLEIGH dans un milieu firmo-élastique, d'une valeur théoriquement infinie pour les périodes nulles, tend rapidement, pour les périodes croissantes, à la valeur qui lui correspond en un milieu purement élastique, d'autant plus rapidement que la valeur du rapport μ/μ' (μ = constante de LAMÉ; μ' = coefficient du frottement intérieur équivoluminal) est plus grande. Cette sorte d'effet du frottement intérieur a été tout récemment confirmé, par voie expérimentale, par les japonais IKEGAMI et KISHINOUYE.

2° La firmo-viscosité provoque une sensible réduction de la composante verticale du mouvement, réduction qui est d'autant plus grande que le rapport μ/μ' et la période propre de l'onde sont plus petits: pour des ondes provenant de grandes périodes, l'action du frottement intérieur sur le rapport des amplitudes est presque nulle et le milieu se comporte comme s'il était purement élastique. L'action du frottement intérieur peut faire varier le rapport des amplitudes Z/H de la valeur 1.05 à celle de 1.47 que la théorie de RAYLEIGH assigne à ce rapport pour $\lambda = \mu$.

3° Même dans un milieu firmo-visqueux, les ondes du type RAYLEIGH imposent aux particules des trajectoires elliptiques; cependant, à la différence de ce qui arrive dans un milieu purement élastique, de telles trajectoires ne se réfèrent pas aux propres axes. Ce n'est que pour des périodes infiniment petites ou infiniment grandes que les trajectoires elliptiques tendent vers celles qui se réfèrent aux propres axes.

4° Cette étude a permis d'éclaircir théoriquement un autre aspect de la propagation des ondes superficielles jusqu'à présent resté non résolu. Dans la théorie classique de RAYLEIGH les ondes qui portent son nom sont considérées comme des ondes libres, persistantes, non sujettes à l'absorption de la part du milieu. Or, l'observation prouve que l'absorption de la part du milieu est très forte pur les périodes plus petites et tend à décroître rapidement pour atteindre la valeur de $e^{-0.0003}$ environ pour des périodes de l'ordre de 20 s. La nouvelle théorie prouve que dans un milieu firmo-élastique (avec un rapport $\mu/\mu' = 50\ \text{sec}^{-1}$ conforme à la moyenne des valeurs observées) cela est pleinement démontré: partant d'une absorption très élevée pour de petites périodes pour arriver à des périodes de l'ordre de 20 s et pour $\mu/\mu' = 50$, le coefficient d'absorption devient de l'ordre de 0.0003 qui est précisément celui généralement fourni par l'expérience.

1. Premesse sulle omografie vettoriali.

Si sa che è detta operazione vettoriale ogni operazione che muta un vettore in un altro; il simbolo con cui l'operazione viene indicata è detto operatore [*1*].

Un'operazione vettoriale lineare — tale cioè che soddisfi alle condizioni $\alpha(m\vec{u}) = m\,\alpha\vec{u}$; $\alpha(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots) = \alpha\vec{u}_1 + \alpha\vec{u}_2 + \ldots$, dove α è un operatore ed $\vec{u}$, $\vec{u}_1$, ... vettori — è detta *omografia*.

Fra i vari tipi di omografie vettoriali ricorderemo i seguenti:

1. *L'omografia assiale*, che trasforma un vettore nel suo ortogonale. Se α è un operatore ed $\vec{a}$ un vettore, l'omografia assiale si indica col simbolo

$$\alpha = \vec{a}\Lambda.$$

Un vettore parallelo ad $\vec{a}$ viene evidentemante trasformato in un vettore nullo.

2. Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono vettori, un'omografia per la quale

$$\alpha\,\vec{a}\times\vec{b} = \alpha'\,\vec{b}\times\vec{a}$$

è detta *omografia coniugata* di α; la indicheremo con $K\,\alpha$.

È detta *omografia simmetrica* o *dilatazione*, ogni omografia uguale alla sua coniugata.

È per definizione

$$D\,\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + K\,\alpha)$$

la dilatazione di α.

Una qualunque omografia può quindi scriversi identicamente

$$\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + K\,\alpha) + \frac{1}{2}(\alpha - K\,\alpha).$$

Riguardo al secondo termine del secondo membro osserviamo quanto segue.

Si prova che un'omografia uguale alla propria coniugata cambiata di segno è un'*assiale*. Infatti, se γ è una tale omografia ($\gamma = -K\,\gamma$) e se $\vec{v}$ è un vettore, ricorrendo alla terna fondamentale $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, potremo scrivere

$$\vec{v} = (\gamma\,\vec{j} \times \vec{k})\,\vec{i} + (\gamma\,\vec{k} \times \vec{i})\,\vec{j} + (\gamma\,\vec{i} \times \vec{j})\,\vec{k},$$

da cui

$$\vec{v}\,\Lambda\,\vec{i} = \gamma\,\vec{i},\ \vec{v}\,\Lambda\,\vec{j} = \gamma\,\vec{j},\ \vec{v}\,\Lambda\,\vec{k} = \gamma\,\vec{k}.$$

è quindi un'assiale; un'assiale è quindi anche $(\alpha - k\,\alpha)$. Pertanto, *ogni omografia è sempre la somma di una dilatazione e di un'assiale*, l'una o l'altra potendo anche essere nulla.

L'assiale $\frac{1}{2}(\alpha - K\,\alpha)$ può esprimersi nella forma canonica $\vec{v}\,\Lambda$; percio, si puo porre

$$\frac{1}{2}(\alpha - K\,\alpha) = V\,\alpha\,\Lambda, \tag{1}$$

dove $V\,\alpha$ è detto il vettore dell'omografia α.

Fatta la posizione

$$\frac{1}{2}(\alpha + K\,\alpha) = D\,\alpha,$$

potremo scrivere

$$\alpha = D\,\alpha + V\,\alpha\,\Lambda. \tag{2}$$

Il doppio vettore dell'omografia $\frac{d\vec{u}}{dP}$ si chiama il *rotazionale* (o la *rotazione* o il *vorticale*) di $\vec{u}$ e si indica, come è noto, con rot $\vec{u}$.

È dunque, per definizione,

$$\text{rot}\,\vec{u} = 2\,V\frac{d\vec{u}}{dP} = 2\,V\,\alpha,$$

da cui

$$\text{rot}\,\vec{u}\,\Lambda = 2\,V\,\alpha\,\Lambda.$$

Ora, se $\vec{s}(P)$ rappresenta una deformazione infinitesima, allora $\alpha = \frac{d\vec{s}}{dP}$ è l'omografia della deformazione elastica.

Si ha quindi, per la (2),

$$D\frac{d\vec{s}}{dP} = \frac{d\vec{s}}{dP} - \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{s}\,\Lambda. \tag{3}$$

Per la (1) e la (3) è ancora

$$\frac{d\vec{s}}{dP} = \operatorname{rot}\vec{s}\,\Lambda + K\frac{d\vec{s}}{dP}. \tag{4}$$

3. Ricordiamo ancora che si definisce come *isomeria* ogni omografia propria σ (non degenere), la cui coniugata sia uguale alla propria inversa:

$$K\sigma = \sigma^{-1}, \text{ cioè } K\sigma\cdot\sigma = 1.$$

Le isomerie lasciano invariati i moduli dei vettori e gli angoli che questi fanno tra loro.

4. Sia $\alpha(P)$ un'omografia del punto P. Posto $P = h\vec{a}$, se

$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(P + h\vec{a}) - \alpha(P)}{h}$$

esiste, esso costituisce la derivata di α rispetto αP, nella direzione di $\vec{a}$ e si indica con il simbolo $\frac{d\alpha}{dP}\vec{a}$.

La derivata di α nella direzione dell'asse delle x si potrà quindi così rappresentare: $\frac{d\alpha}{dP}\vec{i} = \frac{\partial\alpha}{\partial x}$.

Si prova che

$$\vec{v}\times\vec{a} = \operatorname{div}(k\,\alpha\,\vec{a}); \tag{5}$$

basta riferire $\vec{v}$ ad una terna fondamentale, considerandolo come risultante delle sue derivate nella direzione dei tre assi x, y, z.

Assegnata un'omografia funzione di P, $\alpha(P)$, esiste sempre un vettore $\vec{v}$ soddisfacente alla (5). Tale vettore è detto il *gradiente* dell'omografia α, per cui, per definizione,

$$\operatorname{grad}\alpha\times\vec{a} = \operatorname{div}(k\,\alpha\,\vec{a}).$$

Determiniamo ora il gradiente della (4).

Intanto, per $\alpha = \vec{u}\,\Lambda$,

$$\operatorname{grad}(\vec{u}\,\Lambda)\times\vec{a} = -\operatorname{div}(\vec{u}\,\Lambda\,\vec{a}).$$

Dalla teoria dei vettori, e dall'essere $\vec{a}$ un vettore costante, segue

$$\operatorname{grad}(\vec{u}\,\Lambda)\times\vec{a} = -\vec{a}\times\operatorname{rot}\vec{u}.$$

Per l'arbitrarietà di $\vec{a}$ e facendo $\vec{u} = \text{rot}\ s\Lambda$, si ottiene

$$\text{grad rot}\ \vec{s}\Lambda = -\text{rot rot}\ \vec{s}. \tag{6}$$

Si ha inoltre, per essere $d\vec{P}$ un vettore indipendente da P, e per la definizione di gradiente (in senso vettoriale),

$$\text{grad}\ K\frac{d\vec{s}}{dP} \times d\vec{P} = d\,(\text{div}\ \vec{s})$$
$$= \text{grad div}\ \vec{s} \times d\vec{P}.$$

Poichè $d\vec{P}$ è un vettore qualunque, potremo quindi concludere

$$\text{grad}\frac{d\vec{s}}{dP} = -\text{rot rot}\ \vec{s} + \text{grad div}\ \vec{s}. \tag{7}$$

5. Si definiscono come invarianti I, II e III di un'omografia α, i numeri reali relativi $I_1\alpha$, $I_2\alpha$, $I_3\alpha$, funzioni della sola α, tali che qualunque siano i vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ si abbia sempre:

$$I_1\alpha = \frac{\vec{v}\Lambda\vec{w} \times \alpha\vec{u} + \vec{w}\Lambda\vec{u} \times \alpha\vec{v} + \vec{u}\Lambda\vec{v} \times \alpha\vec{w}}{\vec{u}\Lambda\vec{v} \times \vec{w}},$$

$$I_2\alpha = \frac{\alpha\vec{v}\Lambda\alpha\vec{w} \times \vec{u} + \alpha\vec{w}\Lambda\alpha\vec{u} \times \vec{v} + \alpha\vec{u}\Lambda\alpha\vec{v} \times \vec{w}}{\vec{u}\Lambda\vec{v} \times \vec{w}},$$

$$I_3\alpha = \frac{\alpha\vec{u}\Lambda\alpha\vec{v} \times \alpha\vec{w}}{\vec{u}\Lambda\vec{v} \times \vec{w}}.$$

I rapporti a secondo membro delle espressioni di $I_1\alpha$, $I_2\alpha$, $I_3\alpha$ *non dipendono* dalla particolare terna di $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$; dipendono solo da α. Donde la qualifica di invarianti di α data alle tre grandezze $I_1\alpha$, $I_2\alpha$, $I_3\alpha$.

Fra le notevoli proprietà dell'invariante terzo, va notata la seguente:

$$I_3(\beta\alpha) = I_3\beta \cdot I_3\alpha, \tag{8}$$

cioè l'invariante terzo di un prodotto è uguale al prodotto degli invarianti terzi dei singoli fattori, come si prova subito costruendo $I_3\beta$ sulla terna $\alpha\vec{i}, \alpha\vec{j}, \alpha\vec{k}$.

Se si sceglie per semplicità la terna fondamentale $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, avremo per gli invarianti le espressioni

$$I_1\alpha = \alpha\vec{i} \times \vec{i} + \alpha\vec{j} \times \vec{j} + \alpha\vec{k} \times \vec{k},$$
$$I_2\alpha = \alpha\vec{i}\Lambda\alpha\vec{j} \times \vec{k} + \alpha\vec{j}\Lambda\alpha\vec{k} \times \vec{i} + \alpha\vec{k}\Lambda\alpha\vec{i} \times \vec{j}, \tag{9}$$
$$I_3\alpha = \alpha\vec{i}\Lambda\alpha\vec{j} \times \alpha\vec{k}.$$

Sia $P = P(x, y, z)$. Con riferimento alla terna fondamentale, poniamo

$$\vec{u}(x, y, z) = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}.$$

Per definizione è

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}.$$

Determiniamo l'invariante primo di $\frac{d\vec{u}}{dP}$. Si ha, dalla (9),

$$I_1 \frac{d\vec{u}}{dP} = \frac{d\vec{u}}{dP}\vec{i} \times \vec{i} + \frac{d\vec{u}}{dP}\vec{j} \times \vec{j} + \frac{d\vec{u}}{dP}\vec{k} \times \vec{k}$$
$$= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z},$$

come si ottiene facilmente determinando le espressioni di $\frac{d\vec{u}}{dP}\vec{i}$, $\frac{d\vec{u}}{dP}\vec{j}$, $\frac{d\vec{u}}{dP}\vec{k}$.

Consegue

$$\operatorname{div} \vec{u} = I_1 \frac{d\vec{u}}{dP}. \tag{10}$$

Omografia della deformazione elastica.

Sia $\vec{s}$ il vettore-spostamento di un generico punto P di un corpo elastico, sottoposto a deformazione. Ad ogni valore della funzione vettoriale $\vec{s}(P)$ corrisponderà una determinata deformazione.

Sia $P_1 = P + d\vec{P}$ un punto infinitamente vicino a P; e siano P' e P_1' i punti corrispondenti a P e a P_1, dopo la deformazione.

A meno di infinitesimi di ordine superiore, si ha

$$P_1' - P' = d\vec{P} + \frac{d\vec{s}}{dP} d\vec{P}.$$

Resta così definita la deformazione della particella considerata. La corrispondenza fra gli elementi $P_1 - P = d\vec{P}$ della particella indeformata e gli elementi $P_1' - P' = d\vec{P'}$ della stessa particella, dopo la deformazione, dipende dall'omografia $\frac{d\vec{s}}{dP}$, detta appunto *omografia della deformazione*. Indicandola con α avremo

$$d\vec{P'} = (1 + \alpha)\, d\vec{P}. \tag{11}$$

L'elemento della deformazione si deduce quindi da quello indeformato, applicando a quest'ultimo l'omografia $1 + \alpha$.

Se σ è un'isomeria, funzione del punto P, e φ una dilatazione, si prova che

$$\sigma\varphi = 1 + \alpha. \tag{12}$$

L'isomeria σ rappresenta la *rotazione* della particella in P.

Poichè nell'identità ($\varphi = 1$) è $1 + \alpha = \sigma$, la φ viene a rappresentare la pura *deformazione* (*strain* degli Inglesi; *Formänderung* dei Tedeschi). *La pura deformazione (dilatazione), la rotazione (isomeria) e la traslazione $P' - P$ costituiscono la più generale deformazione di una particella di un corpo elastico deformato.*

Dilatazione cubica e dilatazione lineare.

Si definisce come dilatazione cubica la variazione di volume, riferita all'unità di volume, subita da una particella. Identifichiamo quest'ultima con un parallelepipedo infinitesimo di spigoli $d_1\overrightarrow{P}$, $d_2\overrightarrow{P}$, $d_3\overrightarrow{P}$. Siano $d_1\overrightarrow{P'}$, $d_2\overrightarrow{P'}$, $d_3\overrightarrow{P'}$ gli spigoli dopo la deformazione. Ricordando la (11), si ha allora per il coefficiente di dilatazione cubica l'espressione:

$$\vartheta = \frac{(1+\alpha)\,d_1\overrightarrow{P} \wedge (1+\alpha)\,d_2\overrightarrow{P} \times (1+\alpha)\,d_3\overrightarrow{P}}{d_1\overrightarrow{P} \wedge d_2\overrightarrow{P} \times d_3\overrightarrow{P}} - 1.$$

Cioè, per definizione di invariante terzo,

$$1 + \vartheta = I_3\,(1 + \alpha);$$

e ancora, per la (12) e la (8),

$$1 + \vartheta = I_3\,\sigma \cdot I_3\,\varphi.$$

Ma l'invariante terzo di un'omografia è uguale all'invariante terzo dell'omografia coniugata; perciò, essendo σ un'isomeria, è $I_3\,\sigma = 1$. È pertanto

$$1 + \vartheta = I_3\,\varphi.$$

Valendosi delle proprietà delle isomerie, si prova che, a meno di infinitesimi di ordine superiore, è

$$(1 + \vartheta)^2 = I_3\,(1 + 2\,D\alpha).$$

Sviluppando il secondo membro, in base alla definizione dell'operatore terzo, si ottiene infine, sempre a meno di infinitesimi di ordine superiore e ricordando la (10),

$$\vartheta = I_1\,\alpha = I_1\frac{\overrightarrow{ds}}{dP} = \operatorname{div}\overrightarrow{s}. \tag{13}$$

Il coefficiente di dilatazione cubica in un punto è dato dal valore della divergenza dello spostamento in quel punto.

Passando al coefficiente di dilatazione lineare, osserviamo che in un punto P e nella direzione $\overrightarrow{dP}$ esso è definito da

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{mod} d\overrightarrow{P'}}{\operatorname{mod} d\overrightarrow{P}} - 1.$$

Fatto $d\vec{P} = h\vec{a}$ (a, vettore unitario), si ha per la (11)

$$\varepsilon = \mathrm{mod}\,(\vec{a} + \alpha\vec{a}) - 1,$$

e per la (12)

$$1 + \varepsilon = \mathrm{mod}\,\sigma\varphi\vec{a} = \mathrm{mod}\,\varphi\vec{a},$$

in quanto, come si è visto, le isomerie conservano i moduli dei vettori. Sarà quindi

$$(1 + \varepsilon)^2 = \varphi\vec{a} \times \varphi\vec{a},$$

da cui, entro i limiti dell'approssimazione ammessa e ricordando che $\vec{a}$ è vettore costante,

$$\varepsilon = \alpha\vec{a} \times \vec{a} = \frac{\vec{ds}}{\vec{dP}}\vec{a} \times \vec{a}. \tag{14}$$

In una deformazione infinitesima, il coefficiente di dilatazione lineare, in un punto P e nella direzione $\vec{a}$, è uguale al prodotto scalare di $\vec{a}$ per la derivata dello spostamento in quella direzione.

Siano $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tre direzioni ortogonali ($\vec{a}\,\Lambda\,\vec{b} \times \vec{c} = 1$). Per la (13), la (9) e la (14) si ha:

$$\vartheta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \tag{15}$$

dove ε_1, ε_2, ε_3 sono i coefficienti di dilatazione lineare nelle direzioni $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ uscenti da P.

Relazione tra la omografia delle tensioni interne in un corpo elastico e l'omografia della deformazione infinitesima.

Sia $D\alpha$ l'omografia della deformazione infinitesima in un punto P di un corpo elastico, omogeneo, isotropo, sottoposto all'azione di un sistema di forze, di massa (generalmente trascurabili) e di superficie, che lo conducono ad un nuovo stato di equilibrio.

Siano $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ le sue direzioni nel generico punto P. Se a_1, a_2, a_3 sono i coefficienti di dilatazione lineare in P nelle direzioni considerate, avremo

$$D\alpha\vec{i} = a_1\vec{i},\ D\alpha\vec{j} = a_2\vec{j},\ D\alpha\vec{k} = a_3\vec{k}.$$

Sia β la corrispondente omografia delle tensioni elastiche interne, conseguenti alla deformazione infinitesima. Siano p_1, p_2, p_3 le pressioni unitarie agenti, secondo le direzioni $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, su un parallelepipedo infinitesimo, opportunamente isolato. Per l'equilibrio, e grazie all'isotropia del corpo, dovrà essere

$$\beta\vec{i} = p_1\vec{i},\ \beta\vec{j} = p_2\vec{j},\ \beta\vec{k} = p_3\vec{k}.$$

Ora, dalla teoria dell'elasticità, nel caso della validità della legge di HOOKE, si sa che

$$p_i = -\lambda\vartheta - 2\mu a_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

dove λ e μ sono le costanti di LAMÉ. Nel nostro caso, poichè $\vartheta = a_1 + a_2 + a_3$, sarà, per la (13),

$$\beta = -\lambda \operatorname{div} \vec{s} - 2\mu D\alpha, \tag{16}$$

oppure, per la (3),

$$\beta = -\lambda \operatorname{div} \vec{s} - 2\mu \frac{d\vec{s}}{dP} + \mu \operatorname{rot} \vec{s}\,\Lambda. \tag{17}$$

Equazione fondamentale sulla propagazione del moto in un mezzo elastico, isotropo.

Un corpo elastico isotropo, di densità ϱ, sia mantenuto in uno stato di deformazione da forze $\varrho \vec{F}\, ds$, agenti sopra ogni elemento di massa $\varrho\, ds$, e da altre forze $\vec{R}\, d\sigma$, agenti su elementi $d\sigma$ della sua superficie libera.

Sia $d\omega$ un elemento piano del corpo di centro P, la cui giacitura è individuata dal versore $\vec{n}$, che gli è normale in P. Esiste allora un'omografia β, funzione dei punti P, tale che il vettore $\beta \vec{n}\, d\omega$ definisce la tensione elastica che si manifesta in P, attraverso l'elemento $d\omega$.

Se si pensa ad una porzione S del corpo, limitata dalla superficie ω, per l'equilibrio nel primitivo stato di deformazione dovrà essere

$$\int_S \varrho \vec{F}\, dS + \int_\omega \beta \vec{n}\, d\omega = 0, \tag{18}$$

$$\int_S (P - 0)\,\Lambda\, \varrho \vec{F}\, dS + \int_\omega (P - 0)\,\Lambda\, \beta \vec{n}\, d\omega = 0. \tag{19}$$

Trasformando l'integrale di superficie in integrale di spazio, la (18) diviene

$$\int_S (\varrho \vec{F} - \operatorname{grad} \beta)\, dS = 0,$$

che dovendo essere soddisfatta qualunque sia S, dà l'equazione di equilibrio sotto la forma

$$\varrho \vec{F} = \operatorname{grad} \beta. \tag{20}$$

E poichè si prova che la (19) è identicamente soddisfatta, la (20) resta la sola condizione per l'equilibrio.

Sulla superficie libera del corpo dovrà naturalmente essere verificata, in ogni punto, la condizione $\vec{R} = \beta \vec{n}$.

Espressa in funzione delle costanti elastiche del corpo, vale per β la (16) o la (17). Per la (17), la (7) e la (6), la (20) si può scrivere

$$\varrho \vec{F} + (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{s} = 0,$$

che è l'equazione cui deve soddisfare lo spostamento $\vec{s}$ della deformazione infinitesima.

Dall'equazione d'equilibrio si passa a quella del moto mediante il principio di d'ALEMBERT, aggiungendo cioè alle forze applicate, le forze d'inerzia col segno cambiato, che per unità di volume, nel nostro caso, sono $-\varrho \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2}$.

Si ha quindi infine

$$\varrho \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} = \varrho \vec{F} + (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{s}, \tag{21}$$

che è l'equazione del moto. Tale equazione è di fondamentale importanza in tutte le teorie relative alla propagazione del moto, in un mezzo isotropo, elastico. Essa è soddisfatta, com'è noto, sia da onde irrotazionali, sia da onde equivoluminali.

2. Teoria vettoriale delle onde di Rayleigh, in un mezzo indefinito puramente elastico.

È ben noto lo studio fatto da Lord RAYLEIGH [2] sulla propagazione di particolari tipi di onde alla superficie di un mezzo puramente elastico, isotropo, indefinito. Tali onde subiscono uno smorzamento, più o meno accentuato, con la profondità. Esse risultano dalla sovrapposizione di due sistemi di onde proprie del mezzo, uno longitudinale e l'altro trasversale.

Supponiamo che l'asse z sia rivolto positivamente verso il semispazio occupato dal corpo elastico in questione.

Nella (21), equazione generale del moto, possiamo ritenere nulla la forza $\vec{F}$ applicata all'elemento di massa.

Se indichiamo con a e b rispettivamente la velocità delle onde longitudinali e trasversali, la (21) può scriversi:

$$\frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} = a^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s} - b^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{s}. \tag{22}$$

Poniamo

$$\vec{s} = [\vec{s}_1 (P) + \vec{u} (P)] e^{ipt}, \tag{23}$$

essendo $p = \frac{2\pi}{T}$ la pulsazione del moto (T, periodo).

Se $\vec{s}_1$ rappresenta il vettore spostamento determinato dalle onde longitudinali e $\vec{u}$ quello relativo alle onde trasversali, dovrà essere:

$$\operatorname{rot} \vec{s}_1 = 0, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0. \tag{24}$$

La (23) sarà soddisfatta se $\vec{s_1}$ ed $\vec{u}$ vengono determinati in modo che risulti

$$a^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s_1} = -p^2 \vec{s_1}, \quad b^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} = p^2 \vec{u}. \tag{25}$$

Se ϑ è uno scalare e $\vec{c}$ un vettore costante, poniamo

$$\vec{s_1} = \operatorname{grad} \vartheta, \text{ con } \vartheta = e^{(P-0)\times \vec{c}}.$$

Avremo allora

$$\vec{s_1} = \vartheta \vec{c}.$$

Sarà inoltre, poichè $\operatorname{div} \vec{c} = 0$,

$$\operatorname{div} \vec{s_1} = \operatorname{grad} \vartheta \times \vec{c}.$$

È inoltre

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s_1} = c^2 \vartheta \vec{c},$$

perciò, la prima delle (25) diviene

$$c^2 = -\frac{p^2}{a^2}.$$

$\vec{c}$ è quindi un vettore imaginario.

Se $x\,y$ è il piano limite superficiale, possiamo quindi scrivere, in forma esplicita,

$$\vec{s_1} = e^{-hz} \cdot e^{i(mx+ny)} \cdot \vec{c}.$$

Si ha ancora

$$c^2 = (\operatorname{grad} \vartheta/\vartheta)^2$$
$$= (-h\vec{k} + im\vec{i} + in\vec{j})^2.$$

Consegue

$$h^2 - m^2 - n^2 = -p^2/a^2. \tag{26}$$

Se $\vec{\tau}$ e $\vec{c^1}$ sono vettori costanti, poniamo analogamente

$$\vec{u} = \vartheta_1 \vec{\tau}, \text{ dove } \vartheta_1 = e^{(P-0)\times \vec{c'}}.$$

Per la seconda delle (24) è allora

$$\vartheta_1 \operatorname{div} \vec{\tau} + \operatorname{grad} \vartheta_1 \times \vec{\tau} = 0.$$

Ma $\operatorname{div} \vec{\tau} = 0$, segue quindi

$$\vec{c^1} \times \vec{\tau} = 0, \tag{27}$$

relazione caratteristica dello spostamento trasversale.

Dall'essere $\operatorname{rot} \vec{\tau} = 0$, $\operatorname{rot} \vec{c^1} \Lambda \vec{\tau} = 0$, ne viene

$$\operatorname{rot} \vec{u} = \vartheta_1 \vec{c^1} \Lambda \vec{\tau},$$
$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} = \vartheta_1 \vec{c_1} \Lambda (\vec{c^1} \Lambda \vec{\tau}).$$

Ora

$$\vec{c^1} \Lambda (\vec{c^1} \Lambda \vec{\tau}) = (\vec{c^1} \times \vec{\tau}) \vec{c^1} - (\vec{c^1} \times \vec{c^1}) \vec{\tau};$$

per la (27) è quindi

$$\text{rot rot } \vec{u} = -\vartheta_1 c'^2 \vec{\tau}.$$

Dalla seconda delle (25) avremo pertanto

$$c^{12} = -p^2/b^2.$$

Anche $\vec{c^1}$ è quindi vettore imaginario. Potremo scrivere

$$\vec{u} = e^{-kz} \cdot e^{i(mx+ny)} \cdot \vec{\tau}.$$

Analogamente alla (26), avremo

$$k^2 - m^2 - n^2 = -\frac{p^2}{b^2}.$$

La (17) lega, come si è visto, le tensioni elastiche interne agli elementi della deformazione infinitesima, provocata nel mezzo.

Alla superficie limite del mezzo ($z = 0$), tali tensioni dovranno annullarsi:

$$\beta \vec{k} \equiv \lambda \operatorname{div} \vec{s}\,\vec{k} + 2\mu \frac{d\vec{s}}{dP} \vec{k} - \mu \operatorname{rot} \vec{s} \Lambda \vec{k} = 0.$$

Ricordando le espressioni di a e b, si trae $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{a^2 - 2b^2}{b^2}$. Ponendo tale rapporto uguale a q^2, avremo

$$q^2 \operatorname{div} \vec{s} \cdot \vec{k} + 2 \frac{d\vec{s}}{dP} \vec{k} - \operatorname{rot} \vec{s} \Lambda \vec{k} = 0.$$

Per la (23) e le (24), avremo ancora

$$q^2 \operatorname{div} \vec{s_1} \cdot \vec{k} + 2 \left(\frac{\partial \vec{s_1}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right) - \operatorname{rot} \vec{u} \Lambda \vec{k} = 0.$$

Tali relazioni valgono naturalmente sul piano $z = 0$, dove $\vartheta = \vartheta_1$. Si ha

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial z} = \frac{\partial(\vartheta \vec{c})}{\partial z} = -\vartheta h \vec{c}; \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \frac{\partial(\vartheta_1 \vec{\tau})}{\partial z} = -k \vartheta \vec{\tau}.$$

Dalle espressioni di $\vec{s_1}$ e di $\vec{u}$ si deduce, evidentemente,

$$\vec{k} \times \vec{c} = -h; \quad \vec{k} \times \vec{c^1} = -k. \tag{28}$$

Richiamando le espressioni di $\operatorname{div} \vec{s_1}$ e $\operatorname{rot} \vec{u}$, e dividendo per ϑ, avremo

$$q^2 c^2 \vec{k} - 2h\vec{c} - 2k\vec{\tau} - (\vec{c^1} \Lambda \vec{\tau}) \Lambda \vec{k} = 0. \tag{29}$$

Dalla (29), moltiplicando scalarmente per $\vec{k}$, si ottiene

$$q^2 c^2 - 2h\vec{c} \times \vec{k} - 2k\vec{\tau} \times \vec{k} = 0,$$

da cui, per le (28),

$$\vec{\tau} \times \vec{k} = \frac{2h^2 + q^2 c^2}{2k}. \tag{30}$$

È inoltre

$$(\vec{c^1} \Lambda \vec{\tau}) \Lambda \vec{k} = -k\vec{\tau} - (\vec{\tau} \times \vec{k})\vec{c^1}; \tag{30'}$$

e, per le (28),

$$\vec{c} = -h\vec{k}, \quad \vec{c^1} = -k\vec{k}; \quad \vec{c^1} - \vec{c} = (h-k)\vec{k}.$$

Perciò, ricordando la (30), dalla (29) si ottiene

$$2k^2\vec{\tau} = [2kq^2c^2 + (h-k)(2h^2 + q^2c^2)]\vec{k} + [2h + q^2c^2 - 4hk]\vec{c}, \tag{31}$$

relazione che esprime il vettore $\vec{\tau}$ in funzione dei vettori $\vec{k}$ e $\vec{c}$ e delle altre grandezze che definiscono il mezzo e il moto.

Moltiplichiamo la (31) internamente per $\vec{c^1}$. Per la (27), le (28) e osservando che

$$\vec{c} \times \vec{c^1} = \vec{c} \times [\vec{c} + \vec{k}(h-k)]$$
$$= c^2 - h(h-k),$$

si perviene alla relazione

$$q^2 c^4 - (2h^2 + q^2 c^2)(h^2 + k^2) + 4hk(h^2 - c^2) + 2h^2 c^2 = 0.$$

Facciamo la posizione

$$f^2 = m^2 + n^2.$$

Consegue allora,

$$h^2 = c^2 + f^2; \quad k^2 = c'^2 + f^2; \quad q^2 = (c'^2 - 2c^2)/c^2;$$

ciò che consente di ottenere

$$(c'^2 + 2f^2)^2 = 4f^2\sqrt{c^2 + f^2}\sqrt{c'^2 + f^2},$$

da cui, dividendo per f^4 e facendo le posizioni

$$-\frac{c^2}{f^2} = \xi^2; \quad -\frac{c'^2}{f^2} = \xi_1^2,$$

consegue

$$(\xi_1^2 - 2)^4 - 16(1 - \xi^2)(1 - \xi_1^2) = 0, \tag{32}$$

che è l'equazione di Rayleigh.

Ad essa si può dare una forma più significativa, introducendo le velocità delle onde longitudinali a e trasversali b, e la velocità $V_R = \frac{p}{f}$ delle onde di Rayleigh. Dalle espressioni di c^2 e c'^2, risulta infatti

$$\xi^2 = \left(\frac{V_R}{a}\right)^2; \quad \xi_1^2 = \left(\frac{V_R}{b}\right)^2$$

e la (32) diventa

$$\left(\frac{V_R^2}{b^2} - 2\right)^4 - 16\left(1 - \frac{V_R^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{V_R^2}{b^2}\right) = 0. \tag{33}$$

Sotto tale forma l'equazione di Rayleigh si trova comunemente riportata nelle varie trattazioni sull'argomento.

Poichè $\xi^2 = \frac{b^2}{a^2}\xi_1^2$, la (32) diviene

$$\xi_1^6 - 8\,\xi_1^4 + 8\left(3 - 2\,\frac{b^2}{a^2}\right)\xi_1^2 - 16\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = 0. \tag{34}$$

Questa equazione ha sempre una radice compresa tra zero e 1.

Quando il modulo di Poisson è uguale a $^1/_4$, risulta $\lambda = \mu$ e quindi $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}$. La (34), fatto $\xi_1^2 = \zeta$, diventa:

$$3\,\zeta^3 - 24\,\zeta^2 + 56\,\zeta - 32 = 0,$$

le cui radici sono

$$\zeta_1 = 4,\ \zeta_2 = 2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right),\ \zeta_3 = 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0{,}8453.$$

Essendo $p^2/b^2 = \zeta f^2$, risulta

$$k^2 = f^2(1 - \zeta),\ h^2 = f^2\left(1 - \frac{1}{3}\,\zeta\right). \tag{35}$$

Valori reali per h e k si possono avere solo per valori di ζ minori di 1; quindi solo l'ultima radice consente significato fisico. Per essa si ha

$$h = 0.8475\sqrt{m^2 + n^2},\ k = 0.3932\sqrt{m^2 + n^2}.$$

La velocità di propagazione è

$$V_R = \frac{p}{f} = \sqrt{\zeta_3}\,b = 0.9194\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}. \tag{36}$$

La velocità di propagazione delle onde di Rayleigh risulta leggermente inferiore alla velocità delle onde trasversali piane, proprie del mezzo.

Determiniamo ora le espressioni degli spostamenti, in senso orizzontale e in senso verticale, di una particella raggiunta da un'onda di Rayleigh. Lo spostamento complessivo in senso verticale sarà dato dalla somma

$$\vec{s_1} \times \vec{k} + \vec{u} \times \vec{k}.$$

Consideriamo come piano principale il piano $x\,z\,(y = 0;\ f = m)$.

Si ha

$$\vec{s_1} \times \vec{k} = e^{-hz} \cdot e^{i(mx + pt)} \cdot \vec{c} \times \vec{k};$$

$$\vec{u} \times \vec{k} = e^{-kz} \cdot e^{i(mx + pt)} \cdot \vec{\tau} \times \vec{k}.$$

Per la prima delle (28) e per la (30), consegue

$$(\vec{s_1} + \vec{u}) \times \vec{k} = \left(-h\,e^{-hz} + \frac{2\,h^2 + q^2c^2}{2\,k}\,e^{-kz}\right) e^{i(pt + mx)}. \tag{37}$$

Analogamente, lo spostamento complessivo in senso orizzontale sarà espresso da

È $$(\vec{s_1} + \vec{u}) \times \vec{i}.$$

$$\vec{s_1} \times \vec{i} = i\, m\, e^{-hz} \cdot e^{i(pt + mx)},$$

$$\vec{u} \times \vec{i} = e^{-kz} \cdot e^{i(pt + mx)} \cdot \vec{\tau} \times \vec{i}.$$

Moltiplichiamo la (29) scalarmente per $\vec{i}$. Per la (30) e la (30'), e osservando che $\vec{c} \times \vec{i} = i\, m$, $\vec{k} \times \vec{i} = 0$, $\vec{c^1} \times \vec{i} = i\, m$, si ottiene

$$\vec{\tau} \times \vec{i} = i\, \frac{m}{k}\, \frac{2h^2 + q^2 c^2 - 4hk}{2k},$$

relazione che si poteva anche trarre immediatamente dalla (31), moltiplicandone entrambi i membri internamente per $\vec{i}$.

Avremo pertanto

$$(\vec{s_1} + \vec{u}) \times \vec{i} = i\, m \left(e^{-hz} + \frac{2h^2 + q^2 c^2 - 4hk}{2k^2}\, e^{-kz} \right) e^{i(pt + mx)}.$$

In superficie, per $z = 0$ e limitatamente alla parte reale (onda progressiva), si ha perciò

$$\begin{cases} (\vec{s_1} + \vec{u}) \times \vec{k} = h \left(-1 + \dfrac{2h^2 + q^2 c^2}{2hk} \right) \cos(pt + mx) \\ (\vec{s_1} + \vec{u}) \times \vec{i} = -m \left(1 + \dfrac{2h^2 + q^2 c^2 - 4hk}{2k^2} \right) \sin(pt + mx). \end{cases} \tag{38}$$

Esprimiamo i termini tra parentesi nei coefficienti di cos e sin, in funzione della radice dell'equazione di Rayleigh, minore dell'unità. Si ha

$$\frac{2h^2 + q^2 c^2 - 4hk}{2k^2} = \frac{2 - \xi_1^2 - 4\sqrt{1 - \xi^2}\sqrt{1 - \xi_1^2}}{2(1 - \xi_1^2)} = -0.5773;$$

$$\frac{2h^2 + q^2 c^2}{2hk} = \frac{2 - \xi_1^2}{2\sqrt{1 - \xi^2}\sqrt{1 - \xi_1^2}} = 1.7320.$$

Per $z = 0$, è quindi, ricordando che $h = 0.8475 \cdot f$

$$W = \frac{(\vec{s_1} + \vec{u}) \times \vec{k}}{f} = 0.6204 \cos(pt + fx); \quad H = \frac{(\vec{s_1} + \vec{u}) \times \vec{i}}{f} =$$

$$= -0.4227 \sin(pt + fx).$$

Una particella raggiunta da un'onda di Rayleigh descrive quindi orbite ellittiche, di equazione

$$\frac{W^2}{(0.6204)^2} + \frac{H^2}{(0.4227)^2} = 1. \tag{39}$$

L'asse verticale di tali orbite è circa una volta e mezza quello orizzontale; precisamente, il primo diviso il secondo dà il numero 1.467.

Per un modulo di POISSON uguale a $^1/_4$, gli spostamenti orizzontali e verticali, destati da un'onda di RAYLEIGH, che obbliga la particella raggiunta secondo un'orbita ellittica, hanno l'espressione generale

$$\frac{(\vec{s_1} + \vec{u}) \times \vec{i}}{f} = -(e^{-hz} - 0.5773\, e^{-kz}) \sin(pt + f x);$$

$$\frac{(\vec{s_1} + \vec{u}) \times \vec{k}}{f} = 0.8475\, (-e^{-hz} + 1.7320\, e^{-kz}) \cos(pt + f x).$$

Le onde, cui tali spostamenti sono legati, si propagano, come si è visto, con la velocità

$$p/f = 0.9194 \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}.$$

3. Comportamento delle onde di Rayleigh in un mezzo elastico, firmo-viscoso indefinito.

La teoria di Lord RAYLEIGH diede origine a tutta una serie di lavori sull'argomento, particolarmente notevoli quelli dei giapponesi NAKANO, ARAKAWA e SEZAWA.

Molti geofisici identificarono le onde di RAYLEIGH con le onde costituenti la fase massima di un terremoto. Tre grosse difficoltà però si opponevano a questa identificazione: la costanza del rapporto tra spostamento verticale e quello orizzontale, la costanza della velocità di propagazione delle onde di RAYLEIGH e la persistenza di queste ultime, supposte libere, senza smorzamento. L'una o l'altra delle due prime difficoltà venivano superate in successive teorie, ma il problema non appariva, con ciò, risolto nella sua interezza. Inoltre, i progressi ottenuti, avevano richiesto di considerare la propagazione in un mezzo stratificato.

Tali ricerche si erano limitate a considerare un mezzo puramente elastico. E' noto però che la materia, costituente la Terra, non è esclusivamente elastica: essa presenta, in proporzioni più o meno notevoli, altre caratteristiche, particolarmente sensibile quella derivante dall'azione dell'attrito interno, nota sotto il nome di firmo-viscosità.

Mi sono proposto di vedere a quali conseguenze conduce il considerare l'azione dell'attrito interno, sommata a quella dell'elasticità.

Assieme alle costanti λ, μ di LAMÉ, dovremo introdurre due nuovi coefficienti, espressione dell'attrito interno. Siano essi λ', μ': per l'attrito interno di volume ed e equivoluminale, rispettivamente.

Riprendendo la trattazione con le omografie vettoriali, la (17) assumerà la forma

$$\beta = -\left(\lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t}\right) \operatorname{div} \vec{s} - 2\left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{d\vec{s}}{dP} + \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t}\right) \operatorname{rot} \vec{s}\, \Lambda, \tag{17'}$$

mentre l'equazione fondamentale sulla propagazione del moto, si potrà scrivere

$$\varrho \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} = \left\{(\lambda + 2\mu) + (\lambda' + 2\mu') \frac{\partial}{\partial t}\right\} \text{grad div } \vec{s} - \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t}\right) \text{rot rot } \vec{s}, \tag{21'}$$

dove si prescinde dall'azione, generalmente trascurabile, della forza $\vec{F}$, applicata all'elemento di massa.

Riprendiamo la teoria di Rayleigh, con le opportune modifiche, richieste dalla firmo-viscosità del mezzo.

Le analoghe di c^2, c'^2 saranno

$$C^2 = -\frac{\varrho p^2}{\lambda + 2\mu + ip(\lambda' + 2\mu')}; \quad C'^2 = -\frac{\varrho p^2}{\mu + ip\mu'}. \tag{40}$$

Naturalmente, si giunge, anche il questo caso, ad una equazione formalmente identica alla (34), dove però il rapporto b^2/a^2 è ora sostituito dal rapporto C^2/C'^2.

Posto

$$-C'^2/f^2 = \delta,$$

la (34) diviene

$$\delta^3 - 8\delta^2 + (24 - 16\varepsilon)\delta - 16(1 - \varepsilon) = 0, \tag{41}$$

dove, essendo $\lambda' = -\frac{2}{3}\mu'$ [3], è

$$\varepsilon = \frac{C^2}{C'^2} = 3\frac{9\left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^2 + 4p^2}{81\left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^2 + 16p^2} + i\frac{15p\frac{\mu}{\mu'}}{81\left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^2 + 16p^2}$$

Fatte le ulteriori posizioni

$$\delta = \psi + \frac{8}{3}, \quad \varepsilon = 1 - \frac{j}{16},$$

la (41) si trasforma nell'equazione

$$\psi^3 + \left(j - \frac{40}{3}\right)\psi + \left(\frac{5}{3}j - \frac{448}{27}\right) = 0. \tag{42}$$

La (42), equazione di terzo grado, complessa, è stata risolta per diversi valori del rapporto di $\frac{\mu}{\mu'}$ e del periodo T [4].

Si è trovato così che, per $T \to \infty$, qualunque sia il valore del rapporto $\frac{\mu}{\mu'}$, i coefficienti dell'imaginario nelle radici dell'equazione della (42) tendono allo zero, mentre le parti reali delle stesse radici tendono ai valori che queste assumono per un mezzo puramente elastico (pag. 428):

$$\zeta_1 \to 4, \quad \zeta_2 \to 2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad \zeta_3 \to 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0.8453,$$

dove $\zeta = \frac{1}{\delta}$.

Le radici dell'equazione classica di RAYLEIGH, *valevoli per un mezzo puramente elastico (caso* $\lambda = \mu$*), costituiscono il limite cui tendono le radici dell'equazione corrispondente in un mezzo elastico, firmo-viscoso, per periodi tendenti all'infinito, qualunque sia il rapporto* μ/μ'.

Per $T \to 0$, qualunque sia il valore di μ/μ', si ha

$$\zeta_1 \to 6.1563, \quad \zeta_2 \to 1.3691, \quad \zeta_3 \to 0.4746.$$

Mi limito a riportare (tab. I) i valori delle radici $\delta_3 \left(= \frac{1}{\zeta_3}\right)$, corrispondenti, nel caso dell'elasticità pura, alle radici minori dell'unità ($\delta_3 = \delta_3' + i\,\delta_3''$).

Si prova [4] che, per onde progressive, gli spostamenti orizzontale e verticale hanno l'espressione

$$H = \{R \sin p\,(t + g\,\varkappa) - S \cos p\,(t + g\,\varkappa)\}\, e^{-k_0 \varkappa}$$
$$Z = \{-R' \cos p\,(t + g\,\varkappa) + S' \sin p\,(t + g\,\varkappa)\}\, e^{-k_0 \varkappa}, \qquad (43)$$

dove R, R', S, S', sono costanti che assumono valori diversi a seconda del periodo e dei valori di μ/μ' (la tab. I dà i valori per $\mu/\mu' = 50\ \text{sec}^{-1}$) e g è determinata

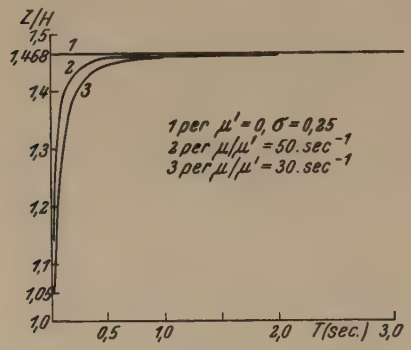


Fig. 1.

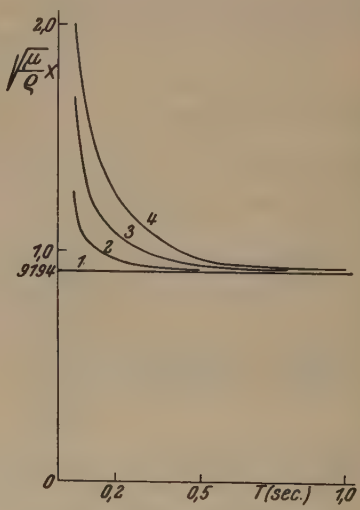


Fig. 2. Velocita onde di RAYLEIGH.

in funzione delle radici della (41), del rapporto μ/μ' e della velocità v_s delle onde trasversali piane, proprie del mezzo.

Le (43) possono anche scriversi

$$H = A \sin (pt + \omega_1)\, e^{-k_0 \varkappa}$$
$$Z = -B \cos (pt + \omega_2)\, e^{-k_0 \varkappa}, \qquad (44)$$

dove

$$A = \sqrt{R^2 + S^2}; \quad B = \sqrt{R'^2 + S'^2},$$

$$\operatorname{tang} \omega_1 = \frac{R \sin \gamma - S \cos \gamma}{R \cos \gamma + S \sin \gamma}; \quad \operatorname{tang} \omega_2 = \frac{R' \sin \gamma + S' \cos \gamma}{R' \cos \gamma - S' \sin \gamma},$$

essendo

$$\gamma = p\,g\,\varkappa.$$

Con un'ulteriore trasformazione, ponendo

$$X = H\, e^{k_0 x},$$
$$-Z\, e^{k_0 x} = Y,$$
$$\left.\begin{aligned} \omega_2 &= \omega_1 + \omega; \\ p\,t + \omega_1 &= \Omega, \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

le (44) si possono scrivere

$$X = A \sin \Omega$$
$$Y = B \cos (\Omega + \omega),$$

da cui, eliminando Ω ed elevando a quadrato, si ha

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{2\,X\,Y}{A\,B} \sin \omega + \frac{Y^2}{B^2} = \cos^2 \omega. \quad (46)$$

L'ellisse (46) non è riferita ai propri assi.

Per $\omega = \frac{\pi}{2}$ oppure $\frac{3}{2}\pi$ l'ellisse si appiattisce in una retta per l'origine: la vibrazione è rettilinea.

Se $\omega = 0$ oppure π, l'ellisse è riferita ai propri assi.

Gli assi della (46) fanno rispetto ad X, Y l'angolo ϑ, definito da

$$\text{tang } 2\,\vartheta = 2\,\frac{A\,B}{B^2 - A^2} \sin \omega. \quad (47)$$

Anche in un mezzo firmo-viscoso, le onde di tipo RAYLEIGH *costringono le particelle raggiunte su traiettorie ellittiche; però, a differenza di quanto avviene in un mezzo puramente elastico, tali*

Tabella I. $\mu/\mu' = 50\ \text{sec}^{-1}$.

T sec	δ_3'	δ_3''	R	S	R'	S'	v_R	k_0
0	2.10716	0	0.344446	0.0	0.362432	0.0	∞	∞
0.05	1.20188	0.24660	0.440592	0.004866	0.511948	0.112730	$1.687 \cdot v_s$	12.175
0.1	1.18508	0.11377	0.457721	0.021923	0.612425	0.128436	$1.2615 \cdot v_s$	6.4018
0.5	1.18308	0.022155	0.459621	0.004292	0.671762	0.031275	$0.9395 \cdot v_s$	0.4626
1	1.18303	0.011067	0.459681	0.002154	0.674027	0.015735	$0.9245 \cdot v_s$	0.11910
2	1.18302	0.005533	0.459692	0.001086	0.674597	0.007893	$0.9207 \cdot v_s$	0.03250
5	1.18301	0.002213	0.459703	0.000430	0.674762	0.003155	$0.9195 \cdot v_s$	0.00741
10	1.18301	0.001107	0.459703	0.000391	0.674783	0.001584	$0.91945 \cdot v_s$	0.001203
20	1.18301	0.000553	0.459703	0.0000920	0.674789	0.000800	$0.919415 \cdot v_s$	0.000301
40	1.183013	0.000277	0.459703		0.674789		$0.919405 \cdot v_s$	0.0000752
60	1.183013	0.000184					$0.9194 \cdot v_s$	0.0000317
120	1.183013	0.0000922					$0.9194 \cdot v_s$	0.0000083
.								
.								
.								
∞	1.183013	0	0.459701	0.0	0.674790	0.0	$0.9194 \cdot v_s$	0.0

traiettorie non sono riferite ai propri assi. Solo per periodi infinitamente picccoli o infinitamente grandi (per i quali $\omega \to 0$) le traiettorie ellittiche tendono a quelle riferite ai propri assi, proprie di un mezzo puramente elastico. Nel caso $T = \infty$, la traiettoria coincide con quella richiesta dalla classica teoria di RAYLEIGH, *nell'origine del moto.*

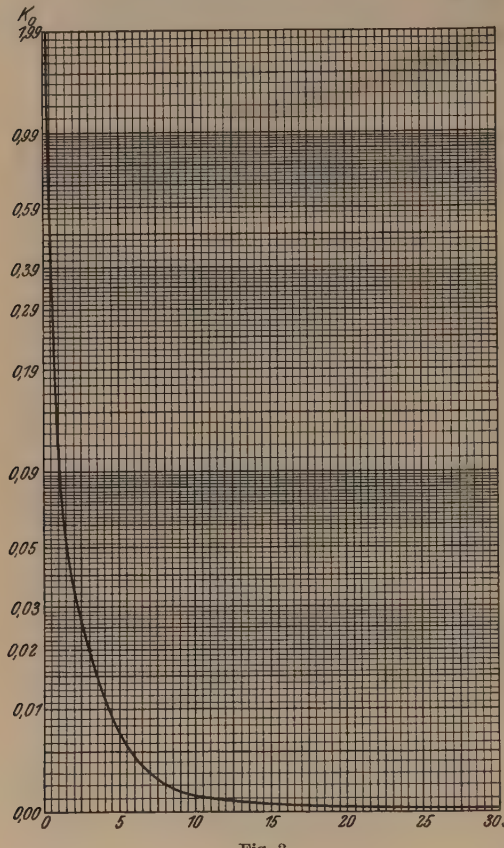


Fig. 3.

Per quanto concerne le ampiezze, tenendo conto dei valori di A e B si trova che *il rapporto dell'ampiezza del movimento verticale a quella del movimento orizzontale, da un valore prossimo all'unità per periodi pressoché nulli, tende rapidamente al valore 1.47, che gli compete nella classica teoria di* RAYLEIGH (*pag. 429*) *in mezzi puramente elastici; tanto più rapidamente, quanto maggiore è il rapporto μ/μ'.*

In mezzi firmo-viscosi, il rapporto suddetto non è quindi costante (fig. 1).

Passiamo all'effetto dell'attrito interno sulla velocità delle onde di RAYLEIGH. Essa vale

$$v_R = \frac{\sqrt{2}\sqrt{1 + p^2\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2}}{\left[\sqrt{(\delta_3'^2 + \delta_3''^2)\left\{1 + p^2\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2\right\}} + \delta_3' + \delta_3'' p \frac{\mu'}{\mu}\right]^{\frac{1}{2}}} \cdot v_s.$$

La tabella I riporta i risultati dei calcoli per il valore 50 del rapporto μ/μ', al variare del periodo. Ne consegue che, da un valore teoricamente infinito per $T = 0$, *la velocità delle onde di* RAYLEIGH *in mezzo elastico, che ammette attrito interno, tende al valore che essa assume in un mezzo puramente elastico col tendere del periodo all'infinito; e tanto più rapidamente quanto maggiore è il valore del rapporto μ/μ'.*

L'azione dell'attrito interno si traduce quindi in una sorta di effetto sulla propagazione delle onde superficiali, che si presenta come propagazione anomala (fig. 2).

La firmo-viscosità determina un'azione di smorzamento sulla propagazione delle onde superficiali. Il coefficiente di assorbimento è

$$k_0 = \frac{p}{v_s\sqrt{2}\sqrt{1+p^2\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2}} \cdot \left[\sqrt{(\delta_3'^2 + \delta_3''^2)\left\{1+p^2\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2\right\}} - \right.$$

$$\left. - \delta_3' - \delta_3'' \, p \, \frac{\mu'}{\mu}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

La velocità di propagazione delle onde trasversali spaziali nello strato superficiale terrestre, vale, come è noto, circa 3.3 km/sec. Per un tale valore di v_s e assegnato a μ/μ' il valore 50, i calcoli hanno fornito, per periodi diversi, i valori riportati nella tabella (fig. 3).

A periodi nulli corrisponde quindi un assorbimento infinito, il quale resta comunque elevatissimo per piccoli periodi, confermemente all'osservazione; per periodi dell'ordine di 20^s e per $\mu/\mu' = 50$ (che è il valore più prossimo a quelli forniti dall'osservazione), il coefficiente d'assorbimento diviene dell'ordine di 0.0003, che è appunto quello generalmente osservato.

Bibliografia.

1. Burali-Forti, R. Marcolongo e P. Burgatti: Analisi vettoriale generale. Vol. I e III. Bologna, 1931.
2. Rayleigh, Lord: On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. Scientific Papers, II.
3. Gutenberg, B.: Handbuch der Geophysik, vol. II, p. 552—553 e vol. IV, p. 16—21.
   — Physics of the Earth, vol. VII, p. 361 e 381.
4. Caloi, P.: Comportamento delle onde di Rayleigh in un mezzo firmo-elastico indefinito. Ann. Geofis. I, 4 (1948).

550.341.2 (52)

(Schweizerische Meteorologische Zentralanstalt, Zürich.)

Zur Statistik der Erdbebenschwärme.

Von

E. Wanner.

Zusammenfassung. Es werden einige gut beobachtete japanische Bebenschwärme statistisch untersucht und gezeigt, daß sich einzelne dieser Schwärme mit den Poissonschen Formeln, andere mit dem Formalismus der Wahrscheinlichkeitsansteckung von Polyá und Eggenberger befriedigend beschreiben lassen.

Summary. Some recent and well observed swarms of Japanese earthquakes are investigated statistically. It can be shown that some of these swarms can be described by the formulae of Poisson, others by the infection theory of Polyá and Eggenberger.

Résumé. Quelques séries récentes de tremblements de terre japonais ont été examinées statistiquement. On démontre que ces séries peuvent être décrites en partie par les formules de Poisson, en partie par la théorie d'infection de Polyá et Eggenberger.

Die in den Erdbebenkatalogen der verschiedenen Länder enthaltenen Erdbebenstatistiken bieten ein weites Anwendungsgebiet für die Forschungsmethoden der theoretischen Statistik. Zu beachten ist allerdings, daß diese Statistiken über längere Zeiträume meistens inhomogen sind, denn schon allein die sich beständig verfeinernde Beobachtungstechnik erzeugt zwangsläufig scheinbare, dem eigentlichen Phänomen nicht angehörende Schwankungen. Wohl den besten Überblick über die mit den statistischen Methoden in der Erdbebenforschung erzielten Resultate gibt Victor Conrad in Gutenbergs Handbuch der Geophysik [*1*]. In dieser Arbeit sind die meisten bis zirka 1930 erschienenen Arbeiten sorgfältig besprochen, so daß der Leser ein sehr gutes Bild über den damaligen Stand der Forschung erhält.

Seither sind zahlreiche weitere Untersuchungen, besonders von japanischen Seismologen, durchgeführt worden [*2*, *3*]. Auch wir haben, allerdings ohne Erfolg, versucht, die zeitliche Folge der Erdbeben der ganzen Erde mit einfachen, statistischen Gesetzen zu beschreiben [*4*]. Als Grundlage diente der in Oxford zusammengestellte Erdbebenkatalog

von E. F. Bellamy [5]. Dieser Katalog enthält die umfangreichste Bebenstatistik der Erde für den in Frage stehenden Zeitraum. Es ist nicht zu verwundern, daß der Versuch negativ ausfallen mußte. Das der Analyse zugrunde liegende Kollektiv, die beobachteten Erdbeben der Erde, ist viel zu heterogen, als daß es sich durch einfache Zufallsgesetze beschreiben ließe. Wir denken z. B. an die Zustände der Materie in den verschiedenen Bebenherden oder an die verschiedenen geologischen Strukturen und Beben erzeugenden Spannungsfelder in der Erdkruste.

Erst als die unmittelbaren Nachstöße ausgeschaltet waren, konnte das verbleibende Kollektiv ziemlich befriedigend mit einer Poissonschen Verteilung beschrieben werden. Daraus geht hervor, daß die Beben des Oxforder Kataloges sich in erster Näherung als voneinander unabhängige Ereignisse erwiesen. Es sind also die *Bebenschwärme*, die die Analyse nach einfachen statistischen Methoden besonders erschweren. Diese Schwärme haben auch ganz verschiedene Erscheinungsformen. Häufig werden solche Schwärme durch ein Großbeben ausgelöst; unmittelbar nach dem Hauptbeben ist die Nachbebenfrequenz sehr hoch, doch fällt sie meistens sehr rasch ab. Der Verlauf der täglichen Frequenzzahlen n_i läßt sich befriedigend durch eine Omori-Hyperbel der Form $n_i = \frac{A}{t+B}$ ausdrücken. A und B sind Konstanten, t bedeutet die Zeit, gemessen vom Moment des Hauptbebens. Dann gibt es aber auch wieder Bebenschwärme mit ganz anderem zeitlichem Ablauf. Wir haben aus dem reichhaltigen japanischen Beobachtungsmaterial der letzten 30 Jahre einige typische Fälle zusammengestellt und wollen sie im nachfolgenden diskutieren.

1. Nachstöße des großen Kwanto-Bebens vom 1. September 1923, $11^h\,58^m$.

Dieses Beben bedeutete für Japan eine große Landeskatastrophe. Besonders die beiden Weltstädte Tokyo und Yokohama sind damals fast ganz vernichtet worden. Yasuda [6] veröffentlichte eine Statistik der in Tokyo im Monat September 1923 registrierten Nachstöße. Im ganzen wurden in dem dem Beben nachfolgenden Monat 1302 Nachstöße registriert. Es wurde in dieser Yasudaschen Statistik die Häufigkeit der Stunden mit 0, 1, 2, ..., r Beben ausgezählt. Liegt eine zufällige Verteilung vor, was der Gültigkeit der Poissonschen Formel entsprechen würde, so ist die mathematische Erwartung für das Quadrat des Schwankungsmaßes ξ^2 gleich dem stündlichen Mittelwert h. Das Quadrat des Schwankungsmaßes wurde außerdem noch empirisch aus der ausgezählten Frequenztabelle nach der Formel:

$$\xi^2 = \frac{(h-0)^2 N_0 + (h-1)^2 N_1 + (h-2)^2 N_2 + \ldots + (h-r)^2 N_r + \cdots}{N-1} \sim h \pm F, \tag{1}$$

h = mittlere Bebenzahl pro Stunde,
N_r = Anzahl der Stunden mit r Beben,
$\sum_r N_r = N$ Anzahl der ausgezählten Stunden,

bestimmt, um beurteilen zu können, ob normale oder stark übernormale Dispersion vorhanden ist. Die erwartungsmäßige Schwankung F von ξ^2 errechnet sich nach der Formel

$$F = \sqrt{\frac{2h^2 + h}{N}}. \tag{2}$$

In Tab. 1 sind für die Zeitspannen 1. bis 10. September, 11. bis 20. September und 21. bis 30. September die Zahlenwerte von N, h und ξ^2 zusammengestellt. Im Zeitraum unmittelbar nach dem Hauptbeben überschreitet der beobachtete Wert von $\xi^2 = 29{,}64$ seine mathematische Erwartung von 4,49 ganz bedeutend. Für die nachfolgenden beiden Zeiträume dagegen liegen die nach Formel (1) bestimmten Werte von ξ^2 schon nahe den mathematischen Erwartungen, d. h. die Nachstöße können genähert schon als voneinander unabhängige Ereignisse angesehen werden. Die kleine übernormale Dispersion kann durch das langsame Abklingen der Bebenfrequenz erklärt werden. Unmittelbar nach dem Hauptstoß klingt die Bebenfrequenz sehr rasch ab, darum ergibt sich auch im Zeitabschnitt vom 1. bis 10. September der große Unterschied zwischen mathematischer Erwartung und empirischer Berechnung des Schwankungsmaßes.

Tabelle 1. *Kwanto-Beben, 1. bis 30. September 1923.*

Zeitabschnitt	Zahl der Stunden N	Zahl der Beben R	Mittelwert $h = \frac{R}{N}$	Quadrat des Schwankungsmaßes ξ^2	
				theoretisch nach POISSON $\xi^2 = h \pm F$	beobachtet nach Formel (1)
1. Sept. 11^h bis 10. Sept. 24^h	229	1029	4,49	$4{,}49 \pm 0{,}40$	29,64
11. „ 0^h „ 20. „ 24^h	240	198	0,825	$0{,}825 \pm 0{,}09$	1,33
21. „ 0^h „ 30. „ 24^h	240	76	0,317	$0{,}317 \pm 0{,}04$	0,424

2. Nachstöße des Tango-Bebens vom 7. März 1927, $18^h\ 27^m$.

Auch dieses Beben bedeutete für Japan eine große Landeskatastrophe. Seine Folgeerscheinungen sind von den japanischen Seismologen eingehend studiert worden. N. NASU [7] gibt eine ausführliche Statistik über die im Herdgebiet registrierten Nachstöße. Nach der Katastrophe vom 7. März errichteten die japanischen Seismologen im Herdgebiet selbst ein Netz transportabler Seismographenstationen. Diese Instrumente begannen ab 11. März 22 Uhr zu funktionieren. Die Statistik unmittelbar nach dem Hauptstoß, d. h. vom 7. bis 11. März, fehlt. Vom 11. März bis Ende August wurden im Epizentralgebiet von diesen temporär aufgestellten Seismographen zirka 1400 Nachstöße aufgezeichnet. Wir haben den ganzen Zeitraum vom 12. März bis 31. August in kleinere 10-, 15- und 30tägige Abschnitte eingeteilt. Für jeden Abschnitt wurden wiederum die Häufigkeit der Stunden mit 0, 1, 2, ... r Beben ausgezählt.

Tabelle 2. *Tango-Beben, 12. März bis 30. August 1927.*

Zeitabschnitt	Zahl der Stunden N	Zahl der Beben R	Mittelwert $h = \frac{R}{N}$	Quadrat des Schwankungsmaßes ξ^2 theoretisch nach Poisson $\xi^2 = h \pm F$	beobachtet nach Formel (1)
12. März 0^h bis 21. März 24^h	240	272	1,13	1,13 ±0,12	1,76
22. „ 0^h „ 31. „ 24^h	240	99	0,41	0,41 ±0,05	0,83
1. April „ 15. April	360	419	1,16	1,16 ±0,11	11,85
2. „ „ 15. „	336	225	0,67	0,67 ±0,07	0,96
16. „ „ 30. „	360	111	0,31	0,31 ±0,04	0,35
2. Mai „ 16. Mai	360	79	0,22	0,22 ±0,03	0,28
17. „ „ 31. „	360	55	0,15	0,15 ±0,02	0,23
Juni	720	56	0,078	0,078 ±0,010	0,080
Juli	744	49	0,066	0,066 ±0,008	0,067
August	744	36	0,048	0,048 ±0,008	0,049

Tab. 2 gibt für die verschiedenen Zeitabschnitte die mittlere Bebenzahl h pro Stunde, ferner die Werte für das theoretische bzw. tatsächlich beobachtete Schwankungsmaßquadrat ξ^2. Mit Ausnahme des Abschnittes vom 1. bis 15. April unterscheiden sich die beobachteten Werte von ξ^2 nicht wesentlich von ihren mathematischen Erwartungen. Am 1. April ereignete sich ein sehr starkes Nachbeben, das selbst viele eigene Nachstöße produzierte. Sobald der 1. April ausgeschaltet wird, so werden, wie die nachfolgenden Zeilen zeigen, die Unterschiede wieder kleiner. Wie schon H. Jeffreys [*8*] bemerkte, können die Nachstöße des Tango-Bebens als voneinander unabhängige Ereignisse angesehen werden. Die etwas übernormale Dispersion kann ohne weiteres durch das langsame Abklingen der Bebenfrequenz verstanden werden. Für die Monate Juni, Juli und August liegen übrigens die Werte bereits ganz innerhalb der erwartungsmäßigen Schwankungen.

3. Nachstöße des Fukui-Bebens vom 5. Juli bis 27. August 1948.

Um ein weiteres Beispiel neueren Datums zu zitieren, geben wir nun in Tab. 3 die statische Analyse der Nachstöße des Fukui-Bebens vom

Tabelle 3. *Fukui-Beben, 5. Juli bis 27. August 1948.*

Zeitabschnitt	Zahl der Stunden N	Zahl der Beben R	Mittelwert $h = \frac{R}{N}$	Quadrat des Schwankungsmaßes ξ^2 theoretisch nach Poisson $\xi^2 = h \pm F$	beobachtet nach Formel (1)
5. Juli bis 13. Juli	216	204	0,94	0,94 ± 0,10	1,51
14. „ „ 22. „	216	56	0,26	0,26 ± 0,04	0,33
23. „ „ 31. „	216	36	0,17	0,17 ± 0,03	0,21
1. Aug. „ 9. Aug.	216	7	0,03	0,03 ± 0,01	0,03
10. „ „ 18. „	216	11	0,05	0,05 ± 0,01	0,05
19. „ „ 27. „	216	9	0,04	0,04 ± 0,01	0,05

28. Juni 1948 [*9*]. Auch für diesen Bebenschwarm sind die Unterschiede zwischen den beobachteten und den theoretischen Werten von ξ^2 klein und daher können auch die Beben dieses Schwarmes als voneinander unabhängige Ereignisse angesehen werden. Die schwache übernormale Dispersion entsteht durch das langsame Abklingen der Bebenfrequenz.

4. Die Itô-Beben vom 14. Februar bis 27. Mai 1930.

Im Zeitraum vom 14. Februar bis Ende Mai 1930 produzierte ein relativ engbegrenztes Gebiet östlich der japanischen Stadt Itô zirka 5700 Bebenstöße. Die stündlichen Stoßfrequenzen sind von F. KISHINOUYE [*10*] publiziert worden. Besonders in der Anfangsphase des Schwarms glaubten die japanischen Forscher IMAMURA und seine Mitarbeiter eine enge Beziehung zwischen Stoßfrequenz und den in Misaki registrierten Gezeitenkurven gefunden zu haben [*11*]. Besonders groß war während der Anfangsphase des Schwarms die Stoßfrequenz bei niederem Wasserstand. Diese Beziehung verlor sich aber während der späteren Phasen des Schwarmes und eine genaue statistische Analyse von KISHINOUYE läßt diese Korrelation wieder als fraglich erscheinen. In Tab. 4 haben wir den ganzen Zeitraum vom 14. Februar bis 27. Mai

Tabelle 4. *Itô-Beben, 14. Februar bis 27. Mai 1930.*

Zeitabschnitt	Zahl der Stunden N	Zahl der Beben R	Mittelwert $h = \frac{R}{N}$	Quadrat des Schwankungsmaßes ξ^2	
				theoretisch nach POISSON $\xi^2 = h \pm F$	beobachtet nach Formel (1)
14. Febr. bis 18. Februar ...	120	41	0,34	0,34 $\pm$ 0,07	1,39
19. „ „ 28. „ ...	240	402	1,67	1,67 $\pm$ 0,06	15,08
1. März „ 10. März	240	1281	5,34	5,34 $\pm$ 0,50	142,17
11. „ „ 20. „	240	1038	4,35	4,35 $\pm$ 0,40	77,85
21. „ „ 30. „	240	938	3,91	3,91 $\pm$ 0,40	81,34
31. „ „ 9. April.....	240	284	1,18	1,18 $\pm$ 0,10	21,04
10. April „ 19. „	240	83	0,346	0,346 $\pm$ 0,05	4,45
20. „ „ 29. „	240	34	0,142	0,142 $\pm$ 0,03	0,197
28. „ „ 7. Mai	240	104	0,433	0,433 $\pm$ 0,05	1,447
8. Mai „ 17. „	240	1324	5,52	5,52 $\pm$ 0,50	80,08
18. „ „ 27. „	240	203	0,846	0,846 $\pm$ 0,10	10,536

in zehntägige Intervalle unterteilt und wie früher die stündlichen Mittelwerte h und das Schwankungsmaß ξ^2 berechnet. Die mittlere stündliche Stoßzahl variiert während der verschiedenen Phasen des Schwarms sehr stark. Besonders auffällig sind beim Schwankungsmaß die großen Differenzen zwischen Erwartung und Beobachtung. Dieser Erdbebenschwarm zeigt eine ganz andere Struktur als die früheren Beispiele. In den Tab. 5, 6 und 7, Kolonne II, sind die Häufigkeiten für einige extreme Fälle ausführlich wiedergegeben. Wie aus den Kolonnen III, V, VI und VIII ersichtlich ist, befriedigt die Poissonsche Verteilung gar nicht. Es

bestehen große systematische Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Häufigkeiten, und es drängt sich die Frage nach der Ursache der starken Abweichungen auf.

Schon vom geophysikalischen Standpunkt aus unterscheiden sich die ersten drei Beispiele vom Itô-Bebenschwarm. Die ersten Schwärme wurden jeweils durch große tektonische Beben ausgelöst und die mit dem Hauptbeben verbundene Dislokation umfaßte ausgedehnte Gebiete. Die gründlichen seismologischen Beobachtungen der japanischen Seismologen zeigen, daß sich die Epizentren der folgenden Nachstöße auf große Gebiete verteilen. Nach der heute allgemein gültigen Ansicht wird durch ein Großbeben die Erdkruste über eine große Zone „aufgelockert" und damit die Bebenwahrscheinlichkeit stark erhöht. Diese Bebenwahrscheinlichkeit nimmt nach einem hyperbolischen Gesetz ab und das Erdkrustenstück verfestigt sich wieder. Dieser Prozeß erzeugt die Nachstöße, diese Nachstöße sind aber voneinander unabhängige Ereignisse.

Die Epizentren des Itô-Schwarms gingen in ihrer großen Mehrheit nahezu von der gleichen Erdkrustenstelle aus, d. h. die physikalischen Prozesse, die die Beben erzeugen, waren gleichartig. Wir haben versucht, die Frequenzen in den Kolonnen II der Tab. 5, 6 und 7 mit dem von Polyá und Eggenberger dargestellten Formalismus der Wahrscheinlichkeitsansteckung zu beschreiben. Das dieser Theorie zugrunde liegende Urnenschema wurde von Polyá [*12*] und Eggenberger [*13*] ausführlich geschildert.

Die einzelnen Ziehungen aus der Urne sind nicht mehr unabhängig voneinander, sondern das Eintreffen eines bestimmten Ereignisses vergrößert die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen weiterer gleichartiger Ereignisse. Die Erscheinungen stecken einander an. Der aus einem solchen Urnenschema gewonnene Formalismus für die Wahrscheinlichkeitsansteckung ist eine Erweiterung des Poissonschen Formelsystems für unabhängige Ereignisse. Bei Poisson sind alle Wahrscheinlichkeiten durch den Mittelwert h schon vollständig bestimmt:

$$\omega_0 = e^{-h},\quad \omega_1 = \frac{h}{1!}e^{-h},\quad \omega_2 = \frac{h^2}{2!}e^{-h},\quad \ldots,\quad \omega_r = \frac{h^r}{r!}e^{-h},\quad \ldots \tag{3}$$

Die Ansteckungstheorie benützt außer h noch einen weiteren Parameter d, der ein Maß für die Verknüpfung der Ereignisse ist. Die Wahrscheinlichkeiten selber werden durch die folgenden Ausdrücke

$$\omega_0 = \frac{1}{(1+d)^{+\frac{h}{d}}},\quad \omega_1 = \frac{h}{1!\,(1+d)^{\frac{h}{d}+1}},\quad \omega_2 = \frac{h\,(h+d)}{2!\,(1+d)^{\frac{h}{d}+2}},\quad \ldots,$$
$$\omega_r = \frac{h\,(h+d)\,(h+2\,d)\ldots[h+(r-1)\,d]}{r!\,(1+d)^{\frac{h}{d}+r}} \tag{4}$$

gegeben. Für das Quadrat des Schwankungsmaßes gilt

$$\xi^2 = \frac{(h-0)^2 N_0 + (h-1)^2 N_1 + (h-2)^2 N_2 + \ldots + (h-r)^2 N_r + \cdots}{N-1} \sim h\,(1+d). \tag{5}$$

Tabelle 5. *Stundenhäufigkeit der Itô-Beben für den Zeitraum 8. Mai bis 17. Mai 1930.*

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Anzahl der Beben r	Anzahl der Stunden mit r Beben			Summenzahlen zu			Abweichung zwischen Spalte V	
	beobachtet	berechnet nach POISSON	berechnet nach d. Ansteckungstheorie	Spalte II	Spalte III	Spalte IV	und Spalte VI	und Spalte VII
0	72	0,96	80,54	72	0,96	80,54	+ 71,04	— 8,54
1	42	5,32	30,62	114	6,28	111,16	+ 107,72	+ 2,84
2	28	14,68	20,07	142	20,96	131,23	+ 121,04	+ 10,77
3	12	26,99	15,01	154	47,95	146,24	+ 106,05	+ 7,76
4	12	37,27	11,91	166	85,17	158,15	+ 80,83	+ 7,85
5	7	41,07	9,77	173	126,24	167,92	+ 46,76	+ 5,08
6	9	37,76	8,20	182	164,00	176,12	+ 18,00	+ 5,88
7	3	29,76	6,99	185	193,76	183,11	— 8,76	+ 1,89
8	3	20,52	6,03	188	214,28	189,14	— 26,28	— 1,14
9	8	12,58	5,24	196	226,86	194,38	— 30,86	+ 1,62
10	1	6,94	4,59	197	233,80	198,97	— 36,80	— 1,97
11	0	3,48	4,05	197	237,28	203,02	— 40,28	— 6,02
12	6	1,60	3,58	203	238,88	206,60	— 35,88	— 3,60
13	2	0,68	3,18	205	239,56	209,78	— 34,56	— 4,78
14	4	0,27	2,84	209	239,83	212,62	— 20,83	— 3,62
15	3	0,10	2,54	212	239,93	215,16	— 27,93	— 3,16
16	6	0,04	2,28	218	239,97	217,44	— 21,97	+ 0,56
17	3	0,02	2,05	221	239,99	219,49	— 19,00	+ 1,51
18	0	0,00	1,84	221	240,00	221,33	— 19,00	— 0,33
19	1	.	1,66	222	.	222,99	— 18,00	— 0,99
20	2	.	1,50	224	.	224,49	— 16,00	— 0,49
21	1	.	1,36	225	.	225,85	— 15,00	— 0,85
22	1	.	1,23	226	.	227,08	— 14,00	— 1,08
23	1	.	1,12	227	.	228,20	— 13,00	— 1,20
24	0	.	1,02	227	.	229,22	— 13,00	— 2,22
25	0	.	0,92	227	.	230,14	— 13,00	— 3,14
26	3	.	0,84	230	.	230,98	— 10,00	— 0,98
27	1	.	0,77	231	.	231,75	— 9,00	— 0,75
28	1	.	0,70	232	.	232,45	— 8,00	— 0,45
29	1	.	0,64	233	.	233,09	— 7,00	— 0,09
30	0	.	0,58	233	.	233,67	— 7,00	— 0,67
31	0	.	0,53	233	.	234,20	— 7,00	— 1,20
32	0	.	0,49	233	.	234,69	— 7,00	— 1,69
33	0	.	0,44	233	.	235,13	— 7,00	— 2,13
34	0	.	0,41	233	.	235,54	— 7,00	— 2,54
35	0	.	0,37	233	.	235,91	— 7,00	— 2,91
36	0	.	0,34	233	.	236,25	— 7,00	— 3,25
37	1	.	0,31	234	.	236,56	— 6,00	— 2,56
38	0	.	0,28	234	.	236,84	— 6,00	— 2,84
39	2	.	0,26	236	.	237,10	— 4,00	— 1,10
40	0	.	0,24	236	.	237,34	— 4,00	— 1,34
41	0	.	0,22	236	.	237,56	— 4,00	— 1,56

(Fortsetzung der Tabelle 5.)

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Anzahl der Beben r	Anzahl der Stunden mit r Beben			Summenzahlen zu			Abweichung zwischen Spalte V	
	beobachtet	berechnet nach POISSON	berechnet nach d. Ansteckungstheorie	Spalte II	Spalte III	Spalte IV	und Spalte VI	und Spalte VII
42	0	.	0,20	236	.	237,76	— 4,00	— 1,76
43	2	.	0,19	238	.	237,95	— 2,00	+ 0,05
44	0	.	0,17	238	.	238,12	— 2,00	— 0,12
45	1	.	0,16	239	.	238,28	— 1,00	+ 0,72
46	0	.	0,15	239	.	238,43	— 1,00	+ 0,57
47	1	.	0,14	240	.	238,57	0,00	+ 1,43

$h = 5{,}52, \quad \xi^2 = 80{,}08, \quad d = 13{,}52.$

Tabelle 6. *Stundenhäufigkeit der Itô-Beben für den Zeitraum 31. März bis 9. April 1930.*

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Anzahl der Beben r	Anzahl der Stunden mit r Beben			Summenzahlen zu			Abweichung zwischen Spalte V	
	beobachtet	berechnet nach POISSON	berechnet nach d. Ansteckungstheorie	Spalte II	Spalte III	Spalte IV	und Spalte VI	und Spalte VII
0	187	73,5	195,91	187	73,5	195,91	+ 113,5	— 8,91
1	27	86,8	13,00	214	160,3	208,91	+ 53,7	+ 5,09
2	8	51,5	6,57	222	211,8	215,48	+ 10,2	+ 6,52
3	1	20,5	4,28	223	232,3	219,76	— 9,3	+ 3,24
4	2	6,0	3,10	225	238,3	222,86	— 13,3	+ 2,14
5	0	1,4	2,30	225	239,7	225,24	— 14,7	— 0,24
6	0	0,3	1,90	225	240,0	227,14	— 15,0	— 2,14
7	3	0,0	1,55	228	240,0	228,69	— 12,0	— 0,69
8	2	0,0	1,30	230	240,0	229,99	— 10,0	+ 0,01
9	2	0,0	1,10	232	240,0	231,09	— 8,0	+ 0,91
10	1	0,0	0,94	233	240,0	232,03	— 7,0	+ 0,97
11	1	.	0,81	234	.	232,84	— 6,0	+ 1,16
12	1	.	0,71	235	.	233,55	— 5,0	+ 1,45
13	0	.	0,62	235	.	234,17	— 5,0	+ 0,83
14	0	.	0,55	235	.	234,72	— 5,0	+ 0,28
15	0	.	0,48	235	.	235,20	— 5,0	— 0,20
16	0	.	0,43	235	.	235,63	— 5,0	— 0,63
17	1	.	0,39	236	.	236,02	— 4,0	— 0,02
18	0	.	0,34	236	.	236,36	— 4,0	— 0,36
19	1	0,0	0,31	237	240,0	236,67	— 3,0	+ 0,33
20	0	0,0	0,28	237	240,0	236,95	— 3,0	+ 0,05
21	0	.	0,25	.	.	237,20	.	— 0,20
22	0	.	0,23	.	.	237,43	.	— 0,43

(Fortsetzung der Tabelle 6.)

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Anzahl der Beben r	Anzahl der Stunden mit r Beben			Summenzahlen zu			Abweichung zwischen Spalte V	
	beobachtet	berechnet nach POISSON	berechnet nach d. Ansteckungstheorie	Spalte II	Spalte III	Spalte IV	und Spalte VI	und Spalte VII
23	0	.	0,21	.	.	237,64	.	— 0,64
24	0	.	0,19	.	.	237,83	.	— 0,83
25	0	.	0,17	.	.	238,00	.	— 1,00
26	0	.	0,15	.	.	238,15	.	— 1,15
27	0	.	0,14	.	.	238,29	.	— 1,29
28	0	.	0,13	.	.	238,42	.	— 1,42
29	0	0,0	0,12	.	240,0	238,54	.	— 1,54
30	0	0,0	0,11	237	240,0	238,65	— 3,0	— 1,65
31	1	.	0,10	238	.	238,75	— 2,0	— 0,75
32	0	.	0,09	238	.	238,84	— 2,0	— 0,84
33	1	.	0,08	239	.	238,92	— 1,0	+ 0,08
34	0	.	0,07	239	.	238,99	— 1,0	+ 0,01
35	0	.	0,07	239	.	239,06	— 1,0	— 0,06
36	0	.	0,06	.	.	239,12	.	— 0,12
37	0	.	0,06	.	.	239,18	.	— 0,18
38	0	.	0,06	.	.	239,24	.	— 0,24
39	0	0,0	0,05	.	240,0	239,29	.	— 0,29
40	0	0,0	0,05	239	240,0	239,34	— 1,0	— 0,34
41	1	.	0,05	240	240,0	239,39	0,0	+ 0,61
42	0	.	0,05	240	240,0	239,44	0,0	+ 0,56
43	0	.	0,04	240	240,0	239,48	0,0	+ 0,52
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.

$$h = 1{,}18, \quad \xi^2 = 21{,}04, \quad d = 16{,}8.$$

Diese Formel dient zur Berechnung von d. Es ist leicht einzusehen, daß für $d = 0$ das obige Formelsystem (4) und (5) in das Formelsystem von POISSON (3) und (1) übergeht. Wie aus der Kolonne IV der Tab. 5, 6 und 7 ersichtlich ist, können mit dem Ansteckungsformalismus die tatsächlichen Verhältnisse (II) gut beschrieben werden. Wie die Kolonne IX zeigt, bestehen keine wesentlichen systematischen Abweichungen zwischen Theorie und Wirklichkeit. Kleinere Abweichungen sind möglich, denn die von F. KISHINOUYE gegebene Statistik umfaßt nicht nur Stöße aus dem engen Gebiet bei Itô, sondern vereinzelte Beben gingen von anderen weiter entfernten Herden aus, so daß das Kollektiv geophysikalisch nicht ganz homogen ist. Ähnlich ist die Sachlage beim Vorbebenschwarm des Idu-Bebens [*14*].

Tabelle 7. *Stundenhäufigkeit der Itô-Beben für den Zeitraum 1. bis 10. März 1930.*

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Anzahl der Beben r	Anzahl der Stunden mit r Beben			Summenzahlen zu			Abweichung zwischen Spalte V	
	beobachtet	berechnet nach POISSON	berechnet nach d. Ansteckungstheorie	Spalte II	Spalte III	Spalte IV	und Spalte VI	und Spalte VII
0	107	1,15	121,19	107	1,15	121,19	+ 105,85	— 14,19
1	46	6,15	24,29	153	7,30	145,48	+ 146,70	+ 7,52
2	23	16,40	14,12	176	23,70	159,60	+ 152,30	+ 16,40
3	7	29,19	10,00	183	52,89	169,60	+ 130,11	+ 13,40
4	7	38,97	7,72	190	91,86	177,32	+ 98,14	+ 12,78
5	2	41,62	6,26	192	133,48	183,58	+ 58,52	+ 8,42
6	5	37,04	5,23	197	170,52	188,81	+ 26,48	+ 8,19
7	4	28,26	4,46	201	198,78	193,27	+ 2,22	+ 7,73
8	0	18,87	3,87	201	217,65	197,14	— 16,65	+ 3,86
9	0	11,20	3,40	201	228,85	200,54	— 27,85	+ 0,46
10	5	5,98	3,01	206	234,83	203,55	— 28,83	+ 2,45
11	0	2,91	2,69	206	237,74	206,24	— 31,74	— 0,24
12	2	1,30	2,41	208	239,04	208,65	— 31,04	— 0,65
13	2	0,54	2,18	210	239,58	210,83	— 29,58	— 0,83
14	2	0,21	1,99	212	239,79	212,82	— 27,79	— 0,82
15	1	0,08	1,81	213	239,87	214,63	— 26,87	— 1,63
16	0	0,03	1,66	213	239,90	216,29	— 26,90	— 3,29
17	1	0,007	1,52	214	239,91	217,81	— 25,91	— 3,81
18	1	0,00	1,40	215	240,00	219,21	— 25,00	— 4,21
19	2	0,00	1,29	217	240,00	220,50	— 23,00	— 3,50
20	3	.	1,19	220	.	221,69	— 20,00	— 1,69
21	0	.	1,11	220	.	222,80	— 20,00	— 2,80
22	1	.	1,03	221	.	223,83	— 19,00	— 2,83
23	1	.	0,95	222	.	224,78	— 18,00	— 2,78
24	1	.	0,89	223	.	225,67	— 17,00	— 2,67
25	0	.	0,83	223	.	226,50	— 17,00	— 3,50
26	1	.	0,77	224	.	227,27	— 16,00	— 3,27
27	0	.	0,72	224	.	227,99	— 16,00	— 3,99
28	0	.	0,67	224	.	228,66	— 16,00	— 4,66
29	3	.	0,63	227	.	229,29	— 13,00	— 2,29
30	1	.	0,59	228	.	229,88	— 12,00	— 1,88
31	0	.	0,55	228	.	230,43	— 12,00	— 2,43
32	0	.	0,52	228	.	230,95	— 12,00	— 2,95
33	0	.	0,49	228	.	231,44	— 12,00	— 3,44
34	0	.	0,46	228	.	231,90	— 12,00	— 3,90
35	1	.	0,43	229	.	232,33	— 11,00	— 3,33
36	2	.	0,40	231	.	232,73	— 9,00	— 1,73
37	0	.	0,38	231	.	233,11	— 9,00	— 2,11
38	1	.	0,36	232	.	233,47	— 8,00	— 1,47
39	0	.	0,34	232	.	233,81	— 8,00	— 1,81
40	1	.	0,32	233	.	234,13	— 7,00	— 1,13
41	0	.	0,30	233	.	234,43	— 7,00	— 1,43

(Fortsetzung der Tabelle 7.)

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Anzahl der Beben r	Anzahl der Stunden mit r Beben			Summenzahlen zu			Abweichung zwischen Spalte V	
	beobachtet	berechnet nach POISSON	berechnet nach d. Ansteckungstheorie	Spalte II	Spalte III	Spalte IV	und Spalte VI	und Spalte VII
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
46	0	.	0,23	233	.	235,71	— 7,00	— 2,71
47	1	.	0,22	234	.	235,93	— 6,00	— 1,93
48	0	.	0,20	234	.	236,13	— 6,00	— 2,13
49	0	.	0,19	234	.	236,32	— 6,00	— 2,32
50	1	.	0,18	235	.	236,50	— 5,00	— 1,50
51	0	.	0,17	235	.	236,67	— 5,00	— 1,67
52	1	.	0,16	236	.	236,83	— 4,00	— 0,83
53	0	.	0,15	236	.	236,98	— 4,00	— 0,98
54	1	.	0,14	237	.	237,12	— 3,00	— 0,12
55	0	.	0,13	237	.	237,25	— 3,00	— 0,25
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
59	0	.	0,11	237	.	237,73	— 3,00	— 0,73
60	1	.	0,10	238	.	237,83	— 2,00	+ 0,17
61	0	.	0,10	238	.	237,93	— 2,00	+ 0,07
62	1	.	0,09	239	.	238,02	— 1,00	+ 0,98
63	0	.	0,09	239	.	238,11	— 1,00	+ 0,89
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
73	0	.	.	.	.	.	+ 0,00	+ 0,00
74	1	.	.	240	.	.	— 0,00	+ 0,00
75	0	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.

$$h = 5{,}34, \quad \xi^2 = 142{,}17, \quad d = 25{,}64.$$

Auch vom statistischen Standpunkt aus sind beide Schwärme als Ganzes inhomogen. Wie z. B. Tab. 4 zeigt, variieren die stündlichen Mittelwerte während der verschiedenen Phasen des Itô-Schwarmes sehr stark. Deshalb wurde der ganze Zeitraum in zehntägige Intervalle mit relativ homogenen mittleren stündlichen Bebendichten unterteilt und jedes dieser zehntägigen Intervalle für sich analysiert. Diese Analysen zeigen, daß die Beben einer Stunde wenigstens zum Teil von den Beben der Vorstunde abhängen. Verlängert man die einstündigen Beobachtungsintervalle zu zweistündigen Intervallen, so wächst nach der

Theorie [*13*, S. 86 und 87] das Quadrat des Schwankungsmaßes quadratisch mit der Intervallänge, d. h. bei zweistündigen Intervallen auf zirka den vierfachen Wert. Für die Zeitspanne vom 1. bis 10. März findet man nach Tab. 4

$$h = 5{,}34, \quad \xi^2 = 142{,}17 = 5{,}34\,(1 + 25{,}64).$$

Für die Zweistundenintervalle 0^h bis 2^h, 2^h bis 4^h, 4^h bis 6^h usw. ergeben Auszählung und Rechnung

$$h = 2 \times 5{,}34 = 10{,}68, \quad \xi^2 = 433{,}2 = 2 \times 5{,}34\,(1 + 2^{0{,}64} \times 25{,}64),$$

ξ^2 ist somit nahezu eine quadratische Funktion von 2.

Fügt man dagegen je zwei nicht unmittelbar aneinandergrenzende Stunden zu zweistündigen Intervallen zusammen, so ist nach der Ansteckungstheorie ξ^2 eine lineare Funktion von 2. Wir haben für die Zeitspanne vom 1. bis 10. März die Stunden 0^h bis 1^h, 12^h bis 13^h, 1^h bis 2^h, 13^h bis 14^h, ..., 11^h bis 12^h, 23^h bis 0^h des gleichen Tages zu zweistündigen Intervallen zusammengezogen. Auszählung und Rechnung ergeben dann

$$h = 10{,}68, \quad \xi^2 = 271{,}6 \sim 2 \times 5{,}34\,(1 + 25{,}64).$$

In diesem Fall ist somit ξ^2, wie es die Ansteckungstheorie verlangt, eine lineare Funktion von 2. Das dieser Theorie zugrunde liegende Urnenschema für Chancenvermehrung liefert also den zweckdienlichen Formalismus zur statistischen Beschreibung solcher Bebenschwärme.

Literaturverzeichnis.

1. Conrad, V.: Die zeitliche Folge der Beben und bebenauslösende Ursachen. Gutenbergs Handbuch der Geophysik, Bd. 4, 4. Berlin 1932.
2. Matuzawa, T.: Erdbebentätigkeit vor und nach Großbeben. Bull. Earthq. Inst. **14**, 38 (1936). — Über die Jahresschwankung der Erdbebenhäufigkeit in Japan. Ibid. **15**, 71.
3. Inouye, Win: Statistic Investigation of Earthquake Frequencies. Ibid. **15**, 142.
4. Wanner, E.: Zur Statistik der Erdbeben, I und II. Gerl. Beitr. Geoph. **50**, 85, 223 (1937). — Über die zeitliche Verteilung der Erdbeben in den Jahren 1918—1930. Jber. 1936 Schweiz. Erdbebendienst.
5. Bellamy, E. F.: Catalogue of Earthquakes. Brit. Assoc. Advancement Sci., No. 21 and 21 A.
6. Yasuda: Rep. Imp. Earthqu. Invest. Comm. No. 100, A, p. 262—295.
7. Bull. Earthq. Res. Inst., Tokyo Imperial University **5—6**, 300 (1928/29).
8. Jeffreys, H. Aftershocks and Periodicity in Earthquakes. Gerl. Beitr. Geoph. **53**, 111 (1938).
9. The Fukui Earthquake of June 28, 1948, Report of the Special Committee for the study of the Fukuli Earthquake, Tokyo 1950.
10. Kishinouye, F.: Frequency-Distribution of the Itô Earthquake Swarm of 1930. Bull. Earthq. Res. Inst. **15**, 785 (1937).

11. IMAMURA, NASU, KISHINOUYE and YASUDA: On the Recent Ito Earthquakes. Proc. Acad. **6** No. 5 (1930), Tokyo Imp. Univ.; NASU, FUYUHIKO, KISHINOUYE and KODAIRA: Recent Seismic Activities in the Idu Peninsula (Part 1). Bull. Earthq. Res. Inst. **9** (1931).

12. POLYÁ, G.: Über die Statistik verketteter Vorgänge. Z. angew. Math. Mech. 1923.

13. EGGENBERGER, F.: Die Wahrscheinlichkeitsansteckung. Diss. E. T. H. Zürich 1924.

14. NASU, N., F. KISHINOUYE and T. KODAIRA: Recent Seismic Activities in the Idu Peninsula (Part 1) Bull. Earthq. Res. Inst., Tokyo Imp. Univ. **9** (1931).

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5.
Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. F. Steinhauser, Wien V, Schloßgasse 14.
Druck: Manzsche Buchdruckerei, Wien IX.

Fortsetzung von der II. Umschlagseite

werden können. Die Beschriftung, die innerhalb der Zeichnung angebracht wird, ist nur mit weichem Bleistift einzutragen. Unterschriften zu den Zeichnungen werden im Druck wiedergegeben, ihre Vorlagen sollen dem Manuskript direkt beigegeben werden.

Es können grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; die Autoren sind verpflichtet, auch nachträglich bis mindestens zum 31. Dezember des auf das Erscheinen folgenden Kalenderjahres ihre Arbeit nicht anderweitig in gleicher oder ähnlicher Form zu veröffentlichen.

Die Autoren erhalten eine erste Fahnenkorrektur, die sie nach erfolgter Durchsicht an den Verlag zu senden haben; eine Umbruchkorrektur wird den Autoren nicht zugestellt.

Die Mitarbeiter erhalten 75 Sonderdrucke ihrer Arbeit (ohne Umschlag) kostenlos; sie können eine beschränkte Anzahl weiterer Sonderdrucke gegen Entschädigung beziehen, müssen diese jedoch bei der Rücksendung der ersten Korrektur bestellen.

Manuskripte und Anfragen sind an einen der beiden unterzeichneten Herausgeber zu richten.

Dozent Dr. **W. Mörikofer**
Physikalisch-Meteorologisches Observatorium
Davos-Platz, Schweiz

Prof. Dr. **F. Steinhauser**
Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik
Wien V, Schloßgasse 14, Österreich

Springer-Verlag
Wien I, Mölkerbastei 5
Österreich

Fortsetzung von der II. Umschlagseite

Seite

Scorer, R. S. Gravity Waves in the Atmosphere. (With 2 Figures) 176
Schwerdtfeger, W. Hohe und komplexe Druckänderungen im Bereich der Anden. (Mit 2 Textabbildungen) 194
Koschmieder, H. Zur Trombenbildung. (Mit 9 Textabbildungen) 203
Bleeker, W. and A. Delver. Some New Ideas on the Formation of Windspouts and Tornadoes. (With 8 Figures) 220
Hoinkes, H. Frontenanalyse mit Hilfe von Bergbeobachtungen. (Mit 20 Textabbildungen) 238
Cappel, A. Kritische Betrachtung einiger Weltkorrelationen 263
Baur, F. Zum Problem der Entstehung und Voraussage von Hochdrucklagen. (Mit 2 Textabbildungen) 272
Defant, A. Windstau und Auftrieb an ozeanischen Küsten. (Mit 8 Textabbildungen) 296
Weickmann, H. K. A Theory of the Formation of Ice Crystals. (With 8 Figures) 309
Conrad, V. A Method of Estimating the Periodic Constituent of a Geophysical Series. (With 4 Figures) 324
Lugeon, J. und P. Ackermann. Bestimmung der Temperaturfalschmessungen von Radiosondenaufstiegen infolge des Trainageeffektes. (Mit 4 Textabbildungen) 338
Fritz, S. Ozone Measurements During Sudden Ionospheric Disturbances. (With 4 Figures) 343
O'Donnell, G. A. and V. F. Hess. A Comparative Study of Atmospheric Conductivity at Ground Level and at One Meter above Ground. (With 12 Figures) 351
Chapman, S. The Equatorial Electrojet as Detected from the Abnormal Electric Current Distribution above Huancayo, Peru, and elsewhere. (With 13 Figures) 368
Burkard, O. Die halbjährige Periode der F_2-Schicht-Ionisation. (Mit 7 Textabbildungen) 391
Schneider, O. Vorschläge zur statistischen Erfassung erdmagnetischer Mikropulsationen. (Mit 3 Textabbildungen) 403
Caloi, P. Teoria delle Onde di Rayleigh in Mezzi elastici e firmo-elastici, esposta con le Omografie vettoriali. (Con 3 figure) 413
Wanner, E. Zur Statistik der Erdbebenschwärme 436

SPRINGER-VERLAG IN WIEN I

Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie

Herausgegeben von

W. Mörikofer und **F. Steinhauser**
Physikalisch-meteorologisches Observatorium Davos
Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik Wien

Serie B: Allgemeine und biologische Klimatologie

Soeben erschien:

Band III

Festschrift zum hundertjährigen Bestand der Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik in Wien

Mit 95 Textabbildungen. 323 Seiten

S 228.—, DM 46.—, $ 11.—, sfr. 47.50

Inhalt:

Albrecht, F. Intensität und Spektralverteilung der Globalstrahlung bei klarem Himmel. — **Berg, H.** Statistische Untersuchungen zur Meteorotropie der fulminanten Lungenembolie. — **Bider, M.** und **J. C. Thams.** Das Niederschlagsregime nord- und südwärts der Alpen auf Grund zehnjähriger Pluviographenregistrierungen. — **Bossolasco, M.** Zur Frage der Verdunstung auf dem Meere. — **De Quervain, M.** Zur Verdunstung der Schneedecke. — **Eckel, O.** Über die Veränderlichkeit und Reduzierbarkeit von Mittelwerten der Fluß- und Seetemperaturen. — **Ekhart, E.** Der Wind als Indikator für Klimaschwankungen. Zugleich ein Beitrag zur dynamischen Klimatologie. — **Flohn, H.** Passatzirkulation und äquatoriale Westwindzone. — **Goldschmidt, J.** Untersuchungen zur Globalstrahlung. — **Hesse, W.** Ein neues, stark empfindliches Temperatur-Feuchte-Meßgerät. — **Landsberg, H.** Some Recent Climatic Changes in Washington. D. C. — **Lauscher, F.** Über die Verteilung der Hillschen Abkühlungsgröße auf der Erde. — **Lossnitzer, H.** Die Deutung des elektromagnetischen Erdfeldes in der Bioklimatologie. — **Nicolet, M.** Sur la détermination du flux énergétique du rayonnement extraterrestre du Soleil. — **Prohaska, F.** Zur Frage der Klimaänderung in der Polarzone des Südatlantiks. — **Ramdas, L. A.** Micro-Climatogical Investigation of India. — **Reinhard, H.** Höhenwindverhältnisse im Gebiete des Ärmelkanals. — **Sargent, F.** A Critique of Homeostasis: Season and Metabolism. — **Sauberer, F.** und **I. Dirmhirn.** Untersuchungen über die Strahlungsverhältnisse auf den Alpengletschern. Messungen auf dem Hohen Sonnblick im Sommer 1950. — **Sochor, H.** Brechzahl und Refraktion der atmosphärischen Luft. — **Thornthwaite, C. W.** and **J. R. Mather.** The Role of Evapotranspiration in Climate. — **Tollner, H.** Über Schwankungen von Mächtigkeit und Dichte ostalpiner Firnfelder. — **Winter, H.** Änderungen im Sommerklima seit 150 Jahren.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria